Math. A. Castigliano
8° 57 d - 1

<36637037880016

<36637037880016

Bayer. Staatsbibliothek

THEORIE

DES

GLEICHGEWICHTES

ELASTISCHER SYSTEME

UND DEREN ANWENDUNG.

VON

A. CASTIGLIANO,

INGENIEUR DER OBERITALIENISCHEN EISENBAHNEN.

AUS DEM FRANZÖSISCHEN

VON

EMIL HAUFF,

INGENIEUR-ASSISTENT DER PRIV. ÖSTERR.-UNGAR. STAATS-EISENBAHN-GESELLSCHAFT.

MIT 50 HOLZSCHNITTEN UND EINEM ATLAS VON 10 TAFELN.

WIEN.

VERLAG VON CARL GEROLD'S SOHN.

1886.

30/9.78

129 F

Verlag von CARL GEROLD'S SOHN in Wien.

Vorträge über Brückenbau

gehalten

an den technischen Hochschulen in Prag, Wien und Berlin

von

Dr. E. Winkler,

Professor an der königl. technischen Hochschule in Berlin.

Diese Vorträge erscheinen in fünf Theilen:

I. Theil: **Theorie der Brücken.**
II. „ **Brücken im Allgemeinen. Steinerne Brücken.**
III. Theil: **Hölzerne Brücken.**
IV. „ **Eiserne Brücken.**
V. „ **Herstellung der Brücken.**

Der erste Theil über **Theorie der Brücken** zerfällt in folgende Hefte:

1. Heft: **Aeussere Kräfte der Balkenträger.**
2. „ **Theorie der gegliederten Balkenträger.**
3. „ **Hänge- und Sprengwerksträger** (einschliesslich Bogenträger und Gewölbe).

Jedem Hefte wird als Anhang ein Literaturbericht beigegeben.
Jedes Heft bildet für sich ein abgeschlossenes Ganze und wird einzeln abgegeben.

Bis jetzt wurde ausgegeben:

Theorie der Brücken.

1. Heft: **Aeussere Kräfte der Balkenträger.** Mit 256 Holzschnitten und 6 lithogr. Tafeln. 3. Auflage. 8. 1886. 8 fl. — 16 Mk.
(Die vergriffene zweite Auflage des vorstehenden Heftes erschien unter dem Titel: „Aeussere Kräfte gerader Träger".)

2. Heft: **Theorie der gegliederten Balkenträger.** Mit 234 Holzschnitten und 8 lithogr. Tafeln. 2. Auflage. 8. 1881. 8 fl. 40 kr. — 16 Mk. 80 Pf.

Eiserne Brücken.

2. Heft: **Gitterträger und Lager gerader Träger.** Mit 459 Holzschnitten und 7 lithogr. Tafeln. 2. verbesserte Auflage. 8. 1875. 8 fl. — 16 Mk.
Dieses Heft ist vergriffen. Neue Auflage in Vorbereitung.

4. Heft: **Querconstructionen.** Mit 565 Holzschnitten. 2. Auflage. 8. 1884. 12 fl. — 24 Mk.

Hölzerne Brücken.

1. Heft: **Balkenbrücken.** Mit 225 Holzschnitten. 8. 1877. 3 fl. — 6 Mk.

Ferner sind noch vorhanden von:

Theorie der Brücken

2. Heft, 1. Auflage
(erschienen unter dem Titel: **Innere Kräfte gerader Träger**)

Lieferung I. Mit 66 Holzschn. und 2 lithogr. Tafeln. 8. 1874. 2 fl. 20 kr. — 4 Mk. 40 Pf.
„ III. Mit 115 Holzschn. und 2 lithogr. Tafeln. 8. 1881. 3 fl. 20 kr. — 6 Mk. 40 Pf.

Wichtig für alle Abonnenten, welche dieselben zur Completirung gebrauchen.

THEORIE

DES

GLEICHGEWICHTES

ELASTISCHER SYSTEME

UND DEREN ANWENDUNG.

VON

A. CASTIGLIANO,

INGENIEUR DER OBERITALIENISCHEN EISENBAHNEN.

AUS DEM FRANZÖSISCHEN

VON

EMIL HAUFF,

INGENIEUR-ASSISTENT DER PRIV. ÖSTERR.-UNGAR. STAATS-EISENBAHN-GESELLSCHAFT.

MIT 50 HOLZSCHNITTEN UND EINEM ATLAS VON 10 TAFELN.

WIEN.

VERLAG VON CARL GEROLD'S SOHN.

1886.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

VORWORT.

Vorliegendes Werk enthält die *Theorie des Gleichgewichtes elastischer Systeme, und zwar zusammengestellt nach einer neuen Methode* und gegründet auf einige Lehrsätze, welche theils vollkommen neu, theils wenig bekannt sind.

Als Theil dieser Theorie findet man hierin *die mathematische Theorie des Gleichgewichtes fester Körper* vom Standpunkte der Widerstandsfähigkeit der Materien betrachtet.

Es wäre wohl an der Zeit, diese rationelle Art der Vorstellung in die Betrachtungen über den Widerstand der Materien einzuführen und somit die alte Methode zu verlassen, welche der berühmte Lamé *als halb-analytisch und halb-empirisch bezeichnet hat, welche aber nur dazu diente, den Weg zur wahren Wissenschaft zu verdecken.*

Im Folgenden werden einige geschichtliche Daten über die Entdeckung der im Laufe des vorliegenden Werkes zur Anwendung kommenden Lehrsätze zusammengestellt.

Diese Lehrsätze sind die folgenden drei:

1. von den Differentialquotienten der Arbeit, *erster Theil;*
2. von den Differentialquotienten der Arbeit, *zweiter Theil;*
3. von der kleinsten Arbeit.

Der erste derselben wurde schon von dem berühmten englischen Astronomen Green angewendet, aber nur bei einer speciellen Aufgabe

und nicht in dieser allgemeinen Weise vorgebracht und bewiesen, wie dies im vorliegenden Werke der Fall ist.

Der zweite ist die Umkehrung des ersteren und, wie ich glaube, wurde derselbe zum ersten Male im Jahre 1873, und zwar in meiner Diplomsarbeit als Ingenieur in Turin aufgestellt und bewiesen; in der Folge habe ich demselben in meinen Memoiren, betitelt: „Nuova teoria intorno all' equilibrio dei sistemi elastici", eine grössere Ausdehnung gegeben. Diese Memoiren wurden in den Schriften der Akademie der Wissenschaften zu Turin im Jahre 1875 veröffentlicht.

Der dritte Lehrsatz kann wohl als Folgerung des zweiten betrachtet werden. Wie in anderen Fragen des Maximums und Minimums, wurde derselbe, so zu sagen, schon vor der Entdeckung des eigentlichen Lehrsatzes geahnt, denn in der That hat schon im Jahre 1818 Herr Vène, Capitän der französischen Genietruppe, ein Princip aufgestellt, welches zwar ganz unrichtig in den Bedingungen, auf Grund welcher er dasselbe anwenden wollte, doch durch eine der sonderbaren Combinationen, deren die Wissenschaft einige Beispiele liefert, zur Entdeckung des Lehrsatzes der kleinsten Arbeit geführt hat.

Nach diesem ersten Schritte beschäftigten sich mehrere Gelehrte mit diesem Gegenstande; unter anderen auch die Herren A. Cournot, Pagani, Mossotti, A. Dorna und der General L. F. Ménabréa. Letzterer gab dem Lehrsatze von der kleinsten Arbeit den Namen *Princip der Elasticität* und machte ihn zum Gegenstande seiner Untersuchungen, und zwar zuerst in einer im Jahre 1857 der Akademie der Wissenschaften zu Turin vorgelegten Denkschrift, sodann in einer zweiten, welche er im Jahre 1858 der Akademie der Wissenschaften zu Paris vorlegte, und endlich in einer dritten, der erstgenannten Akademie im Jahre 1868 übergebenen Arbeit.

Indessen waren die Beweise, welche Herr Ménabréa gab, nicht vollgiltig, woraus folgte, dass das *Princip der Elasticität* von der Mehr-

zahl der Gelehrten nicht anerkannt wurde, und dass einige von denselben Erwiderungen veröffentlichten, um deren Irrthümer zu zeigen.

Erst im Jahre 1873 kam ich in die Lage, diesen Lehrsatz in meiner obgenannten Diplomsarbeit in einer präcisen und verständlichen Form aufzustellen, indem ich hiefür auch die ersten strengen Beweise gab; ferner zeigte ich in meiner schon oben angeführten Denkschrift vom Jahre 1875, dass der Lehrsatz von der kleinsten Arbeit nur eine Folgerung jenes vom Differentialquotienten der Arbeit (zweiter Theil) ist.

Ich bin daher wohl in der Lage versichern zu können, dass das vorliegende Werk, welches die vollständige Theorie der elastischen Systeme enthält, von welcher die mathematische Theorie der Elasticität fester Körper nur ein Capitel bildet, sich vollkommen auf die Lehrsätze von den Differentialquotienten der Arbeit stützt.

Nachdem es mein Ziel ist, nicht nur eine Theorie aufzustellen, sondern auch dahin zu wirken, dass deren Vortheile: „die Kürze und Einfachheit", in der praktischen Anwendung geschätzt werden, habe ich ausser der Mehrzahl der allgemeinen Probleme über den Widerstand der Materien, welche in den Schulen behandelt werden, auch noch mehrere ziffermässige Beispiele über die Berechnung der wichtigsten elastischen Systeme nach dieser neuen Methode aufgelöst. Jedes dieser Beispiele gibt, so zu sagen, die auf eines dieser Systeme besonders angewendete Theorie; und um vorliegendem Werke eine allgemeine praktische Bedeutung zu geben, wurde jedes Beispiel in jene Form gekleidet, welche man einem Projecte zu Grunde legt, um hiernach die Dimensionen der hauptsächlichen Constructionsbestandtheile zu rechtfertigen.

Meinen Intentionen folgend, diese Beispiele als Muster für ähnliche Berechnungen gelten zu lassen, habe ich immer mehrere Fälle der Belastung behandelt und zugleich über den Einfluss der Temperatur Aufschluss gegeben; das heisst, es wurden für jede Annahme der Belastung

die bei den verschiedenen Temperaturen zur Geltung kommenden elastischen Kräfte bestimmt.

Bei Berücksichtigung dieser Umstände und bei Befolgung der neuen Methode der Berechnung, welche die Lösung aller Fragen über das Gleichgewicht elastischer Systeme gestattet, ohne irgend eine Hypothese zu machen, erreicht man den Vortheil, einen viel grösseren Festigkeitscoëfficienten annehmen zu können; denn eine der Ursachen, welche uns oft zwingen, kleine Werthe für diesen Coëfficienten zu wählen, ist die Unvollständigkeit der Principien, auf Grund welcher man die elastischen Kräfte in Anschlag bringt; eine andere Ursache ist ferner die, dass man sich nicht Rechenschaft geben kann über alle Umstände, welche diese Kräfte vermehren können.

Was die Berechnungen betrifft, so wird bemerkt, dass dieselben nicht länger sind als bei Anwendung der gewöhnlichen Methoden, und dass man dieselben übrigens fast immer bedeutend abkürzen kann, indem man solche Rechnungsglieder vernachlässigt, welche das Resultat wenig beeinflussen.

Dieses Vorwort schliesse ich mit dem Ausdrucke meines besten Dankes an Herrn Louis Réeb (Chef de section principal au Matériel fixe des chemins de fer de la Haute-Italie), welcher sich der Mühe einer Revision der Beispiele unterzogen hat.

A. Castigliano.

INHALT.

Vorwort . III

Erster Theil. — Theorie.

		Seite
1. Capitel.	Gegliederte Systeme	1
2. Capitel.	Gefügte Systeme	38
3. Capitel.	Allgemeine Gleichungen des Elasticitätsgleichgewichtes fester Körper	48
4. Capitel.	Annäherungsweise Anwendungen	135
5. Capitel.	Theorie der Gitterträger	170
6. Capitel.	Formeln für die Deformationsarbeit fester Körper	186
7. Capitel.	Theorie belasteter Träger mit geradliniger Achse	199
8. Capitel.	Theorie der auf Zerknicken beanspruchten Träger mit geradliniger Achse	246
9. Capitel.	Theorie krummer Balken mit einfacher Krümmung	261
10. Capitel.	Theorie zusammengesetzter Systeme	286
11. Capitel.	Unvollkommen elastische Systeme, wie gemauerte Gewölbe	313

Zweiter Theil. — Anwendung.

		Seite	Tafel
1. Capitel.	Ein durch zwei Zugstangen aus Schmiedeisen und einer Druckstrebe aus Gusseisen armirter Balken	316	I
2. Capitel.	Ein durch drei Zugstangen aus Schmiedeisen und zwei Druckstreben aus Gusseisen armirter Balken	323	I
3. Capitel.	Ein durch drei Zugstangen aus Schmiedeisen und zwei Druckstreben aus Gusseisen armirter Balken	330	I
4. Capitel.	Eine Halle aus schmiedeisernen Bundgespärren ohne Zugstangen	337	II
5. Capitel.	Eine Halle aus schmiedeisernen Bundgespärren mit je einer Zugstange	354	III

		Seite	Tafel
6. Capitel.	Eine Halle aus schmiedeisernen Bundgespärren nach Type Polonceau	364	IV
7. Capitel.	Eine Halle aus schmiedeisernen Bundgespärren mit mehreren Zugstangen	379	V
8. Capitel.	Eine Halle aus schmiedeisernen Bundgespärren mit mehreren Zugstangen	391	VI
9. Capitel.	Eine Halle aus schmiedeisernen Bundgespärren mit mehreren Zugstangen	399	VII
10. Capitel.	Eine eiserne Bogenbrücke mit ebenen Auflagflächen	419	VIII
11. Capitel.	Eine eiserne Bogenbrücke mit cylindrischen Auflagflächen	434	VIII
12. Capitel.	Die Brücke aus Ziegelmauerwerk, welche für die Eisenbahnlinie von Mailand nach Venedig über den Oglio construirt wurde	447	IX
13. Capitel.	Die Brücke aus Hausteinen, welche von dem Ingenieur Charles Mosca über die Doire bei Turin construirt wurde	459	X

Berichtigungen.

Seite 372, 10. Zeile von unten	R'	statt	R'_1
„ 374, 4. „ „ „	$\mathfrak{S}_4 - t_4$	„	$\mathfrak{S}_4 - t_1$
„ 426, 13. „ „ oben	$\frac{P}{\Omega}$	„	$\frac{\Omega}{P}$

Tafel VII, Figur 5	$\mathfrak{S}_7$	statt	$\mathfrak{S}_1$

THEORIE
DES GLEICHGEWICHTES ELASTISCHER SYSTEME
UND DEREN ANWENDUNG.

Erster Theil. — Theorie.

1. Capitel.
Gegliederte Systeme.

1. Definition. — Wir nennen dasjenige System, welches keine andere Deformation erleiden kann, als seiner Elasticität entspricht, ein *System von unveränderlicher Form.*

2. Erfahrungssatz. — *Ein homogener gerader Stab oder Balken von constantem Querschnitte, welcher in der Richtung seiner Achse gezogen oder gedrückt wird, verlängert oder verkürzt sich proportional der Kraft, welcher er unterworfen ist.*

Bei Stäben von gleichem Materiale, aber von verschiedenen Querschnitten und verschiedenen Längen sind die Verlängerungen oder Verkürzungen direct proportional den Kräften und den Längen der Stäbe und verkehrt proportional den Flächen der Querschnitte.

Wenn man also T die Spannung eines homogenen Stabes nennt, l seine Länge, Ω die Fläche des Querschnittes, λ seine Verlängerung und endlich E einen Zahlencoëfficienten, welcher nur von dem Materiale des Stabes abhängig ist, so kann man

$$\lambda = \frac{T\,l}{E\,\Omega} \tag{1}$$

setzen, woraus folgt, dass $T = \dfrac{E\,\Omega}{l}\,\lambda$;

setzt man nun abgekürzt

$$\frac{E\,\Omega}{l} = \varepsilon, \tag{2}$$

so ergibt obige Formel

$$T = \varepsilon\,\lambda. \tag{3}$$

3. Deformationsarbeit eines in der Richtung seiner Achse gezogenen oder gedrückten Stabes. — Wenn sich ein Stab durch die Wirkung einer in der Richtung seiner Achse thätigen und in unendlich kleinen Abstufungen von Null bis T wachsenden Kraft von seiner ursprünglichen Länge l bis zur Länge $l+\lambda$ ausdehnt oder auf die Länge $l-\lambda$ verkürzt, so wird die Arbeit dieser Kraft T, welche gleich ist mit der Deformationsarbeit des Stabes, ausgedrückt durch

$$\int_0^\lambda T\,d\lambda = \varepsilon\int_0^\lambda \lambda\,d\lambda = \frac{\varepsilon\lambda^2}{2} = \frac{1}{2}\frac{T^2}{\varepsilon}. \qquad (4)$$

Wenn man aber statt einer in unendlich kleinen Abstufungen von Null bis T wachsenden Kraft sogleich eine dem Endwerthe T gleiche Kraft auf den Stab einwirken lässt, so wird die Verlängerung des Stabes grösser sein als $\frac{T}{\varepsilon}$; denn nennt man die Verlängerung, welche diesfalls stattfindet, λ', so ist offenbar die Deformationsarbeit des Stabes gleich $\frac{\varepsilon\lambda'^2}{2}$, während die Arbeit der Kraft $T\lambda'$ ist; nachdem diese zwei Arbeiten einander gleich sein müssen, erhält man die Gleichung

$$T\lambda' = \frac{\varepsilon\lambda'^2}{2},$$

woraus hervorgeht, dass $$\lambda' = \frac{2T}{\varepsilon}.$$

Die Kraft T bewirkt also eine doppelt so grosse Verlängerung als diejenige ist, welche durch eine in unendlich kleinen Abstufungen von Null bis zum Endwerthe wachsende Kraft hervorgerufen wird, d. i. doppelt so gross als diejenige, welche von dieser Kraft constant erhalten werden kann. Hieraus folgt, dass nach der Verlängerung der Stab sich bis zur ursprünglichen Länge verkürzt, um sodann in der Längsrichtung zu vibriren, wobei die Amplitüde des Angriffspunktes der Kraft gleich λ' ist.

4. Bemerkungen über gegliederte Systeme. — Man nennt *gegliederte Systeme* diejenigen, welche aus Stäben zusammengesetzt sind, deren äusserste Enden mittelst Charnieren verbunden sind, und bei welchen jeder Stab nur an seinen zwei Enden befestigt ist, so zwar, dass er sich um eines derselben unbehindert drehen könnte, wenn das andere Ende frei wäre.

Diese Systeme haben die Eigenschaft, dass die Stäbe, aus welchen sie zusammengesetzt sind, nur solchen Kräften unterworfen sind, deren Richtung mit ihrer Achse zusammenfällt, und dass somit die Biegungsmomente in den Knotenpunkten Null sind.

Denkt man sich nun im Raume eine Anzahl von n Punkten V_1, V_2, V_3, ... V_n, so kann man dieselben mittelst Stäben derart verbinden, dass ein gegliedertes System von unveränderlicher Form entsteht. Wählt man drei Punkte, z. B. V_1, V_2, V_3, und verbindet dieselben durch drei Stäbe, so ergibt sich ein Dreieck; verbindet man sodann einen anderen Punkt V_4, welcher nicht in der Ebene der drei anderen gelegen ist, durch drei Stäbe mit jenen, so hat man mit sechs Stäben ein gegliedertes System mit vier Ecken gebildet, welches eine unveränderliche Form hat. Verbindet man ferner noch einen Punkt V_5 durch drei Stäbe mit drei der vier ersten Punkte, in deren Ebene sich derselbe nicht befinden darf, so ergibt dies ein System von unveränderlicher Form, welches fünf Ecken hat und aus neun Stäben zusammengesetzt ist. Fährt man in dieser Weise fort, d. h. verbindet man jeden der folgenden Punkte V_6, V_7, ... V_n mit drei der vorangegangenen, in deren Ebene der betreffende Punkt nicht gelegen ist, so gelangt man hiedurch zu einem gegliederten System von unveränderlicher Form, dessen Eckenzahl n und dessen Stäbezahl $3n - 6$ beträgt.

Man sieht aus Obigem, dass es nicht möglich ist, ein System von unveränderlicher Form mit einer geringeren Anzahl von Stäben zu bilden; aber mit dieser Anzahl lassen sich im Allgemeinen mehrere Varianten machen. Um die grösste Anzahl der Stäbe zu finden, welche man anwenden kann, um ein gegliedertes System von n Ecken zu bilden, ist zu beachten, dass vorerst die zwei Punkte V_1 und V_2 untereinander verbunden werden müssen, sodann der Punkt V_3 mit diesen zwei, der Punkt V_4 mit allen drei und so fort, indem man successive jeden der anderen Punkte mit allen vorangehenden verbindet. Die Gesammtzahl der Stäbe ist somit

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots\ldots + (n - 1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Gewöhnlich sind gegliederte Systeme mit mehr als $3n - 6$ Stäben zu betrachten; von diesen Stäben wählt man sodann $3n - 6$, welche

derart gelegen sind, dass sie ein System von unveränderlicher Form geben, selbst dann noch, wenn die anderen Stäbe nicht vorhanden wären; diese nennt man *Hauptstäbe*, alle anderen aber heissen *Nebenstäbe*.

Im Allgemeinen gibt es nicht nur ein System von Hauptstäben, d. h. man kann unter den Stäben eines Systems in mehrfacher Weise die Anzahl von $3n - 6$ Stäben wählen, welche die Eigenschaft haben, ein System von unveränderlicher Form zu geben. Es werden auch dementsprechend unsere Betrachtungen auf alle diese verschiedenen Arten zur Anwendung gebracht werden.

Es ist zu bemerken, dass die beiden Ausdrücke $3n - 6$ und $\frac{n(n-1)}{2}$ für die Werthe $n = 3$ und $n = 4$ einander gleich werden, d. h. die gegliederten Systeme mit drei oder vier Ecken können keine grössere Zahl von Stäben haben, als unbedingt nothwendig ist, um eine unveränderliche Form zu bilden. Für eine grössere Anzahl von Ecken überschreitet die Zahl $\frac{n(n-1)}{2}$ immer diejenige von $3n - 6$.

Aus der Art der Zusammensetzung eines Systems von unveränderlicher Form mit n Ecken und $3n - 6$ Stäben folgt, dass in einem solchen System nur dann Spannungen eintreten, wenn äussere Kräfte darauf einwirken. Wird angenommen, dass keine äussere Kraft auf das System wirkt, dass aber andere Stäbe eingeführt wurden, so ist es klar, dass in dem aus mehr als $3n - 6$ Stäben zusammengesetzten System — vor Einwirkung einer äusseren Kraft — keine Spannung vorhanden sein kann, sobald die Längen dieser Stäbe genau gleich sind den Entfernungen derjenigen Ecken, welche sie verbinden sollen; haben aber die neuerdings hinzugekommenen Stäbe nicht genau jene Längen, welche den Entfernungen der zu verbindenden Ecken gleich sind, so erkennt man wohl, dass es nothwendig sein wird, dieselben zu verlängern oder zu verkürzen, um sie in das System einführen zu können, oder andererseits diejenigen Ecken, welche verbunden werden sollen, einander zu nähern oder von einander zu entfernen, was nicht stattfinden kann, ohne Spannungen oder Pressungen hervorzurufen, und es werden somit in einem solchen System die Stäbe gezogen oder gedrückt, noch bevor äussere Kräfte darauf einwirken.

5. Deformation gegliederter Systeme. — Wir denken uns ein gegliedertes System mit n Ecken $V_1, V_2, V_3, \ldots . . V_n$ und lassen auf jede derselben eine Kraft einwirken.

Nachdem die Spannungen der Stäbe und in Folge dessen auch die relativen Verrückungen der Ecken von den Verlängerungen der Stäbe abhängen, so beziehen wir das System auf drei mobile Achsen, indem wir als Anfangspunkt derselben die Ecke V_1 annehmen, als x-Achse die Strecke $V_1\,V_2$ und als $x\,y$-Ebene die Ebene der drei Punkte V_1, V_2, V_3, welche nicht in einer geraden Linie liegen dürfen. Sind V_p und V_q zwei beliebige Punkte, welche durch einen Stab verbunden sind, so können wir $x_p, y_p, z_p; x_q, y_q, z_q$ deren Coordinaten vor der Deformation nennen, l_{pq} die Länge des Verbindungsstabes, $\alpha_{pq}, \beta_{pq}, \gamma_{pq}$ die Winkel dieses Stabes mit den Achsen.

Nach der Deformation werden die Coordinaten des Punktes V_p folgende sein: $x'_p = x_p + \xi_p$, $y'_p = y_p + \eta_p$, $z'_p = z_p + \zeta_p$; die Länge des Stabes $V_p\,V_q$: $l'_{pq} = l_{pq} + \lambda_{pq}$; die Winkel, welche dieser Stab mit der Achse einschliesst: $\alpha'_{pq}, \beta'_{pq}, \gamma'_{pq}$ und endlich T_{pq} seine Spannung.

Zufolge dem in Nummer 2 Gesagten erhalten wir

$$T_{pq} = \varepsilon_{pq}\,\lambda_{pq},$$

wobei ε_{pq} eine constante Grösse ist.

Es ist ferner

$$l_{pq} = \sqrt{(x_q - x_p)^2 + (y_q - y_p)^2 + (z_q - z_p)^2},$$

$$l_{pq} + \lambda_{pq} = \sqrt{(x_q + \xi_q - x_p - \xi_p)^2 + (y_q - \eta_q + y_p - \eta_p)^2 + (z_q + \zeta_q - z_p - \zeta_p)^2};$$

letztere Formel lässt sich auch in folgender Form schreiben:

$$l_{pq} + \lambda_{pq} = \sqrt{\begin{Bmatrix} l^2_{pq} + 2\,(x_q - x_p)\,(\xi_q - \xi_p) + 2\,(y_q - y_p)\,(\eta_q - \eta_p) \\ + 2\,(z_q - z_p)(\zeta_q - \zeta_p) + (\xi_q - \xi_p)^2 + (\eta_q - \eta_p)^2 + (\zeta_q - \zeta_p)^2 \end{Bmatrix}}.$$

Wenn die Deformation des Systems sehr klein ist, wie wir dies auch für die Folge immer voraussetzen, so sind auch die Differenzen $\xi_q - \xi_p$, $\eta_q - \eta_p$, $\zeta_q - \zeta_p$ im Verhältnisse zu den anderen $x_q - x_p$, $y_q - y_p$, $z_q - z_p$ sehr klein und kann obige Wurzelgrösse in einer convergenten Reihe entwickelt werden, und zwar wie folgt:

$$\lambda_{pq} = (\xi_q - \xi_p)\,\frac{x_q - x_p}{l_{pq}} + (\eta_q - \eta_p)\,\frac{y_q - y_p}{l_{pq}} + (\zeta_q - \zeta_p)\,\frac{z_q - z_p}{l_{pq}} + \theta_{pq},$$

wobei θ_{pq} die Summe jener Glieder der Reihe darstellt, welche höhere Grade der Grössen $\xi_q - \xi_p$, $\eta_q - \eta_p$, $\zeta_q - \zeta_p$ enthalten. Hieraus ergibt sich, dass das Verhältniss $\frac{\theta_{pq}}{\lambda_{pq}}$ als Grenze den Werth Null hat, indem diese Differenzen sich auch der Null nähern.

$$\text{Da}\quad \frac{x_q - x_p}{l_{pq}} = \cos\alpha_{pq}, \quad \frac{y_q - y_p}{l_{pq}} = \cos\beta_{pq}, \quad \frac{z_q - z_p}{l_{pq}} = \cos\gamma_{pq}, \tag{5}$$

so lässt sich obige Formel auch folgendermassen schreiben:

$$\lambda_{pq} = (\xi_q - \xi_p)\cos\alpha_{pq} + (\eta_q - \eta_p)\cos\beta_{pq} + (\zeta_q - \zeta_p)\cos\gamma_{pq} + \theta_{pq};$$

setzt man der Kürze halber

$$(\xi_q - \xi_p)\cos\alpha_{pq} + (\eta_q - \eta_p)\cos\beta_{pq} + (\zeta_q - \zeta_p)\cos\gamma_{pq} = \lambda'_{pq},$$

so hat man
$$\lambda_{pq} = \lambda'_{pq} + \theta_{pq}.$$

Die Cosinus der Winkel, welche der Stab $V_p V_q$ nach der Deformation mit den Achsen bildet, sind:

$$\cos\alpha'_{pq} = \frac{x'_q - x'_p}{l'_{pq}} = \frac{x_q + \xi_q - x_p - \xi_p}{l_{pq} + \lambda_{pq}},$$

$$\cos\beta'_{pq} = \frac{y'_q - y'_p}{l'_{pq}} = \frac{y_q + \eta_q - y_p - \eta_p}{l_{pq} + \lambda_{pq}},$$

$$\cos\gamma'_{pq} = \frac{z'_q - z'_p}{l'_{pq}} = \frac{z_q + \zeta_q - z_p - \zeta_p}{l_{pq} + \lambda_{pq}}.$$

Diese Ausdrücke lassen sich in convergenten Reihen nach den Grössen $\xi_q - \xi_p$, $\eta_q - \eta_p$, $\zeta_q - \zeta_p$ entwickeln und erhält man sodann

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha'_{pq} &= \frac{x_q - x_p}{l_{pq}} + \omega_{pq} = \cos\alpha_{pq} + \omega_{pq}, \\ \cos\beta'_{pq} &= \frac{y_q - y_p}{l_{pq}} + \omega'_{pq} = \cos\beta_{pq} + \omega'_{pq}, \\ \cos\gamma'_{pq} &= \frac{z_q - z_p}{l_{pq}} + \omega''_{pq} = \cos\gamma_{pq} + \omega''_{pq}, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

worin ω_{pq}, ω'_{pq}, ω''_{pq} Ausdrücke von gleichem Grade wie die Differenzen $\xi_q - \xi_p$, $\eta_q - \eta_p$, $\zeta_q - \zeta_p$ vorstellen und welche sich daher mit diesen der Null nähern.

6. Gleichgewichtsgleichungen gegliederter Systeme. — Da nach der Deformation das System sich im Gleichgewicht befindet, so ist

es klar, dass die Spannungen in allen Stäben, welche in irgend einer Ecke zusammenkommen, gleich sein müssen der in dieser Ecke wirkenden äusseren Kraft.

Wenn man X_p, Y_p, Z_p die zu den Achsen parallelen Componenten der in der Ecke V_p wirkenden äusseren Kraft nennt, so hat man für den Gleichgewichtszustand folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} X_p + \Sigma\, T_{pq} \cos\alpha'_{pq} = 0, \\ Y_p + \Sigma\, T_{pq} \cos\beta'_{pq} = 0, \\ Z_p + \Sigma\, T_{pq} \cos\gamma'_{pq} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Nachdem man aber in vorhergehender Nummer gesehen hat, dass

$$\cos\alpha'_{pq} = \frac{x'_q - x'_p}{l'_{pq}},$$

$$\cos\beta'_{pq} = \frac{y'_q - y'_p}{l'_{pq}},$$

$$\cos\gamma'_{pq} = \frac{z'_q - z'_p}{l'_{pq}},$$

so lassen sich obige Gleichungen wie folgt schreiben:

$$\left.\begin{aligned} X_p + \Sigma\, T_{pq} \frac{x'_q - x'_p}{l'_{pq}} = 0, \\ Y_p + \Sigma\, T_{pq} \frac{y'_q - y'_p}{l'_{pq}} = 0, \\ Z_p + \Sigma\, T_{pq} \frac{z'_q - z'_p}{l'_{pq}} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Wenn man die zweite dieser Gleichungen mit z'_p multiplicirt und sie sodann von der mit y'_p multiplicirten dritten Gleichung abzieht, so erhält man die erste der nachfolgenden Gleichungen; die beiden anderen lassen sich in ähnlicher Weise ableiten.

$$\left.\begin{aligned} Z_p\, y'_p - Y_p\, z'_p + \Sigma\, T_{pq} \frac{y'_p z'_q - y'_q z'_p}{l'_{pq}} = 0, \\ X_p\, z'_p - Z_p\, x'_p + \Sigma\, T_{pq} \frac{x'_q z'_p - x'_p z'_q}{l'_{pq}} = 0, \\ Y_p\, x'_p - X_p\, y'_p + \Sigma\, T_{pq} \frac{x'_p y'_q - x'_q y'_p}{l'_{pq}} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Man hat somit für jede Ecke zwei Gruppen von Gleichungen analog den Gleichungen (8) und (9). Wenn man alle jene Gleichungen vereinigt, welche sich aus diesen sechs Gleichungen ableiten lassen, indem man $p = 1$, $p = 2$, $p = 3 \ldots\ldots p = n$ macht, so erhält man die sechs folgenden Gleichungen, welche von den Spannungen in den Stäben unabhängig sind:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma X_p = 0, \qquad & \Sigma (Z_p y'_p - Y_p z'_p) = 0, \\ \Sigma Y_p = 0, \qquad & \Sigma (X_p z'_p - Z_p x'_p) = 0, \\ \Sigma Z_p = 0, \qquad & \Sigma (Y_p x'_p - X_p y'_p) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Man erkennt leicht, dass diese sechs Gleichungen die sechs Charakteristikons der starren Systeme sind, woraus folgt, dass ein System, welches nach der Deformation als starr betrachtet wird, unter der Einwirkung der äusseren Kräfte im Gleichgewicht ist.

Nachdem man für jeden Punkt eines Systems drei Gleichungen hat, welche analog jenen unter (8) sind, so sieht man wohl, dass für das ganze System zwischen den Spannungen in den Stäben $3n$ Gleichungen vorhanden sind. Verbindet man dieselben untereinander, so kann man hiedurch die sechs Gleichungen (10) erhalten, welche von den Spannungen unabhängig sind, woraus folgt, dass die für die Bestimmung dieser Spannungen nützlichen Gleichungen sich auf $3n - 6$ reduciren.

Indessen darf man nicht glauben, dass die sechs Gleichungen (10) an die Stelle von irgend welchen sechs Gleichungen analog denen unter (8) gesetzt werden können, denn thatsächlich sind diese letzteren derartig, dass, wenn alle Spannungen der Stäbe gegeben wären, sie alle äusseren Kräfte zur Kenntniss bringen würden. Wenn man hingegen nur $3n - 6$ der Gleichungen unter (8) nimmt, so bestimmen dieselben nur $3n - 6$ der äusseren Kräfte in Functionen der Spannungen in den Stäben, und es müssten daher die sechs Gleichungen unter (10) die sechs unbekannt gebliebenen äusseren Kräfte bestimmen lassen.

Es lässt sich aber leicht erkennen, dass diese Gleichungen ein Resultat von der Form $\frac{0}{0}$ geben, wenn man sich derselben bedienen wollte, um die sechs auf nur zwei Eckpunkte wirkenden Kräfte zu bestimmen; man kann daher mit Bezug auf nur zwei Eckpunkte die Gleichungen (10) nicht für zwei Gruppen von Gleichungen analog jenen unter (8) substituiren.

Nimmt man hingegen zur Vereinfachung als Anfangspunkte der Coordinaten den Eckpunkt V_1 und lässt man die x-Achse durch den Eckpunkt V_2 gehen, sowie die xy-Ebene durch den Eckpunkt V_3, so sieht man, dass die sechs Gleichungen (10) genügen, um die drei Kräfte X_1, Y_1, Z_1, welche auf den ersten dieser Eckpunkte wirken, die zwei auf den zweiten Punkt wirkenden Kräfte Y_2, Z_2, sowie die auf den dritten wirkende Kraft Z_3 zu bestimmen; diese Gleichungen können daher für drei Gleichgewichtsgleichungen des Punktes V_1, für zwei Gleichungen des Punktes V_2, welche die zur x-Achse und z-Achse parallelen Componenten enthalten, und endlich für jene Gleichung des Punktes V_3, welche die zur z-Achse parallelen Componenten enthält, substituirt werden. Demzufolge werden wir künftighin diese sechs letzten Gleichungen nicht mehr schreiben.

Es ist nun zu beachten, dass die restlichen $3n - 6$ Gleichungen zwischen den Spannungen in den Stäben und den äusseren Kräften genau diejenigen sind, welche man erhält, sobald der Eckpunkt V_1 fix ist, der Punkt V_2 sich nur in der x-Achse bewegen kann, und der Punkt V_3 gezwungen ist, in der xy-Ebene zu verbleiben.

Durch diese Annahme verhindert man wohl die allgemeinen Bewegungen des Systems, die relativen Bewegungen können indess vollkommen frei stattfinden. In diesem Falle können sodann die Gleichungen (10) noch zur Bestimmung der Kräfte X_1, Y_1, Z_1; Y_2, Z_2; Z_3, welche die Reaction der Unterlage ausdrücken, dienen.

7. Vereinfachung der Gleichungen (7). — Die $3n - 6$ Gleichungen (7) enthalten die Endspannungen der Stäbe und die Winkel, welche dieselben nach der Deformation mit den Achsen einschliessen.

Aus Nummer 5 ist zu ersehen, dass

$$T_{pq} = \varepsilon_{pq} \lambda_{pq} = \varepsilon_{pq} (\lambda'_{pq} + \theta_{pq})$$

und
$$\cos \alpha'_{pq} = \cos \alpha_{pq} + \omega_{pq},$$

wobei λ'_{pq} bezüglich der Verrückung der beiden Punkte V_p und V_q eine Function ersten Grades ist und durch die Formel

$$\lambda'_{pq} = (\xi_q - \xi_p) \cos \alpha_{pq} + (\eta_q - \eta_p) \cos \beta_{pq} + (\zeta_q - \zeta_p) \cos \gamma_{pq}$$

gegeben ist; die Grösse θ_{pq} enthält nur höhere Grade der Werthe von $\xi_q - \xi_p$, $\eta_q - \eta_p$, $\zeta_q - \zeta_p$, während die Grösse ω_{pq} sowohl aus Werthen

ersten Grades, als auch aus Werthen höheren Grades dieser Differenzen zusammengesetzt ist.

Nachdem dieselben als kleine Werthe ersten Grades betrachtet werden können, so sieht man, dass λ'_{pq} und ω_{pq} ebenfalls kleine Werthe desselben Grades sind, während θ_{pq} ein kleiner Werth des zweiten Grades ist.

Wenn man nun das Product $T_{pq} \cos\alpha'_{pq}$ bildet, welches in den Gleichungen (7) vorkommt, so erhält man

$$\begin{aligned} T_{pq} \cos\alpha'_{pq} &= \varepsilon_{pq} (\lambda'_{pq} + \theta_{pq}) (\cos\alpha_{pq} + \omega_{pq}) \\ &= \varepsilon_{pq} (\lambda'_{pq} \cos\alpha_{pq} + \lambda'_{pq}\, \omega_{pq} + \theta_{pq} \cos\alpha_{pq} + \theta_{pq}\, \omega_{pq}); \end{aligned}$$

der erste in der Parenthese enthaltene Ausdruck $\lambda'_{pq} \cos\alpha_{pq}$ ist eine kleine Grösse ersten Grades; die zwei anderen $\lambda'_{pq}\, \omega_{pq}$ und $\theta_{pq} \cos\alpha_{pq}$ sind kleine Grössen des zweiten Grades und der letzte Ausdruck $\theta_{pq}\, \omega_{pq}$ ist eine kleine Grösse dritten Grades; wenn wir also den annäherungsweisen Werth auf die Grössen ersten Grades beschränken, wie dies bisher stets gethan wurde und wie dies übrigens in den Fragen über elastische Systeme immer genügend ist, so können wir die drei letzten Ausdrücke in der Parenthese vernachlässigen und erhalten sodann

$$T_{pq} \cos\alpha'_{pq} = \varepsilon_{pq}\, \lambda'_{pq} \cos\alpha_{pq};$$

wenn man T_{pq} die Endspannung im Stabe $V_p V_q$ nennt, welche man erhält, indem man im Vergleich zu der Grösse ersten Grades λ_{pq} die Grösse zweiten Grades θ_{pq} vernachlässigt, d. h. wenn man

$$T_{pq} = \varepsilon_{pq}\, \lambda'_{pq}$$

macht, so ergibt sich $T_{pq} \cos\alpha'_{pq} = T_{pq} \cos\alpha_{pq}$.

Man sieht daher, dass bei dem annäherungsweisen Verfahren, welches wir im Auge haben, die Gleichungen (7) in folgender Weise geschrieben werden können:

$$\left.\begin{aligned} X_p + \Sigma\, T_{pq} \cos\alpha_{pq} &= 0, \\ Y_p + \Sigma\, T_{pq} \cos\beta_{pq} &= 0, \\ Z_p + \Sigma\, T_{pq} \cos\gamma_{pq} &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Obzwar diese Gleichungen genau dieselbe Form haben wie die Gleichungen (7), so sieht man doch, dass sie viel einfacher sind, denn sie enthalten die Winkel, welche die Stäbe vor der Deformation mit den

Achsen einschliessen, statt jener, welche sie nach der Deformation mit den Achsen bilden; hiebei ist auch wohl darauf zu achten, dass in diesen Formeln nicht die genauen Spannungen T'_{pq} enthalten sind, sondern die angenäherten Spannungen T_{pq}, welche lineare Functionen der Verrückungen ξ_p, η_p, ζ_p sind.

In Folge dieser Betrachtung werden wir künftighin stets die Gleichungen (11) anwenden.

8. Bestimmung der Spannungen in den Stäben. — Die $3n-6$ Gleichungen (11) zwischen den Spannungen in den Stäben und den äusseren Kräften können zur Bestimmung dieser Spannungen dienen, wie gross auch deren Anzahl sei.

Betrachten wir nun zwei Fälle:

1. Die Zahl der Stäbe sei genau auf $3n-6$ beschränkt, d. i. auf die kleinstmögliche Anzahl, um noch ein System von unveränderlicher Form zu bilden. Zerschneidet man in diesem Falle einen der Stäbe, so wird das System aufhören, eines von unveränderlicher Form zu sein, und es wird irgend eine Bewegung sich geltend machen. Um diese Bewegung zu verhindern, muss man in dem zerschnittenen Stabe eine Kraft anbringen, welche durch die gewöhnlichen Gesetze der Statik bestimmt werden kann, und welche gleich ist jener Spannung, welcher der Stab vor der Trennung unterworfen war. Man sieht also, dass, wenn ein gegliedertes System von unveränderlicher Form nur aus $3n-6$ Stäben zusammengesetzt ist, die Spannungen in den Stäben mit Hilfe der gewöhnlichen Gesetze der Statik fester Körper bestimmt werden können. Dies folgt auch aus der analytischen Auflösung, denn man hat $3n-6$ Gleichungen, analog denen unter (11), zwischen $3n-6$ unbekannten Spannungen.

2. Nun nehmen wir an, dass die Anzahl der Stäbe grösser sei als $3n-6$. In diesem Falle kann man einige von den Stäben des Systems auslassen, ohne dass dasselbe aufhört, eines von unveränderlicher Form zu sein. Es ist aber nicht mehr möglich, die Spannungen in den Stäben mit den gewöhnlichen Gesetzen des Gleichgewichtes fester Körper zu bestimmen; trägt man indess der Elasticität Rechnung, so sieht man, dass alle diese Spannungen bestimmt werden können, denn wenn das System sich deformirt, so müssen sich alle Stäbe verlängern oder verkürzen, und

es ist schon bekannt, dass die Verlängerungen oder Verkürzungen die Spannung oder Compression jedes Stabes bestimmen.

Wir wollen nun sehen, in welcher Weise man vorgehen kann, um die unbekannten Spannungen zu bestimmen.

Wenn man den Punkt V_1 als Anfangspunkt der Coordinaten wählt, die x-Achse durch den Punkt V_2 gehen lässt und die xy-Ebene durch den Punkt V_3, so erhält man nachfolgend die $3n-6$ Gleichungen, welche das Elasticitätsgleichgewicht des Systems unter der Voraussetzung ausdrücken, dass den sechs Charakteristikons des allgemeinen Gleichgewichtes des als fest betrachteten Systems schon Genüge gethan sei.

$$\left.\begin{array}{lll}
X_2 + \Sigma\, T_{2q} \cos\alpha_{2q} = 0, & & \\
X_3 + \Sigma\, T_{3q} \cos\alpha_{3q} = 0, & Y_3 + \Sigma\, T_{3q} \cos\beta_{3q} = 0, & \\
X_4 + \Sigma\, T_{4q} \cos\alpha_{4q} = 0, & Y_4 + \Sigma\, T_{4q} \cos\beta_{4q} = 0, & Z_4 + \Sigma\, T_{4q} \cos\gamma_{4q} = 0, \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\
X_p + \Sigma\, T_{pq} \cos\alpha_{pq} = 0, & Y_p + \Sigma\, T_{pq} \cos\beta_{pq} = 0, & Z_p + \Sigma\, T_{pq} \cos\gamma_{pq} = 0, \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots
\end{array}\right\} \quad (12)$$

Nennt man ξ_2 die Verrückung des Punktes V_2 nach der x-Achse; ξ_3, η_3 die Verrückungen des Punktes V_3 parallel zur x- und zur y-Achse; ξ_4, η_4, ζ_4 ξ_p, η_p, ζ_p die Verrückungen der Punkte V_4 V_p parallel zu den drei Achsen: so ergeben sich folgende Gleichungen, um die Spannungen aller Stäbe auszudrücken:

$$\left.\begin{array}{l}
T_{1q} = \varepsilon_{1q}\, [\xi_q \cos\alpha_{1q} + \eta_q \cos\beta_{1q} + \zeta_q \cos\gamma_{1q}], \\
T_{2q} = \varepsilon_{2q}\, [(\xi_q - \xi_2) \cos\alpha_{2q} + \eta_q \cos\beta_{2q} + \zeta_q \cos\gamma_{2q}], \\
T_{3q} = \varepsilon_{3q}\, [(\xi_q - \xi_3) \cos\alpha_{3q} + (\eta_q - \eta_3) \cos\beta_{3q} + \zeta_q \cos\gamma_{3q}], \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
T_{pq} = \varepsilon_{pq}\, [(\xi_q - \xi_p) \cos\alpha_{pq} + (\eta_q - \eta_p) \cos\beta_{pq} + (\zeta_q - \zeta_p) \cos\gamma_{pq}], \\
\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}\right\} \quad (13)$$

Man sieht also, dass, wenn die $3n-6$ Verrückungen

$$\begin{array}{lll}
\xi_2, & & \\
\xi_3, & \eta_3, & \\
\xi_4, & \eta_4, & \zeta_4, \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
\xi_p, & \eta_p, & \zeta_p, \\
\cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

bekannt sind, man die Spannungen in allen Stäben erhalten kann.

Wenn man nun in den Gleichungen (12) für die Spannungen deren Ausdrücke (13) setzt, so hat man als Unbekannte nur die $3n - 6$ Verrückungen der Eckpunkte, d. h. eine Anzahl von Unbekannten, welche der Anzahl der Gleichungen vollkommen entspricht.

Nachdem dieselben ersten Grades sind, bietet deren Auflösung keine Schwierigkeiten.

Hat man die $3n - 6$ Verrückungen erhalten, so setzt man deren Werthe in die Gleichungen (13) ein und erhält sodann die Spannungen aller Stäbe des Systems.

9. Betrachtungen über vollkommen starre Systeme. — Die Werthe der Verrückungen, welche man durch die Auflösung der obigen Gleichungen erhält, können in der Form von Brüchen zweier Determinanten von der $3n - 6$ten Ordnung geschrieben werden. Die Determinante, welche den Nenner bildet, ist für alle Verrückungen dieselbe und jedes ihrer Elemente enthält einen der Coëfficienten ε als Factor, so dass sie eine homogene Function des $3n - 6$ten Grades bezüglich dieser Coëfficienten ist. Die Determinanten, welche den Zähler bilden, lassen sich alle von jener des Nenners ableiten, indem man in den Elementen einer Reihe die bekannten Glieder der Gleichungen (12), d. h. die Kräfte X_2; X_3, Y_3; X_p, Y_p, Z_p; einsetzt. Folglich sind auch die Nenner Determinanten der $3n - 6$ten Ordnung; bezüglich der Coëfficienten ε sind es aber homogene Functionen des $3n - 7$ten Grades.

Wenn man also in die Gleichungen (13) die Ausdrücke für die Verrückungen einsetzt, so erkennt man, dass jeder Nenner durch eine der Grössen ε multiplicirt wird, und dass derselbe in Folge dessen eine homogene Function des $3n - 6$ten Grades dieser Grössen wird. Jede der Spannungen wird somit durch das Verhältniss zweier homogenen Functionen, welche bezüglich der Coëfficienten ε vom $3n - 6$ten Grade sind, ausgedrückt und sind folglich nicht von dem absoluten Werthe dieser Coëfficienten, sondern von dem gegenseitigen Verhältnisse derselben abhängig.

Es folgt daraus, dass, wenn man z. B. alle Querschnitte der Stäbe in demselben Verhältnisse vergrössert, was nichts in dem Verhältnisse der Coëfficienten ε ändert, die Spannungen in den Stäben des Systems vollkommen dieselben bleiben.

Man kann sich leicht über diese Eigenschaft Rechenschaft geben, wenn man bedenkt, dass, sobald alle Coëfficienten ε in demselben Verhältnisse vergrössert werden, sich auch die Verlängerungen und Verkürzungen der Stäbe im gleichen Verhältnisse verringern, und dass daher die Beziehungen zwischen diesen Verlängerungen oder diesen Verkürzungen nicht geändert werden.

In den vollkommen starren Systemen aber, bei welchen es keine Verlängerungen oder Verkürzungen der Stäbe gibt, kann es zwischen diesen Werthen keine bestimmte Beziehung geben und somit auch nicht zwischen den Coëfficienten ε, woraus folgt, dass die Spannungen in den Stäben nicht bestimmt werden können.

Auf Grund dieser Betrachtungen kann man auch den Irrthum erkennen, in welchen die Herren Vène, Gournot und andere Gelehrte verfallen waren; dieselben erachteten es nämlich für möglich, die Spannungen in den vollkommen starren Systemen zu bestimmen, indem sie dieselben als Grenzen der elastischen Systeme ansahen, bei welchen sich die Elasticität in unbestimmter Weise vermindert hat. Selbst wenn man diese Idee als richtig annimmt, folgt doch nicht daraus, dass in den starren Systemen die Spannungen bestimmt werden können, denn hiezu ist nothwendig, dass, wenn sich die Elasticität der Stäbe unbestimmt vermindert, d. h. wenn die Coëfficienten ε unbestimmt wachsen, die Beziehungen zwischen diesen Coëfficienten als Grenzen endliche und bestimmte Werthe haben müssten, was eben nicht der Fall ist.

Uebrigens hat die Bestimmung der Spannungen in vollkommen starren Systemen gar keine Bedeutung, denn solche Systeme existiren in der Natur nicht.

Man muss wohl beachten, dass obiger Beweis nur auf Systeme, welche n Ecken und mehr als $3n - 6$ Stäbe haben, anzuwenden ist, denn bei solchen, welche nur $3n - 6$ Stäbe haben, kann die Bestimmung der Spannungen, wie wir es schon früher gesehen haben, einfach durch die gewöhnlichen Gesetze der Statik fester Körper geschehen.

10. Ausdruck für die Deformationsarbeit in einer Function der äusseren Kräfte. — Im Vorhergehenden wurde die Gleichung

$$\frac{T_{pq}}{\varepsilon_{pq}} = (\xi_q - \xi_p) \cos\alpha_{pq} + (\eta_q - \eta_p) \cos\beta_{pq} + (\zeta_q - \zeta_p) \cos\gamma_{pq}$$

gefunden. Beachtet man nun, dass

$$\cos\alpha_{pq} = -\cos\alpha_{qp}, \qquad \cos\beta_{pq} = -\cos\beta_{qp}, \qquad \cos\gamma_{pq} = -\cos\gamma_{qp},$$

so kann man obige Gleichung auch folgendermassen schreiben:

$$\frac{T_{pq}}{\varepsilon_{pq}} + (\xi_p \cos\alpha_{pq} + \eta_p \cos\beta_{pq} + \zeta_p \cos\gamma_{pq})$$
$$+ (\xi_q \cos\alpha_{qp} + \eta_q \cos\beta_{qp} + \zeta_q \cos\gamma_{qp}) = 0.$$

Multiplicirt man alle Ausdrücke mit $\frac{1}{2} T_{pq}$ und bildet sodann die Summe der für alle Stäbe des Systems analogen Gleichungen, so kann man, unter Beachtung, dass irgend eine Verrückung, z. B. ξ_p in allen Gleichungen für die Stäbe, welche in dem betreffenden Punkte V_p zusammenlaufen, vorkommen muss, die obgenannte Summe in folgender Form schreiben:

$$\frac{1}{2} \Sigma \frac{T_{pq}{}^2}{\varepsilon_{pq}} + \frac{1}{2} \xi_2 \Sigma T_{2q} \cos\alpha_{2q}$$
$$+ \frac{1}{2} \xi_3 \Sigma T_{3q} \cos\alpha_{3q} + \frac{1}{2} \eta_3 \Sigma T_{3q} \cos\beta_3{}^q$$
$$+ \frac{1}{2} \xi_4 \Sigma T_{4q} \cos\alpha_{4q} + \frac{1}{2} \eta_4 \Sigma T_{4q} \cos\beta_{4q} + \frac{1}{2} \zeta_4 \Sigma T_{4q} \cos\gamma_{4q}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \frac{1}{2} \xi_p \Sigma T_{pq} \cos\alpha_{pq} + \frac{1}{2} \eta_p \Sigma T_{pq} \cos\beta_{pq} + \frac{1}{2} \zeta_p \Sigma T_{pq} \cos\gamma_{pq}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Substituirt man für $\Sigma T_{2q} \cos\alpha_{2q}$, $\Sigma T_{3q} \cos\alpha_{3q}$ etc. die aus den Gleichungen (12) hervorgehenden Werthe $-X_2$, $-X_3$ etc., so ergibt sich

$$\frac{1}{2} \Sigma \frac{T_{pq}{}^2}{\varepsilon_{pq}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} X_2 \xi_2 + X_3 \xi_3 + Y_3 \eta_3 + X_4 \xi_4 + Y_4 \eta_4 + Z_4 \zeta_4 \\ + \ldots\ldots\ldots + X_p \xi_p + Y_p \eta_p + Z_p \zeta_p \end{pmatrix}$$

oder symbolisch $\frac{1}{2} \Sigma \frac{T_{pq}{}^2}{\varepsilon_{pq}} = \frac{1}{2} \Sigma (X_p \xi_p + Y_p \eta_p + Z_p \zeta_p)$.

Der Ausdruck links vom Gleichheitszeichen stellt die Deformationsarbeit des Systems dar (Nummer 3); diese Arbeit kann daher auch mit Hilfe folgender Formel in einer Function der äusseren Kräfte ausgedrückt werden:

$$\frac{1}{2}\Sigma(X_p\,\xi_p + Y_p\,\eta_p + Z_p\,\zeta_p). \tag{14}$$

Die Deformationsarbeit des Systems ist also nur von dem Endwerthe der äusseren Kräfte und nicht von dem Gesetze abhängig, nach welchem diese Kräfte von Null bis zu ihren Endwerthen gewachsen sind.

Nennt man

R_p jene Kraft, deren Componenten X_p, Y_p, Z_p parallel zu den Achsen sind;

ϱ_p die kleine Strecke, welche die Endlage des Angriffspunktes dieser Kraft mit der ursprünglichen Lage verbindet, d. i. die kleine Strecke, deren Projectionen auf die Achsen ξ_p, η_p, ζ_p sind;

a, b, c die Winkel, welche die Kraft R_p mit den Achsen einschliesst;

α, β, γ die Winkel, welche die Strecke ϱ_p mit den Achsen bildet; so hat man

$$X_p = R_p \cos a, \qquad Y_p = R_p \cos b, \qquad Z_p = R_p \cos c,$$
$$\xi_p = \varrho_p \cos\alpha, \qquad \eta_p = \varrho_p \cos\beta, \qquad \zeta_p = \varrho_p \cos\gamma,$$

und folglich

$$X_p\,\xi_p + Y_p\,\eta_p + Z_p\,\zeta_p = R_p\,\varrho_p\,(\cos a \cos\alpha + \cos b \cos\beta + \cos c \cos\gamma).$$

Wenn man θ den Winkel nennt, welchen die beiden Strecken R_p und ϱ_p einschliessen, so ergibt sich

$$\cos a \cos\alpha + \cos b \cos\beta + \cos c \cos\gamma = \cos\theta;$$

die rechte Seite obiger Gleichung wird daher

$$R_p\,\varrho_p \cos\theta.$$

Das Product $\varrho_p \cos\theta$ stellt aber die Projection der Strecke ϱ_p auf die Richtung der Kraft R_p dar; wenn man nun diese Projection r_p nennt, so erhält man folglich

$$X_p\,\xi_p + Y_p\,\eta_p + Z_p\,\zeta_p = R_p\,\varrho_p,$$

und die Formel (14), welche die Deformationsarbeit des ganzen Systems ausdrückt, wird

$$\frac{1}{2}\Sigma R_p\,r_p. \tag{15}$$

Ist R_p die Resultirende mehrerer Kräfte Q_p, S_p etc., welche nach irgend welchen Richtungen auf den Punkt V_p wirken, und nennt man

q_p, s_p etc. die Projectionen der Verrückung des Punktes V_p auf diese Richtungen, so ergibt sich zufolge der allgemeinen Regeln für die Arbeit der Kräfte
$$R_p\, r_p = Q_p\, q_p + S_p\, s_p + \ldots\ldots$$

Die Ausdrücke der rechten Seite der Gleichung sind vollkommen ähnlich dem Ausdrucke auf der linken Seite, und ist jeder derselben das Product einer auf das System wirkenden Kraft mit der Projection der Verrückung ihres Angriffspunktes auf die Richtung dieser Kraft.

Es kann also die Deformationsarbeit des ganzen Systems noch durch eine Formel ausgedrückt werden, welche analog jener unter (15) ist, in welcher aber alle auf das System wirkenden Kräfte in getrennter Weise erscheinen. Man könnte sich selbst direct der Formel (15) bedienen, wenn man nur im Auge behält, dass R_p eine beliebige Kraft von den auf den Eckpunkt V_p wirkenden Kräften und nicht deren Resultirende vorstellt.

Die Deformationsarbeit eines elastischen gegliederten Systems ist also gleich der halben Summe der Producte, welche man erhält, indem man jede auf das System wirkende äussere Kraft mit der Projection der Verrückung ihres Angriffspunktes auf die Richtung der Kraft multiplicirt.

Man muss wohl beachten, dass für das Product
$$R_p\, \varrho_p \cos\theta$$
vorausgesetzt wurde, dass die Kraft R_p und die Verrückung ϱ_p ihres Angriffspunktes im positiven Sinne genommen werden, denn die Lage der Strecke, welche die Kraft R_p vorstellt, und jene der Strecke ϱ_p um den Punkt V_p sind durch die Winkel a, b, c, α, β, γ bestimmt.

Es ist aber bekannt, dass der Werth des $\cos\theta$ positiv oder negativ ist, je nachdem der Winkel θ kleiner oder grösser als ein rechter ist, d. h. je nachdem die Projection von ϱ_p auf die Richtung der R_p auf dieselbe Seite der Wirkung der Kraft oder auf die entgegengesetzte fällt.

Die Projection der Verrückung des Angriffspunktes einer Kraft muss positiv oder negativ genommen werden, je nachdem sie auf dieselbe Seite mit der Wirkung der Kraft oder auf die entgegengesetzte Seite fällt.

Der Kürze halber nennen wir künftighin die Projection r_p der Verrückung ϱ_p auf die Richtung einer Kraft R_p *relative Verrückung des Angriffspunktes dieser Kraft.*

11. Lehrsatz von den Differentialquotienten der Deformationsarbeit. Erster Theil. — *Wenn man die Deformationsarbeit eines gegliederten Systems in Functionen der relativen Verrückungen der an den Eckpunkten wirkenden Kräfte ausdrückt, so erhält man eine Formel, deren Differentialquotienten mit Bezug auf diese Verrückungen den Werth der correspondirenden Kräfte geben.*

Zweiter Theil. — *Wenn man andererseits die Deformationsarbeit eines gegliederten Systems in Functionen der äusseren Kräfte ausdrückt, so erhält man eine Formel, deren Differentialquotienten mit Bezug auf diese Kräfte die relativen Verrückungen ihrer Angriffspunkte geben.*

Wenn man in der That die äussere Kraft R_p beliebig, aber um einen unendlich kleinen Theil $d\,R_p$ wachsen lässt, so erleidet das System eine unendlich kleine Deformation, bei welcher sich die relative Verrückung des Angriffspunktes der Kraft R_p, welche r_p war, um die Grösse $d\,r_p$ vergrössert; die Arbeit dieser Kraft während der als unendlich klein betrachteten Deformation wird $R_p\,d\,r_p$ sein.

Es folgt hieraus, dass die gesammte Deformationsarbeit, welche durch dieses Wachsen der äusseren Kräfte um $d\,R_p$ entsteht, durch folgende Formel ausgedrückt wird:

$$\Sigma\,R_p\,d\,r_p.$$

Nennt man die durch die Kräfte R_p ausgeübte gesammte Deformationsarbeit des Systems L, indem man diese Arbeit in einer Function der relativen Verrückungen der äusseren Kräfte ausdrückt, so wird offenbar das durch das Wachsen $d\,r_p$ der relativen Verrückungen der Eckpunkte hervorgerufene Wachsen dieser Arbeit durch die Formel

$$\Sigma\,\frac{d\,L}{d\,r_p}\,d\,r_p$$

gegeben; diese Formel muss mit der vorhergehenden identisch sein, welches auch immer die Werthe der Zunahmen $d\,r_p$ sind, woraus sich ergibt, dass man für jede Kraft folgende Gleichung hat:

$$\frac{d\,L}{d\,r_p} = R_p,$$

was den ersten Theil des Lehrsatzes beweist.

Bezüglich des zweiten Theiles ist zu beachten, dass die dem Wachsen $d\,r_p$ der äusseren Kräfte entsprechende Deformationsarbeit des Systems

auch durch das Differentiale der Formel (15) dargestellt wird, d. i. durch

$$\frac{1}{2}\Sigma R_p\, d\, r_p + \frac{1}{2}\Sigma r_p\, d\, R_p;$$

man hat daher die Gleichung

$$\Sigma R_p\, d\, r_p = \frac{1}{2}\Sigma R_p\, d\, r_p + \frac{1}{2}\Sigma r_p\, d\, R_p,$$

woraus sich ergibt $\Sigma R_p\, d\, r_p = \Sigma r_p\, d\, R_p;$

da die linke Seite dieser Gleichung die Deformationsarbeit des Systems für das Wachsthum $d\, R_p$ der äusseren Kräfte darstellt, so folgt daraus, dass die rechte Seite ebenfalls diese Arbeit ausdrückt.

Wenn man wie früher die durch die Kräfte R_p entstandene Deformationsarbeit des Systems L nennt, so wird offenbar die dem Wachsen $d\, R_p$ entsprechende unendlich kleine Arbeit durch nachfolgende Formel dargestellt:

$$\Sigma \frac{d\, L}{d\, R_p}\, d\, R_p.$$

Nachdem diese Formel mit der anderen $\Sigma r_p\, d\, R_p$ identisch sein muss, so erhält man für jede Kraft

$$\frac{d\, L}{d\, R_p} = r_p,$$

was den zweiten Theil des Lehrsatzes beweist.

12. Fortsetzung des Lehrsatzes von den Differentialquotienten der Deformationsarbeit. — Um bei der Anwendung vorstehenden Lehrsatzes in keinen Irrthum zu verfallen, müssen alle äusseren Kräfte als von einander unabhängig betrachtet werden, weshalb sie durch verschiedene Buchstaben zu kennzeichnen sind.

Prüfen wir übrigens, was man erhält, wenn man den Differentialquotienten der Deformationsarbeit des Systems mit Bezug auf eine Kraft P bildet, im Falle, als zwei gleich grosse, parallele Kräfte im entgegengesetzten Sinne auf das System wirken und beide durch denselben Buchstaben bezeichnet werden.

Zuerst werde vorausgesetzt, dass die beiden Kräfte P durch verschiedene Buchstaben P und P' bezeichnet seien. Bildet man nun den Differentialquotienten der Deformationsarbeit mit Bezug auf P, indem P'

als Function von P betrachtet wird, und stellt man durch F jene Function der äusseren Kräfte dar, welche die Deformationsarbeit gibt, so erhält man als deren gesammten Differentialquotienten mit Bezug auf P

$$\frac{dF}{dP} + \frac{dF}{dP'}\frac{dP'}{dP};$$

nachdem aber $P' = P$ ist, so wird

$$\frac{dP'}{dP} = 1$$

und obiger Differentialquotient von F

$$\frac{dF}{dP} + \frac{dF}{dP'},$$

wobei $\frac{dF}{dP}$ und $\frac{dF}{dP'}$ die Wege*) ausdrücken, welche die Angriffspunkte der beiden Kräfte P und P' zurücklegen. Hiebei muss man beachten, dass, da diese zwei Kräfte im entgegengesetzten Sinne gerichtet sind, die Differentialquotienten $\frac{dF}{dP}$ und $\frac{dF}{dP'}$ dasselbe oder entgegengesetzte Zeichen haben, je nachdem sich die zwei Wege $A\,a$ und $A'\,a'$ im entgegengesetzten oder im selben Sinne ergeben.

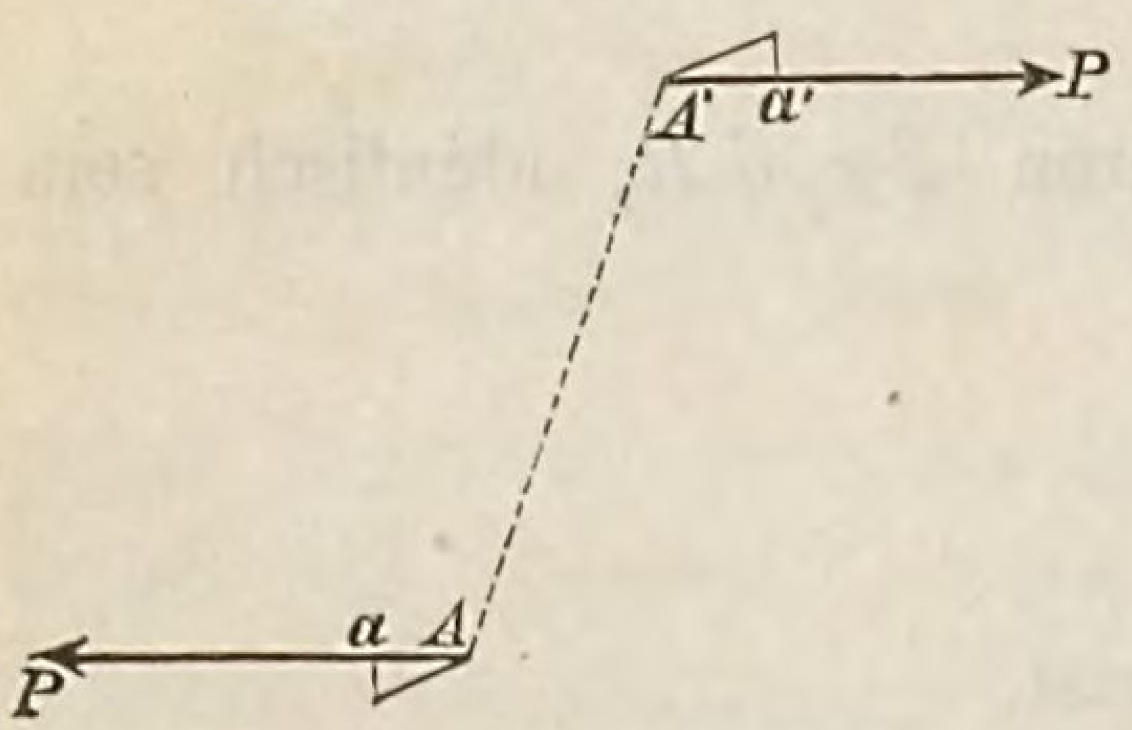


Fig. 1.

Wir wollen nun zwei sehr wichtige Fälle betrachten:

1. Die beiden Kräfte P und P' fallen in die Richtung der Verbindungslinie der Angriffspunkte.

In diesem Falle stellt die Summe $\frac{dF}{dP} + \frac{dF}{dP'}$, d. i. die Summe der beiden Wege $A\,a$ und $A'\,a'$, jenen Weg dar, um welchen sich die beiden

*) Ingenieur François Crotti, welcher im Ingenieurverein von Mailand und im Lombard-Institut (à la Société des Ingenieurs de Milan et à l'Institut Lombard) einige Vorlesungen über meine vorhergehenden Arbeiten gehalten hat, machte den Vorschlag, die *relative Verrückung* des Angriffspunktes einer Kraft *Weg dieser Kraft* zu nennen.

Angriffspunkte A und A' von einander entfernen, wobei vorausgesetzt wird, dass die beiden Kräfte P und P' in dem in nebenstehender Figur ersichtlichen Sinne wirken, d. h. dass sie die beiden Punkte A und A' zu entfernen trachten.

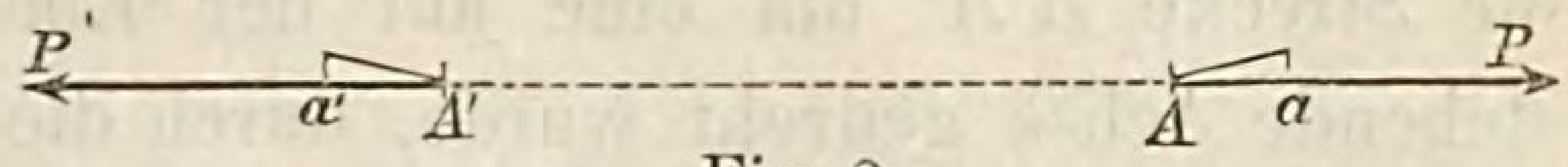


Fig. 2.

Wenn im selben Falle die Summe $\frac{dF}{dP} + \frac{dF}{dP'}$ negativ ausfällt, so folgt daraus, dass sich die beiden Punkte A und A' genähert haben.

Wenn die beiden Kräfte P und P' in nebenstehender Weise wirken, d. h. wenn sie die beiden Punkte A und A' zu nähern suchen, so drückt die Summe $\frac{dF}{dP} + \frac{dF}{dP'}$ die Verkürzung der Strecke $A\,A'$ aus, wenn sie positiv, und deren Verlängerung, wenn sie negativ wird.



Fig. 3.

2. *Die beiden Kräfte P und P' sind senkrecht auf die Verbindungslinie $A\,A'$ der beiden Angriffspunkte.*

Wird in diesem zweiten Falle M das Moment des Kräftepaares $P\,P'$ genannt, so erhält man

$$P . \overline{A\,A'} = M, \qquad P' . \overline{A\,A'} = M;$$

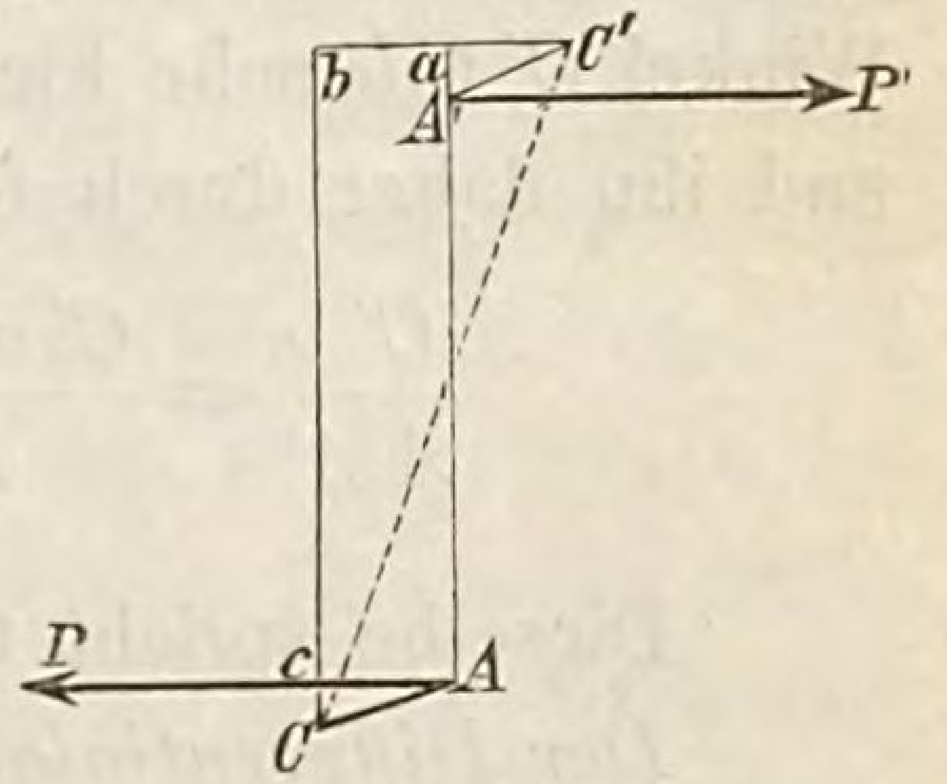


Fig. 4.

die Deformationsarbeit F kann als eine Function der veränderlichen Grössen P, P' betrachtet werden und letztere sind ihrerseits wieder Functionen von M; der Differentialquotient von F mit Bezug auf diese letzte Grösse ist also

$$\frac{dF}{dM} = \frac{dF}{dP}\frac{dP}{dM} + \frac{dF}{dP'}\frac{dP'}{dM},$$

nachdem aber
$$\frac{dP}{dM} = \frac{1}{\overline{A\,A'}}, \qquad \frac{dP'}{dM} = \frac{1}{\overline{A\,A'}},$$

so erhält man
$$\frac{dF}{dM} = \frac{1}{\overline{A\,A'}}\left(\frac{dF}{dP} + \frac{dF}{dP'}\right).$$

Wenn die Verbindungslinie der Angriffspunkte beider Kräfte, welche vor der Deformation die Stellung $A\,A'$ hatte, sich nach der Deformation

in einer solchen Stellung befindet, dass deren Projection auf die Ebene des Kräftepaares CC' ist, so wird offenbar der Winkel, um welchen die Strecke AA' um eine auf der Ebene des Kräftepaares senkrecht stehende Achse gedreht wurde, durch die beiden Strecken AA' und CC' gebildet. Wenn man vom Punkte C die Linie Cb parallel zu AA', vom Punkte C' die Linie $C'b$ senkrecht auf AA' zieht und die Linie AA' bis nach a verlängert, so sieht man, dass $C'a$ und ab die Projectionen der Verrückungen $A'C'$ und AC auf die Richtung der Kräfte, d. h. die Projectionen der Wege der Angriffspunkte dieser Kräfte sind, und dass deren Werthe durch $\frac{dF}{dP}$ und $\frac{dF}{dP'}$ gegeben sind. Der Winkel $C'Cb$ hat

als Tangente
$$\frac{C'b}{Cb} \text{ oder } \frac{C'b}{AA'},$$
indem man die sehr kleine Grösse $A'a$ vernachlässigt. Nachdem der Winkel $C'Cb$ sehr klein ist, kann man ihn seiner Tangente gleichsetzen und ihn daher durch folgende Formel ausdrücken:

$$\frac{C'b}{AA'} = \frac{C'a + ab}{AA'} = \frac{1}{AA'}\left(\frac{dF}{dP} + \frac{dF}{dP'}\right) = \frac{dF}{dM}.$$

Dieselbe spricht folgenden Lehrsatz aus:

Der Differentialquotient der Deformationsarbeit eines gegliederten elastischen Systems mit Bezug auf das Moment eines auf die Verbindungslinie der Angriffspunkte senkrechten Kräftepaares drückt die Drehung dieser Linie um eine auf die Ebene des Kräftepaares senkrechte Achse aus.

Da die partiellen Differentialquotienten $\frac{dF}{dP}$ und $\frac{dF}{dP'}$ positiv oder negativ sind, je nachdem die Projectionen der Verrückungen AC und $A'C'$ auf die Richtung der Kräfte selbst oder auf deren Verlängerung fallen, so folgt daraus, dass der Differentialquotient

$$\frac{1}{AA'}\left(\frac{dF}{dP} + \frac{dF}{dP'}\right)$$

positiv oder negativ ist, je nachdem die Drehung der Strecke AA' im selben Sinne der Wirkung des Kräftepaares oder im entgegengesetzten Sinne stattfindet.

13. Lehrsatz von der kleinsten Arbeit. — *Sucht man das Minimum der Function*

$$\frac{1}{2} \Sigma \frac{T_{pq}^{\ 2}}{\varepsilon_{pq}},$$

welche die Deformationsarbeit eines gegliederten Systems ausdrückt, indem man die 3 n — 6 Gleichungen (12) zwischen den Spannungen aller Stäbe des Systems in Rechnung zieht, so erhält man für diese Spannungen jene Werthe, welche in dem System nach der Deformation herrschen.

Zuerst ist zu beachten, dass nach der Deformation jeder Stab $V_p V_q$ durch zwei Kräfte ersetzt werden kann, welche, an den Punkten V_p und V_q wirkend, gleich sind der Spannung T_{pq}, und von welchen jede die Richtung nach dem Angriffspunkte der anderen hat, sobald der Stab thatsächlich gezogen wird, die entgegengesetzte aber, wenn derselbe gedrückt wird.

Wir wählen nun unter allen Stäben des Systems, deren Anzahl grösser als $3n - 6$ vorausgesetzt wird, $3n - 6$ Stäbe, welche eine derartige gegenseitige Lage haben, dass diese Stäbe genügen, um das System zu einem solchen von unveränderlicher Form zu machen. Alle anderen Stäbe können sodann entfernt werden, ohne dass das Gleichgewicht des Systems gestört wird, vorausgesetzt, dass man in den durch die Stäbe verbundenen Punkten je zwei Kräfte wirken lässt, welche der Spannung in dem betreffenden Stabe gleich sind und die oben angeführten Richtungen einnehmen. Die $3n - 6$ Gleichungen (12) dienen dazu, die Spannungen der $3n - 6$ Hauptstäbe in Functionen der äusseren, in den Eckpunkten wirkenden Kräfte, sowie die Spannungen der entfernten Stäbe zu bestimmen.

Nachdem diese letzteren aber unbekannt sind, so muss man dieselben durch die geometrischen Bedingungen, welchen das System genügen muss, ausdrücken.

Diese Bedingungen sind sehr einfach, denn wenn man in dem auf die alleinigen Hauptstäbe reducirten System, wobei die Nebenstäbe durch gleichwerthige Kräfte ersetzt wurden, zwei Eckpunkte eines inzwischen entfernten Stabes betrachtet, so werden sich offenbar bei der Deformation des Systems diese zwei Eckpunkte in der gleichen Weise von einander entfernen oder einander nähern wie in dem ursprünglichen System, d. h.

in einer der Verlängerung oder Verkürzung des entfernten Stabes gleichen Grösse.

Stellt man nun die Deformationsarbeit des auf $3n - 6$ Stäbe reducirten Systems von unveränderlicher Form durch F dar, so kann man diese Arbeit in einer Function der äusseren Kräfte und der Spannungen der entfernten Stäbe ausdrücken.

Wenn V_p und V_q zwei Punkte sind, welche durch einen dieser letzteren Stäbe verbunden sind, und T_{pq} die Spannung desselben ist, so resultirt aus dem in Nummer 12 geprüften ersten Falle, dass der Differentialquotient von F mit Bezug auf T_{pq} die Annäherung oder Entfernung der beiden Punkte V_p und V_q ausdrückt. Die Entfernung der letzteren, wenn T_{pq} in der That eine Zugspannung ist, und ihre Annäherung, wenn T_{pq} eine Pressung ist, werden ausgedrückt durch

$$-\frac{dF}{dT_{pq}}.$$

Der Stab $V_p V_q$ verlängert oder verkürzt sich unter der Einwirkung der Spannung oder der Pressung T_{pq} um die Grösse

$$\frac{T_{pq}}{\varepsilon_{pq}},$$

und man erhält daher die Gleichung

$$-\frac{dF}{dT_{pq}} = \frac{T_{pq}}{\varepsilon_{pq}},$$

oder

$$\frac{dF}{dT_{pq}} + \frac{T_{pq}}{\varepsilon_{pq}} = 0.$$

Für jeden der entfernten Stäbe gibt es eine ähnliche Gleichung; man hat also ebensoviele Gleichungen, als Unbekannte vorhanden sind.

Die Deformationsarbeit des ursprünglichen Systems, d. h. desjenigen Systems, welches nicht nur die Hauptstäbe, sondern auch die Nebenstäbe enthält, wird durch folgende Formel ausgedrückt:

$$F + \frac{1}{2} \Sigma \frac{T_{pq}^2}{\varepsilon_{pq}},$$

wobei die Summe Σ so viele Glieder enthält, als es Nebenstäbe gibt.

Die obigen Gleichungen, welche alle geometrische Bedingungen ausdrücken, welchen das System entsprechen muss, sind nichts Anderes als

die gleich Null gesetzten Differentialquotienten der Deformationsarbeit des ganzen gegebenen Systems; die Spannungen, welche nach der Deformation statthaben, sind also diejenigen, welche diese Arbeit zu einem *Minimum* machen.

14. Zweiter Beweis des Lehrsatzes von der kleinsten Arbeit. — Wir lassen hier einen anderen Beweis folgen, welcher im Jahre 1873 veröffentlicht wurde und welcher zu einer beachtenswerthen Eigenthümlichkeit führt.

Auf Grund der Gleichungen (12), in welchen die äusseren Kräfte als Constante betrachtet werden können, hat man, um das Minimum der Function $\frac{1}{2} \Sigma \frac{T_{pq}{}^2}{\varepsilon_{pq}}$ zu suchen, die Gleichung

$$\Sigma \frac{T_{pq}\, d\, T_{qp}}{\varepsilon_{pq}} = 0, \qquad (16)$$

wobei die Spannungen T_{pq} durch die $3\,n - 6$ Gleichungen (12) und die Differentiale $d\,T_{pq}$ durch die $3\,n - 6$ folgenden Gleichungen gegeben sind; letztere ergeben sich durch Differentirung der selben Gleichungen (12).

$$\left.\begin{array}{lll} \Sigma\, d\, T_{2q} \,.\, \cos\alpha_{2q} = 0, & & \\ \Sigma\, d\, T_{3q} \,.\, \cos\alpha_{3q} = 0, & \Sigma\, d\, T_{3q} \,.\, \cos\beta_{3q} = 0, & \\ \Sigma\, d\, T_{4q} \,.\, \cos\alpha_{4q} = 0, & \Sigma\, d\, T_{4q} \,.\, \cos\beta_{4q} = 0, & \Sigma\, d\, T_{4q} \,.\, \cos\gamma_{4q} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \qquad (17)$$

In diesen $3\,n - 6$ Gleichungen und der Gleichung (16) muss man nun die $3\,n - 6$ Differentiale der Spannungen eliminiren; aber anstatt diese Elimination direct durchzuführen, kann man jede der Gleichungen (17) mit einer unbestimmten Constanten multipliciren und diese Producte in die Gleichungen (16) einführen; sodann setzt man die Coëfficienten aller Differentiale $d\,T$ gleich Null, was ebensoviele Gleichungen gibt, als Spannungen vorhanden sind. Es ist wohl wahr, dass man auf diese Weise $3\,n - 6$ neue Unbekannte eingeführt hat, nämlich die unbestimmten Constanten; nachdem man aber auch die $3\,n - 6$ Gleichungen (12) hat, so sieht man schliesslich, dass ebensoviele Gleichungen als Unbekannte vorhanden sind, und dass dieselben somit alle vollkommen bestimmt werden können.

Wir nennen nun

$$\begin{array}{lll} A_2 & & \\ A_3, & B_3 & \\ A_4, & B_4, & C_4 \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

die Constanten, mit welchen wir die Gleichungen (17) multipliciren, und suchen jene Gleichung, welche sich ergibt, indem man den Coëfficienten irgend eines Differentials, z. B. von $d\,T_{pq}$, gleich Null setzt.

Es ist klar, dass sich dieses Differentiale nur in einem Ausdrucke der Gleichung (16) und nur in je einem Ausdrucke der sechs Gleichungen des Systems (17), welche sich auf die zwei Punkte V_p und V_q beziehen, befinden kann; man sieht daher, dass die gesuchte Gleichung folgende sein wird:

$$\frac{T_{pq}}{\varepsilon_{pq}} + A_p \cos\alpha_{pq} + B_p \cos\beta_{pq} + C_p \cos\gamma_{pq}$$
$$+ A_q \cos\alpha_{qp} + B_q \cos\beta_{qp} + C_q \cos\gamma_{qp} = 0;$$

bei Beachtung, dass

$$\cos\alpha_{qp} = -\cos\alpha_{pq}, \qquad \cos\beta_{qp} = -\cos\beta_{pq}, \qquad \cos\gamma_{qp} = -\cos\gamma_{pq},$$

und indem man diese Gleichung mit ε_{pq} multiplicirt, erhält man

$$T_{pq} = \varepsilon_{pq}\left[(A_q - A_p)\cos\alpha_{pq} + (B_q - B_p)\cos\beta_{pq} + (C_q - C_p)\cos\gamma_{pq}\right] \quad (18).$$

Man hat also ebensoviele ähnliche Gleichungen als Spannungen, d. i. als Stäbe im System vorhanden sind, und alle diese Spannungen werden in Functionen der $3n-6$ Constanten A_2; A_3, B_3; A_4, B_4, C_4 etc. ausgedrückt.

Wenn man die auf obige Weise erhaltenen Gleichungen mit den Gleichungen (13) vergleicht, so erkennt man, dass die einen von den anderen nur darin verschieden sind, dass die Buchstaben A, B, C durch die Buchstaben ξ, η, ζ ersetzt sind; die Indices bleiben dieselben.

Um jene Spannungen zu erhalten, welche die Function $\frac{1}{2}\Sigma\frac{T_{pq}^2}{\varepsilon_{pq}}$ zu einem *Minimum* machen, muss man zuerst in den Gleichungen (12) die Werthe der Spannungen, welche sich aus der Gleichung (18) ergeben, einsetzen und die so erhaltenen Gleichungen auflösen, auf welche Weise sich die Werthe der eingeführten Constanten ergeben. In ähnlicher Weise muss man, um die Spannungen zu erhalten, welche nach der Deformation

statthaben, in den Gleichungen (12) die Werthe der durch die Gleichungen (13) gegebenen Spannungen einsetzen und erhält sodann aus diesen resultirenden Gleichungen die Verrückungen der Eckpunkte.

Man sieht aber, dass diese zwei Operationen vollkommen identisch sind, vorbehaltlich der Aenderung der Buchstaben, welche die Unbekannten darstellen. *Für die Constanten* A_p, B_p, C_p *ergeben sich dieselben Werthe wie für die Verrückungen* ξ_p, η_p, ζ_p, *woraus folgt, dass die Werthe der Spannungen, welche man erhält, indem man das Minimum der Deformationsarbeit des Systems sucht, diejenigen sind, welche nach der Deformation statthaben.*

Aus diesem Beweise resultirt die bemerkenswerthe Eigenschaft, auf welche wir die Aufmerksamkeit lenken wollten, und welche darin besteht, dass *die Werthe der Constanten, welche man in die Rechnung einbezieht, um das Minimum der Deformationsarbeit zu suchen, die Verrückungen der Eckpunkte ausdrücken.*

Dieser Beweis des Lehrsatzes von der kleinsten Arbeit ist meines Wissens der erste genaue, welcher gegeben wurde.

15. Fälle, in welchen der Lehrsatz von der kleinsten Arbeit nicht angewendet werden kann. — Wir wollen hiebei nicht die Art und Weise betrachten, wie man den Lehrsatz von der kleinsten Arbeit in jenen Fällen anwendet, in welchen irgend welche Eckpunkte des Systems fix sind, oder in welchen dieselben gezwungen sind, auf Flächen oder Linien ohne Reibung zu verbleiben, denn in diesen Fällen kann man keiner Schwierigkeit begegnen.

Aber es gibt einen Fall, welchen man betrachten muss, und zwar ist es jener, in welchem einige der Eckpunkte gezwungen sind, auf Linien oder Flächen zu verbleiben, welche der Bewegung dieser Punkte einen Reibungswiderstand entgegensetzen.

Zur Vereinfachung sei vorausgesetzt, dass es in dem System nur einen Eckpunkt gibt, welcher gezwungen ist, auf einer gegebenen Fläche zu verbleiben. In diesem Falle kann es eintreffen, dass die Reibung genügend gross ist, um die Bewegung dieses Punktes zu verhindern, weshalb dieser als fix betrachtet werden muss, so dass die Berechnung keiner Schwierigkeit unterliegt.

Aber es kann auch eintreffen, dass eine Bewegung stattfindet. Nennt man nun den Druck des Punktes auf die Fläche Q, so ist der Widerstand gegen das Gleiten fQ, wobei f ein constanter Coëfficient ist.

Um zu erkennen, welche dieser zwei Voraussetzungen eintrifft, und um gleichzeitig die Richtung der Kraft fQ zu finden, betrachte man zuerst den auf der Fläche befindlichen Punkt als fix und bestimme die drei Componenten der Reaction des Punktes, welche parallel zu den Achsen sind, indem man ausdrückt, dass die Verrückungen dieses Punktes parallel zu den Achsen gleich Null sind. Sodann reducirt man diese drei Componenten auf zwei Kräfte, deren eine Q senkrecht und deren andere tangential zur Fläche ist, und untersucht, ob diese letztere kleiner oder grösser als fQ ist; wenn sie kleiner ist, so kann kein Gleiten stattfinden; ist sie hingegen grösser, so wird das Gleiten in der Richtung der tangentialen Kraft stattfinden, vorausgesetzt, dass der Gleitungswiderstand in jeder Richtung gleich ist.

Unter dieser letzteren Annahme nimmt man die Berechnung wieder auf, indem man voraussetzt, dass der auf der Ebene befindliche Punkt frei ist, dass er aber durch zwei Kräfte beansprucht wird, deren eine Q senkrecht auf die Fläche und deren andere fQ tangential zur Fläche und parallel zur Richtung des Gleitens ist.

Nachdem die Kräfte Q und fQ als äussere Kräfte betrachtet werden können, so lassen sich die Spannungen aller Stäbe des Systems, sowie auch die Deformationsarbeit desselben, welche wir F nennen wollen, in Functionen der einzigen Unbekannten Q ausdrücken.

Zufolge dem Lehrsatze von der kleinsten Arbeit muss man, um die Unbekannte Q zu bestimmen, die Function F zu einem Minimum machen, d. h. den Differentialquotienten von F mit Bezug auf Q gleich Null setzen.

Nennt man zur grösseren Verständlichkeit S die tangentiale Kraft fQ, so wird die Deformationsarbeit F durch eine Function von Q und von S ausgedrückt werden, und der gleich Null werdende Differentialquotient von F mit Bezug auf Q wird folgende Gleichung geben:

$$\frac{dF}{dQ} + \frac{dF}{dS} f = 0.$$

Geht man hingegen von den geometrischen Bedingungen aus, welchen das System entsprechen muss, so hat man offenbar zum Ausdruck zu bringen, dass der auf die Fläche sich stützende Punkt nur in dieser Fläche sich bewegen kann, d. h. dass seine Bewegung in der Richtung der senkrechten Kraft Q gleich Null ist.

Zufolge dem Lehrsatze von den Differentialquotienten der Arbeit muss man den Differentialquotienten von F mit Bezug auf Q gleich Null setzen, was folgende Gleichung gibt:

$$\frac{dF}{dQ} = 0.$$

Diese Gleichung kann nicht identisch sein mit der vorhergehenden, denn hiezu müsste $\frac{dF}{dS} = 0$ sein, was in Rücksicht darauf nicht möglich ist, als $\frac{dF}{dS}$ die Verrückung des Punktes in der Ebene ausdrückt, welche Verrückung nach der gemachten Annahme nicht Null ist.

Dies zusammenfassend kann man sagen, dass, sobald die freie Verrückung der Punkte durch die Reibung gehindert ist, man durch die Anwendung des Lehrsatzes von der kleinsten Arbeit in einen Irrthum verfallen würde; hiebei bleibt es aber unbenommen, in diesem Falle sich des Lehrsatzes von den Differentialquotienten der Arbeit zu bedienen.

16. Systeme, in welchen schon vor Anwendung äusserer Kräfte Spannungen vorhanden sind. — Bis jetzt wurden nur derartige gegliederte Systeme betrachtet, bei welchen in ihrem natürlichen Zustande, d. h. im Falle, als keine Kraft auf sie einwirkt, die Stäbe weder gezogen, noch gedrückt werden; dies setzt voraus, dass alle Stäbe genau die zur Zusammenstellung des Systems nothwendigen Längen haben, so dass, nachdem das System mit den zu einem System von unveränderlicher Form genügenden $3n - 6$ Stäben zusammengesetzt wurde, die anderen Stäbe genau die den Entfernungen der zu verbindenden Eckpunkte gleichen Längen haben.

Nunmehr erübrigt noch, die sehr wichtigen Fälle zu untersuchen, bei welchen nach Zusammensetzung des Systems aus $3n - 6$ Stäben andere Stäbe von solchen Längen eingesetzt werden, welche den Ent-

fernungen zwischen den zu verbindenden Eckpunkten nicht entsprechen, welche aber nur um sehr kleine Grössen differiren und daher mit Längenänderungen zu vergleichen sind, welche die Elasticität der Stäbe nicht überschreiten.

In dem Falle also, wo man in dem aus $3n-6$ Stäben zusammengesetzten System noch einen anderen Stab von einer der Entfernung der zu verbindenden Eckpunkte nicht vollkommen gleichen Länge einfügt, kann dies nur dadurch stattfinden, dass man diesen Stab dehnt oder zusammendrückt und die beiden Punkte einander nähert oder von einander entfernt; in Folge dessen werden nach Einführung des neuen Stabes alle anderen gezogen oder comprimirt werden, obzwar noch keine äussere Kraft auf das System einwirkt.

Es wird nun für jeden neu eingeführten Stab eine Aenderung in den Spannungen der anderen Stäbe die Folge sein.

Lässt man auf das in dieser Weise zusammengesetzte System noch äussere Kräfte in den Eckpunkten einwirken, so wird eine neue Aenderung in den Spannungen der Stäbe eintreten. Es ist daher folgende Aufgabe zu lösen:

Gegeben sei ein gegliedertes System, dessen Nebenstäbe in ihrem natürlichen Zustande nicht jene Längen haben, welche den Entfernungen der zu verbindenden Eckpunkte entsprechen, solange das System nur aus Hauptstäben zusammengesetzt war und solange noch keine Kraft darauf einwirkte; zu finden ist die Spannung aller Stäbe des Systems nach der Einwirkung von äusseren Kräften.

Es seien A und B zwei durch einen Nebenstab verbundene Punkte, welche einem aus $3n-6$ Stäben zusammengesetzten System angehören, und l sei die Entfernung dieser zwei Punkte, während $l-\lambda$ die natürliche Länge dieses Stabes ist; λ ist eine mit Rücksicht auf l sehr kleine Grösse und mit einer Dehnung zu vergleichen, welche die Elasticität des Stabes nicht überschreitet.

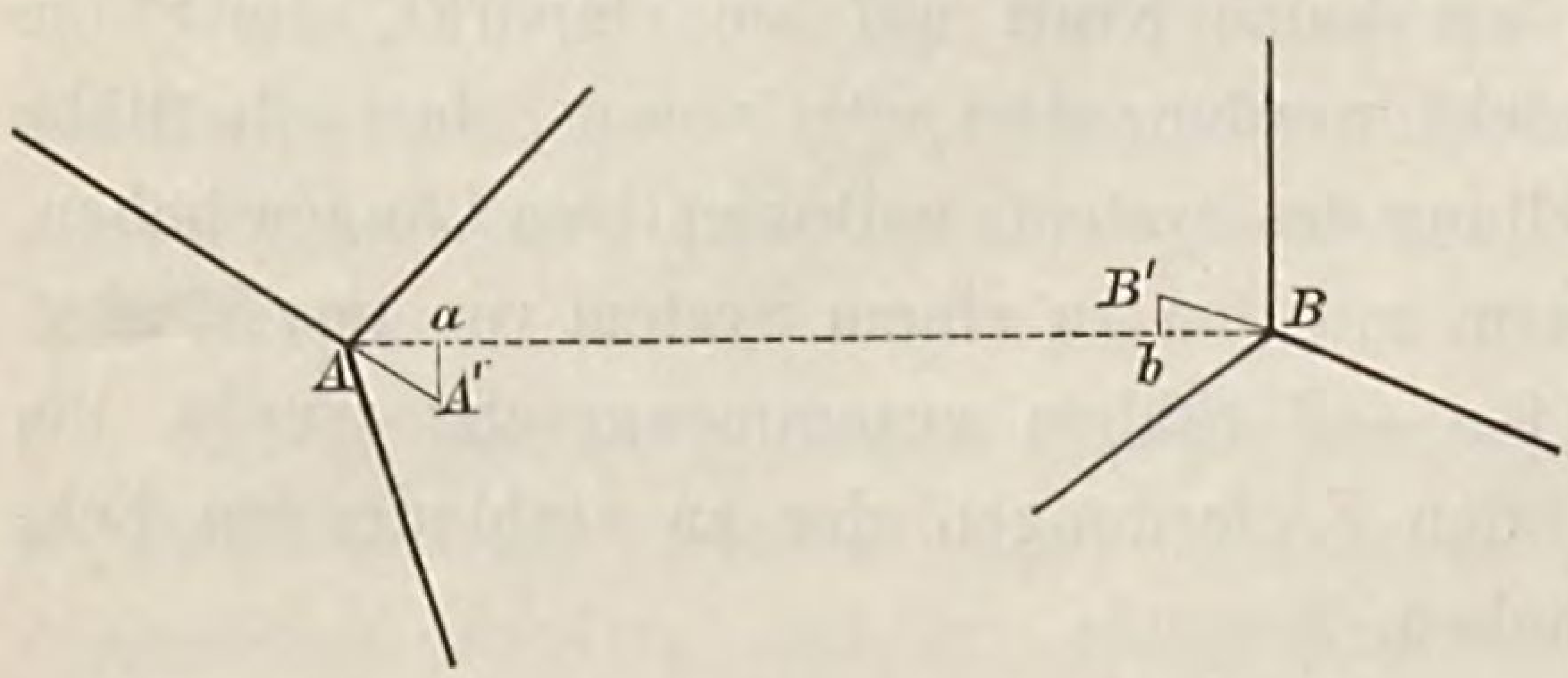


Fig. 5.

Um diesen Stab in das System einzuführen, muss man denselben dehnen und gleichzeitig die zwei Punkte einander nähern, was in allen anderen Stäben Spannungen hervorruft.

Wenn man nach der durch die Einführung der Nebenstäbe entstandenen Deformation äussere Kräfte auf die Eckpunkte einwirken lässt, so wird eine neue Deformation entstehen, und es werden sich die Spannungen der Stäbe ändern.

Es ist klar, dass die Deformation des Systems und die Endspannungen in den Stäben in gleicher Weise entstehen würden, wie es thatsächlich der Fall ist, wenn der Nebenstab AB nicht eingeführt worden wäre, wohl aber in den Punkten A und B zwei Kräfte wirken würden, welche gleich sind der Endspannung T in diesem Stabe, und von welchen eine gegen die andere gerichtet ist.

Die gleiche Untersuchung kann man für alle anderen Nebenstäbe wiederholen. Es folgt aber aus dem Lehrsatze von den Differentialquotienten der Arbeit, dass, wenn man, nachdem die Deformationsarbeit F des auf die alleinigen Hauptstäbe reducirten Systems in einer Function der in den Eckpunkten wirkenden äusseren Kräfte und der als äussere Kräfte betrachteten Spannungen in den Nebenstäben ausgedrückt wurde, deren Differentialquotienten $\frac{dF}{dT}$ mit Bezug auf T nimmt, man die Grösse erhält, um welche sich die zwei Punkte A und B einander genähert haben.

Diese Annäherung der zwei Punkte plus der Verlängerung des Stabes, welche $\frac{T}{\varepsilon}$ ist, gibt die Grösse λ, um welche der Stab bezüglich der ursprünglichen Entfernung der zwei Punkte A und B zu kurz war; dies lässt sich durch folgende Gleichung ausdrücken:

$$\frac{dF}{dT} + \frac{T}{\varepsilon} = \lambda. \tag{19}$$

Man hat daher ebensoviele der obigen ähnliche Gleichungen, als Nebenstäbe vorhanden sind, und wenn man hiezu die $3n - 6$ Gleichungen (12) gibt, so erhält man die gleiche Anzahl Gleichungen, als Stäbe in dem System vorhanden sind, so dass die Spannungen in allen diesen Stäben bestimmt werden können.

Als Ergänzung ist zu beachten, dass man alle Gleichungen, welche jener (19) analog sind, dadurch erhält, dass man die Differentialquotienten der Function

$$F + \Sigma \frac{T^2}{2\,\varepsilon} - \Sigma\, T \lambda$$

gleich Null macht; die Summen Σ beziehen sich nur auf die Nebenstäbe. Nachdem die Function

$$F + \Sigma \frac{T^2}{2\,\varepsilon}$$

die Deformationsarbeit des ganzen Systems ausdrückt, so folgt daraus, dass *die Spannungen in den Stäben nach der Deformation diejenigen sind, welche die Deformationsarbeit des Systems zu einem Minimum machen, aber noch vermindert um die Summe der Producte $T\lambda$ für alle Nebenstäbe; hiebei sind die $3\,n - 6$ Gleichungen (12) zwischen den Spannungen der Stäbe zu berücksichtigen.*

17. Zusatz. — Wenn die Differenzen λ gleich Null sind, d. h. wenn die Nebenstäbe genau jene Längen haben, welche nothwendig sind, um sie in das System einführen zu können, ohne schon vor Einwirkung äusserer Kräfte darin Spannungen hervorzurufen, so erkennt man, dass der Ausdruck $\Sigma\, T\lambda$ Null sein wird, und dass somit die Function, welche zu einem *Minimum* werden soll, indem sie den $3\,n - 6$ Gleichungen Genüge thut, einfach die Deformationsarbeit des Systems sein wird, d. h.

$$F + \Sigma \frac{T^2}{2\,\varepsilon}.$$

Man findet also neuerdings den Lehrsatz *von der kleinsten Arbeit.*

18. Einfluss der Aenderungen der Temperatur. — Das Problem, welches in Nummer 16 aufgelöst wurde, findet seine unmittelbare Anwendung bei der Bestimmung der Veränderungen der Spannungen in den Stäben eines gegliederten Systems in Folge von Aenderungen der Temperatur.

Wird ein gegliedertes System vorausgesetzt, auf dessen Eckpunkte gegebene Kräfte einwirken, und welches sich bezüglich der Temperatur in einem beliebigen Zustande befindet, so kann man offenbar behufs Bestimmung der Spannungen in den Stäben während dieses Zustandes in folgender Weise vorgehen.

Wird zuerst angenommen, dass alle äusseren Kräfte und alle Nebenstäbe entfernt wären, so ergibt sich ein System, welches nur aus Hauptstäben zusammengesetzt ist, wobei in denselben keine Spannungen auftreten. Die Entfernungen der Punkte dieses Systems und die natürlichen Längen der Nebenstäbe bei der vorausgesetzten Temperatur bleiben vollkommen bestimmt, so zwar, dass die kleine Grösse λ bekannt ist, um welche jeder der Nebenstäbe mit Rücksicht auf die Entfernung der zu verbindenden Punkte zu kurz ist.

Um nunmehr die Endspannungen zu bestimmen, welche in dem gegebenen System stattfinden, muss man sich in das auf die Hauptstäbe reducirte System die Nebenstäbe eingefügt denken und schliesslich die gegebenen Kräfte auf die Eckpunkte einwirken lassen.

Man sieht also, dass man hiedurch auf das in Nummer 16 gelöste Problem geführt wird.

19. Summirung der Wirkungen. — Wir werden sehen, dass in den Fragen über die Elasticität das Princip der Summirung der Wirkungen immer stattfindet; der grösseren Deutlichkeit halber wollen wir aber zwei Fälle besonders behandeln.

1. Zuerst sei vorausgesetzt, dass es sich um ein System handelt, in welchem vor Einwirkung äusserer Kräfte keine Spannungen vorhanden sind.

In Nummer 8 wurde gesehen, dass in diesem Falle die Spannungen in den Stäben durch die Auflösungen der zwei Systeme von Gleichungen (12) und (13) gegeben sind; nachdem alle diese Gleichungen nur lineare Grössen der Spannungen und der äusseren Kräfte enthalten, so folgt daraus, dass die ersteren auch nur lineare Functionen der zweiten sind.

Nennt man also T die Spannung in einem Stabe und $P, Q, R \ldots\ldots$ die in den Eckpunkten des Systems wirkenden Kräfte, so hat man

$$T = \alpha P + \beta Q + \gamma R + \ldots\ldots$$

wobei $\alpha, \beta, \gamma \ldots\ldots$ constante Coëfficienten sind.

Wenn man nun an Stelle der Kräfte $P, Q, R \ldots\ldots$ in denselben Punkten und in denselben Richtungen die Kräfte $P+p, Q+q, R+r \ldots\ldots$ wirken lässt, und wenn man $T+t$ die Spannung in dem oben betrachteten Stabe nennt, so hat man

$$T + t = \alpha(P+p) + \beta(Q+q) + \gamma(R+r) + \ldots\ldots,$$

woraus sich bei Berücksichtigung des Werthes von T

$$t = \alpha p + \beta q + \gamma r + \ldots..$$

ergibt, d. h. es ist die Spannung, welche ein Stab unter dem Einflusse der auf ein System wirkenden Kräfte $P + p$, $Q + q$, $R + r$ etc. erleidet, gleich der Summe der Spannungen, welche derselbe unter der alleinigen Wirkung der Kräfte $P, Q, R \ldots..$ und jener der Kräfte $p, q, r \ldots..$ hat.

Man sieht also, dass das Princip der Summirung der Wirkungen stattfindet, und dass man daher die Wirkungen der auf ein System thätigen, verschiedenen Kräfte getrennt von einander untersuchen kann und sie sodann nur zu addiren hat, um die Wirkung zu erhalten, welche alle Kräfte hervorgerufen hätten, wenn dieselben gleichzeitig thätig gewesen wären.

2. Nunmehr betrachten wir jenen Fall, in welchem die Stäbe in ihrem natürlichen Zustande nicht die für die Zusammensetzung des Systems genau nothwendigen Längen haben, d. h. in welchem in dem System selbst vor Einwirkung äusserer Kräfte Spannungen oder Compressionen stattfinden.

Aus dem Vorhergehenden ist zu ersehen, dass man ebensoviele Gleichungen, ähnlich jenen unter (19) hat, als Nebenstäbe in dem System vorhanden sind.

Die Function F, welche in dieser Gleichung vorkommt, und welche die Deformationsarbeit der Hauptstäbe ausdrückt, ist eine Summe von der Form

$$\frac{1}{2} \Sigma \frac{T^2}{\varepsilon},$$

wobei sich diese Summe nur auf die Hauptstäbe erstreckt. Mit Hilfe der Gleichungen (12) kann man die Spannungen dieser Stäbe durch lineare Functionen der äusseren Kräfte und der Spannungen in den Nebenstäben ausdrücken; hieraus folgt, dass obige Summe in einer Function zweiten Grades der Spannungen in den Nebenstäben und der äusseren Kräfte ausgedrückt werden kann, und dass daher alle Differentialquotienten von $\frac{dF}{dT}$ lineare Functionen dieser Grössen sind.

Indem man das System von Gleichungen, welche jener unter (19) analog sind, auflöst, um die Spannungen in den nebensächlichen Stäben zu bestimmen, erhält man für diese Spannungen und in Folge dessen

auch für diejenigen der Hauptstäbe mit Hilfe der Gleichungen (12) lineare Functionen der äusseren Kräfte und der Grössen λ.

Ist nun T die Spannung in irgend einem Stabe, sind P, Q, R etc. die in den Eckpunkten wirkenden äusseren Kräfte und λ_1, λ_2, λ_3 etc. die Werthe der kleinen Grössen λ, so hat man

$$T = \alpha P + \beta Q + \gamma R + \ldots\ldots$$
$$+ \alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2 + \alpha_3 \lambda_3 + \ldots\ldots,$$

wobei α, β, γ, α_1, α_2, α_3 constante Coëfficienten sind.

Wenn man hingegen T_1 die Spannung nennt, welche der betrachtete Stab nach Einführung aller Nebenstäbe, aber vor Einwirkung der äusseren Kräfte hat, so erhält man den Werth von T_1 offenbar dadurch, dass man $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$ etc. macht; man hat also

$$T_1 = \alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2 + \alpha_3 \lambda_3 + \ldots\ldots$$

Nennt man ferner T_2 die Spannung, welche der unter der Einwirkung der äusseren Kräfte befindliche Stab hat — vorausgesetzt, dass jeder Stab genau die zur Zusammensetzung nothwendige Länge hat — so sieht man leicht, dass der Werth von T_2 gefunden wird, indem man $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$ etc. macht, was folgende Gleichung ergibt:

$$T_2 = \alpha P + \beta Q + \gamma R + \ldots\ldots$$

Es kann daher der allgemeine Werth von T in der Form

$$T = T_1 + T_2$$

gegeben werden, wodurch bewiesen wird, dass auch in diesem Falle das Princip der Summirung der Wirkungen Geltung hat.

Hat man also ein gegliedertes System zu untersuchen, bei welchem die Stäbe nicht genau die zu dessen Zusammensetzung nothwendige Länge haben, so zwar, dass schon vor Einwirkung äusserer Kräfte Spannungen auftreten, so kann man die Untersuchung in zwei Theile trennen. Man bestimmt zuerst die Spannungen, welche in dem System vor Einwirkung äusserer Kräfte vorhanden sind, sodann die Spannungen, welche die äusseren Kräfte hervorrufen, wenn in dem System ursprünglich keine Spannungen sind. Man findet demnach für jeden Stab zwei Spannungen, welche vereinigt die effective Spannung des Stabes geben.

20. Beispiel. — Es sei $ABCD$ ein aus sechs Stäben zusammengesetztes gegliedertes Viereck, dessen Stäbe bei der Temperatur t derartige Längen haben, dass, nachdem die zwei Dreiecke ABC und ABD gebildet sind, wodurch die Lage der Punkte C und D bestimmt ist, die Entfernung dieser Punkte genau gleich ist der Länge des dieselben verbindenden Stabes.

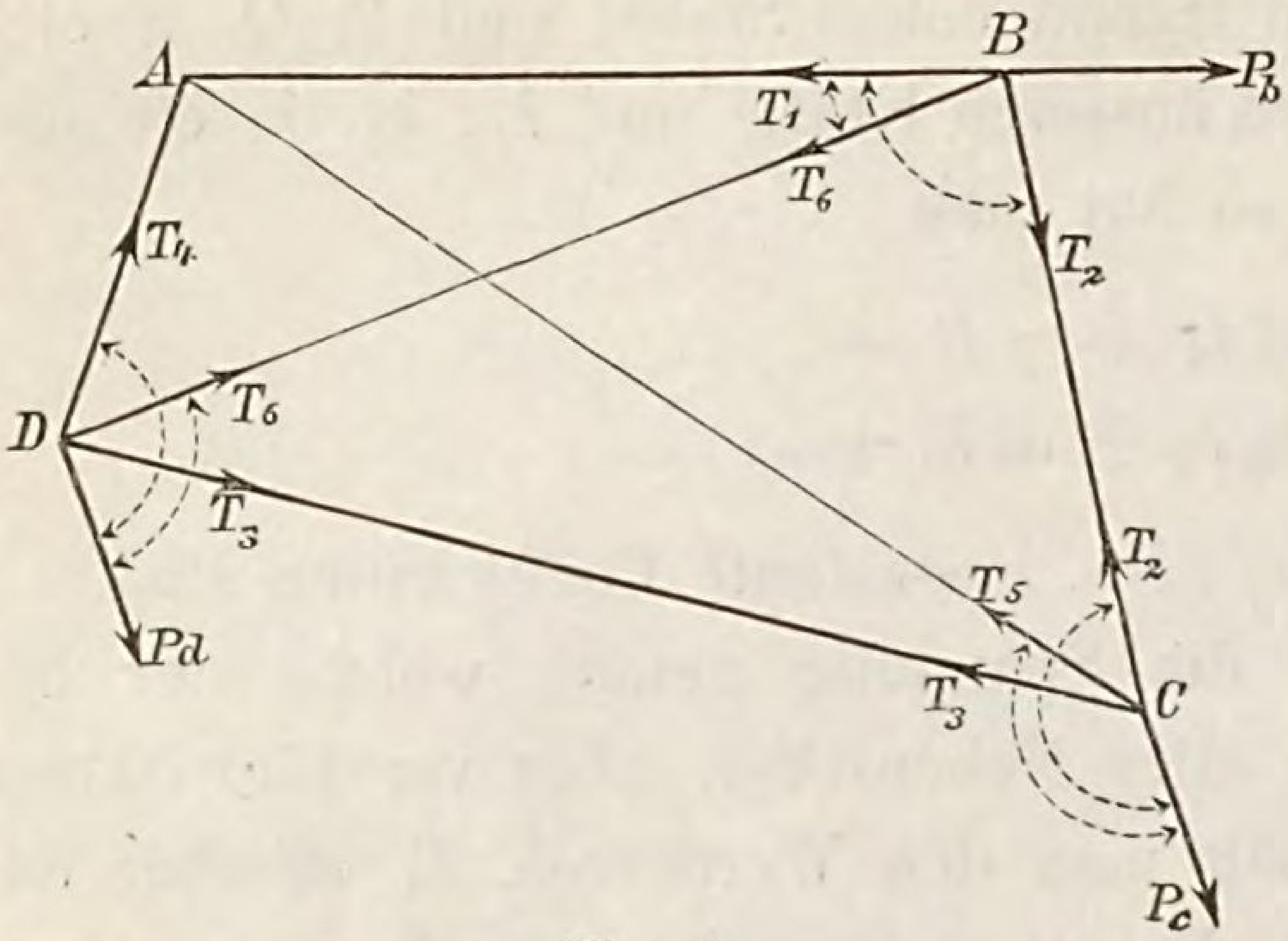


Fig. 6.

Wenn die Stäbe nicht von demselben Materiale sind, oder wenn sich die Temperatur nicht für alle gleichmässig ändert, so wird bei einer anderen Temperatur, nachdem man die beiden Dreiecke ABC und ABD gebildet hat, die Entfernung zwischen den beiden Punkten C und D verschieden sein von der Länge des Stabes, welcher sie verbinden soll, und zwar wird derselbe um ein gewisses Stück, welches wir λ_3 nennen, zu kurz oder zu lang sein, für welch' letzteren Fall λ_3 negativ genommen werden muss.

Diese Grösse lässt sich leicht durch einfache geometrische Berechnung bestimmen. Sobald man dieselbe gefunden hat, kann man die Spannungen in den Stäben, welche der neuen Temperatur entsprechen, berechnen, indem man gleichzeitig die äusseren Kräfte in Rechnung nimmt, denn diese Spannungen müssen nachfolgende Function zu einem *Minimum* machen:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{T_1{}^2}{\varepsilon_1}+\frac{T_2{}^2}{\varepsilon_2}+\frac{T_3{}^2}{\varepsilon_3}+\frac{T_4{}^2}{\varepsilon_4}+\frac{T_5{}^2}{\varepsilon_5}+\frac{T_6{}^2}{\varepsilon_6}\right)-T_3\lambda_3, \qquad (20)$$

sobald man die Bedingungsgleichungen zwischen den Unbekannten berücksichtigt.

Derlei Gleichungen gibt es fünf; denn indem vorausgesetzt wurde, dass der Punkt A fix bleibt und der Punkt B gezwungen ist, auf der Linie AB zu verbleiben, hat man nur eine Gleichung für den Punkt B und je zwei Gleichungen für die Punkte C und D.

Um nun für den Punkt C die Gleichgewichtsgleichungen in der einfachsten Form zu erhalten, kann man zuerst ausdrücken, dass die

Summe der Projectionen der in diesem Punkte zusammenkommenden Kräfte auf eine auf die Diagonale AC senkrechte Linie gleich Null sein muss, und sodann, dass die Summe der Projectionen derselben Kräfte auf eine auf BC senkrechte Linie ebenfalls gleich Null sein muss.

Für das Gleichgewicht um den Punkt D ergeben sich die Bedingungen, dass die Projectionen der in diesem Punkte zusammenkommenden Kräfte auf eine auf die Diagonale BD senkrechte Linie eine Summe gleich Null geben müssen, sowie dass auch die Summe der Projectionen derselben Kräfte auf eine Linie, welche auf die Linie AD senkrecht ist, gleich Null sein muss.

Man erhält also folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
T_1 + T_2 \cos\widehat{ABC} + T_6 \cos\widehat{ABD} - P_b &= 0,\\
T_2 \sin\widehat{ACB} - T_3 \sin\widehat{ACD} - P_c \sin\widehat{ACP_c} &= 0,\\
T_5 \sin\widehat{ACB} + T_3 \sin\widehat{BCD} + P_c \sin\widehat{BCP_c} &= 0,\\
T_4 \sin\widehat{ADB} - T_3 \sin\widehat{BDC} - P_d \sin\widehat{BDP_d} &= 0,\\
T_6 \sin\widehat{ADB} + T_3 \sin\widehat{ADC} + P_d \sin\widehat{ADP_d} &= 0.
\end{aligned}\right\} \quad (21)$$

Die vier letzten Gleichungen geben die Spannungen T_2, T_4, T_5 und T_6 in Functionen von T_3; durch Substitution in die erste erhält man T_1 auch in einer Function von T_3. Die Formel (20) kann demnach in einer Function der einzigen Spannung T_3 ausgedrückt werden, so zwar, dass, wenn man deren Differentialquotienten mit Bezug auf diese Unbekannte gleich Null werden lässt, man eine Gleichung vom ersten Grade erhält, woraus sich die Spannung sodann berechnen lässt.

Hat man die Spannung T_3 in einer Function von λ_3 erhalten, so sind durch die Gleichungen (21) alle anderen Spannungen in Functionen derselben Grösse gegeben.

2. Capitel.

Gefügte Systeme.

1. Definition und Grundbegriffe. — Wir haben bis jetzt die gegliederten Systeme betrachtet, d. h. Systeme, welche aus geraden Stäben zusammengesetzt sind, von welchen jeder einzelne mit den anderen durch Charniere verbunden ist, und zwar an seinen beiden Enden, so dass sich irgend ein Stab um eines dieser Enden frei drehen könnte, wenn das andere frei wäre.

Nunmehr wären die *gefügten Systeme* zu betrachten, d. h. Systeme, welche aus in einander gefügten, festen Körpern zusammengesetzt sind, so dass irgend einer derselben nicht in der Lage ist, sich um eines seiner Enden zu drehen, selbst wenn das andere frei wäre.

Gefügte Systeme werden auch jene genannt, welche sowohl aus festen, in einander gefügten Körpern, als auch aus Stäben zusammengesetzt sind, welche mittelst Charnieren mit einander und mit diesen festen Körpern verbunden sind.

Wir wollen nun den Beweis liefern, dass *der Lehrsatz von den Differentialquotienten der Deformationsarbeit und jener von der kleinsten Arbeit* für die gefügten Systeme ebenso wie für die gegliederten Systeme Geltung hat.

Zuerst ist es aber angezeigt, einige Aufschlüsse über die moleculare Zusammensetzung der Körper zu geben, wie sie im vorliegenden Werke vorausgesetzt werden.

In gleicher Weise, wie dies seitens der Herren Navier, Poisson, Cauchy, Lamé, Barré de Saint-Venant und der Mehrzahl der Physiker geschehen ist, wird angenommen, dass alle Körper aus sehr kleinen Molecülen zusammengesetzt sind, welche von einander durch sehr kleine Intervalle getrennt sind.

Wenn man sagt, dass auf die ganze Masse eines Körpers eine Kraft wirkt, wie z. B. die Schwerkraft, so bedeutet dies, dass auf jedes Molecül

ein Theil dieser Kraft wirkt, und dass dieser Theil proportional zu dessen Masse ist.

Es wird häufig gesagt, dass auf die Oberfläche eines Körpers eine Kraft in der Grösse von p Kilogramm per Quadratmeter vertheilt ist; man will hiemit ausdrücken, dass dem betrachteten Körper ein anderer genähert wurde, dessen Molecüle auf eine äusserst dünne Schichte des ersteren ihren Einfluss üben, so zwar, dass die Resultirende jener Kräfte, welche in einem Elemente ω der Trennungsfläche beider Körper thätig sind, gleich ωp ist.

Diese Betrachtungen zeigen uns, dass ein Körper, welcher, sei es in seiner ganzen Masse, sei es nur in den Molecülen der Oberfläche, durch Kräfte beansprucht wird, als ein System von materiellen Punkten betrachtet werden kann, von welchen jeder durch gewisse Kräfte beansprucht wird.

Ist ein Körper äusseren Kräften nicht unterworfen, so sagt man, er befinde sich in seinem *natürlichen Zustande.*

Befindet sich ein Körper in diesem Zustande, oder ist er unter der Einwirkung von äusseren Kräften im Gleichgewicht, so wird er sich deformiren, wenn neue Kräfte auf ihn einwirken, und die Entfernungen zwischen den Molecülen werden sich ändern. Hiefür wurde folgender Erfahrungssatz gefunden:

Wenn sich zwei Molecüle eines Körpers einander nähern oder sich von einander entfernen, und zwar um eine im Verhältniss zur ursprünglichen Entfernung ihrer Mittelpunkte sehr kleine Grösse, so entwickelt sich in der Verbindungslinie beider Mittelpunkte eine elastische Kraft, welche proportional ist zur Grösse der Entfernung oder Annäherung, und welche anziehend oder abstossend ist, je nachdem sich die beiden Molecüle einander genähert oder sich von einander entfernt haben.

Dieses Gesetz angenommen, lässt sich aus den folgenden Betrachtungen ersehen, dass alle Körper und alle in irgend einer Weise verbundenen Systeme von Körpern als gegliederte Systeme betrachtet werden können, und dass sie daher dieselben Eigenschaften haben.

Wird in einem Körper, welcher sich unter der Einwirkung gewisser Kräfte im Gleichgewicht befindet, ein Molecül V_p betrachtet, so müssen sich offenbar alle auf ihn einwirkenden Kräfte auch im Gleichgewicht

befinden. Bezieht man diesen Körper auf drei rechtwinkelige Achsen, deren Anfangspunkt der Mittelpunkt eines Molecüls ist, deren x-Achse durch ein anderes Molecül geht, und deren xy-Ebene ein drittes Molecül enthält, so kann man x_p, y_p, z_p und x_q, y_q, z_q die Coordinaten zweier beliebiger Molecüle V_p und V_q vor der Deformation nennen, und es werden

$$x_p + \xi_p, \; y_p + \eta_p, \; z_p + \zeta_p$$
$$\text{und } x_q + \xi_q, \; y_q + \eta_q, \; z_q + \zeta_q$$

die Coordinaten derselben Molecüle nach der Deformation sein.

α_{pq}, β_{pq}, γ_{pq} sind dann die Winkel, welche die Strecke $V_p V_q$ vor der Deformation mit den Achsen einschliesst.

Während der Deformation werden sich die zwei Molecüle um die Grösse λ_{pq} weiter entfernen, und ist dieselbe gegeben durch

$$\lambda_{pq} = (\xi_q - \xi_p)\cos\alpha_{pq} + (\eta_q - \eta_p)\cos\beta_{pq} + (\zeta_q - \zeta_p)\cos\gamma_{pq}; \tag{1}$$

die zwischen den beiden Molecülen entstehende elastische Kraft ist

$$T_{pq} = \varepsilon_{pq}\,[(\xi_q - \xi_p)\cos\alpha_{pq} + (\eta_q - \eta_p)\cos\beta_{pq} + (\zeta_q - \zeta_p)\cos\gamma_{pq}], \tag{2}$$

wobei ε_{pq} ein für jedes Paar von Molecülen verschiedener Coëfficient ist.

Nennt man ferner X_p, Y_p, Z_p die zu den Achsen parallelen Componenten der auf das Molecül V_p wirkenden äusseren Kraft, so ergeben sich die drei Gleichgewichtsgleichungen

$$\left.\begin{aligned} X_p + \Sigma\, T_{pq}\cos\alpha_{pq} &= 0, \\ Y_p + \Sigma\, T_{pq}\cos\beta_{pq} &= 0, \\ Z_p + \Sigma\, T_{pq}\cos\gamma_{pq} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Man sieht nun, dass die Gleichungen (1), (2), (3) dieselben sind, wie sie für die gegliederten Systeme erhalten wurden, so zwar, dass man hieraus dieselben Folgerungen ziehen kann, d. h. dass die Principien und Lehrsätze, welche für die gegliederten Systeme bewiesen wurden, auch für die gefügten Systeme Geltung haben. Wir wollen aber demungeachtet diese Principien und Lehrsätze besonders entwickeln, da sich dieselben für die gefügten Systeme in eine für die Anwendung bequemere Form bringen lassen.

2. Princip der Summirung der Wirkungen. — Dasselbe hat für alle Körper und Systeme von Körpern Anwendung, und zwar in der Weise, dass die durch mehrere äussere Kräfte auf einen Körper oder ein System von Körpern hervorgerufene Wirkung gleich ist der Summe

der Wirkungen, welche die einzelnen Kräfte hervorrufen würden, falls sie einzeln thätig wären.

Dieses sehr wichtige Princip kann auch in anderer Weise ausgedrückt werden, indem man sagt, dass *die Verrückungen der verschiedenen Punkte, sowie die inneren oder elastischen Kräfte lineare Functionen der äusseren Kräfte sind.*

Man muss aber beachten, dass dieses Princip nur so lange Geltung hat, als die gesammte Entfernung oder Annäherung irgend zweier Molecüle noch sehr klein ist im Verhältniss zur ursprünglichen Distanz ihrer Mittelpunkte, denn ohne diese Voraussetzung ist es nicht gestattet, in den Gleichungen (1), (2), (3) die Winkel, welche die Verbindungslinien der Molecüle vor ihrer Deformation mit den Achsen einschliessen, statt jener einzusetzen, welche sie nach der Deformation bilden.

3. Eigenschaft der Deformationsarbeit. — *Für alle Körper oder Systeme von Körpern, welche der Einwirkung von beliebigen, in unendlich kleinen Abstufungen von Null bis zu ihren Endwerthen wachsenden Kräften unterworfen werden, bleibt die Deformationsarbeit dieselbe, wie auch das Gesetz sei, nach welchem diese Kräfte wachsen.*

Multiplicirt man die Formel (2) aus Nummer 1 mit $\frac{1}{2} T_{pq}$ und vereinigt man sodann die für alle Paare von Molecülen analogen Gleichungen, indem man alle Ausdrücke vereinigt, welche dieselbe Verrückung enthalten, und indem man die Gleichungen (3) berücksichtigt, wie dies in Nummer 10 des ersten Capitels für die gegliederten Systeme geschehen ist, so erhält man als Ausdruck für die Deformationsarbeit folgende Formel:

$$\frac{1}{2} \Sigma (X_p \xi_p + Y_p \eta_p + Z_p \zeta_p). \tag{4}$$

Hieraus ergibt sich die oben angeführte Eigenschaft, denn die Verrückungen ξ_p, η_p, ζ_p sind nur von den Endwerthen der äusseren Kräfte abhängig.

Nennt man wie in Nummer 10 des ersten Capitels R_p die Resultirende der Kräfte X_p, Y_p, Z_p und r_p die relative Verrückung des Angriffspunktes dieser Resultirenden, d. h. die Projection der Verrückung

des Angriffspunktes auf die Richtung der Kraft R_p, so hat man wie früher

$$X_p \xi_p + Y_p \eta_p + Z_p \zeta_p = R_p r_p,$$

so dass die Deformationsarbeit des ganzen Systems durch die Formel

$$\frac{1}{2} \Sigma R_p r_p \qquad (5)$$

ausgedrückt wird.

4. Lehrsatz von den Differentialquotienten der Deformationsarbeit. Erster Theil. — *Wenn man die Deformationsarbeit eines elastischen Körpers oder Systems in einer Function der relativen Verrückung der Angriffspunkte der äusseren Kräfte ausdrückt, so erhält man eine Formel, deren Differentialquotienten mit Bezug auf diese Verrückungen die correspondirenden Kräfte geben.*

Zweiter Theil. — *Wenn man andererseits die Deformationsarbeit eines elastischen Körpers oder Systems in einer Function der äusseren Kräfte ausdrückt, so gibt der Differentialquotient dieses Ausdruckes mit Bezug auf eine dieser Kräfte die relative Verrückung ihres Angriffspunktes.*

Für beide Theile dieses Lehrsatzes kann man die Beweisführung in der gleichen Weise durchführen wie für die gegliederten Systeme.

5. Fortsetzung des Lehrsatzes von den Differentialquotienten der Arbeit. — *Wenn man die Deformationsarbeit eines elastischen Körpers oder Systems in einer Function der äusseren Kräfte und der Kräftepaare ausdrückt, so erhält man eine Formel, deren Differentialquotient mit Bezug auf ein Kräftepaar die relative Drehung jener Linie gibt, welche die Angriffspunkte der beiden Kräfte des Paares verbindet.*

Unter einem *Kräftepaar* versteht man das System zweier gleicher, paralleler, entgegengesetzt gerichteter und auf die Verbindungslinie ihrer Angriffspunkte senkrechter Kräfte.

Ferner versteht man unter *relativer Drehung* dieser Linie die Drehung ihrer Projection auf die Ebene des Kräftepaares.

Dies vorausgeschickt, kann dieser Lehrsatz in derselben Weise wie für das gegliederte System bewiesen werden.

6. Erweiterung des Lehrsatzes von den Differentialquotienten der Arbeit. — Wir betrachten nun in einem Körper oder System ein kleines Volumen, dessen Molecüle sich in der allgemeinen Deformation sehr wenig von einander verschieben, so dass man die relativen Verrückungen dieser Molecüle im Verhältnisse zu den absoluten Verrückungen vernachlässigen kann. Durch einen Punkt des betrachteten Volumenelementes führen wir sodann drei rechtwinkelige Achsen, welche vor der Deformation parallel sind zu den fixen Achsen der Coordinaten, auf welche das ganze System bezogen wurde, und nennen X, Y, Z die zu den Achsen parallelen Componenten der in einem beliebigen Molecüle des Systems wirkenden äusseren Kraft und ξ, η, ζ die absoluten Verrückungen dieses Molecüles. Das Differentiale der Deformationsarbeit des ganzen Systems kann, wie bekannt, durch jede der beiden Formeln

$$\Sigma(X\,d\xi + Y\,d\eta + Z\,d\zeta), \tag{6}$$

$$\Sigma(\xi\,dX + \eta\,dY + \zeta\,dZ) \tag{7}$$

ausgedrückt werden, indem man die Summe Σ auf den ganzen Körper oder das ganze System ausdehnt.

Für alle in einem Elemente des betrachteten Volumens enthaltenen Molecüle können die Verrückungen ξ, η, ζ in Functionen von sechs Grössen ausgedrückt werden, denn der Weg dieses Elementes von seiner ursprünglichen Lage in seine Endlage kann auf folgende verschiedene Arten gebildet werden: durch eine geradlinige Bewegung und eine Drehung; oder durch drei geradlinige Bewegungen ξ_0, η_0, ζ_0 parallel zu den drei fixen Achsen, auf welche man das ganze System bezogen hat, und welche den Anfangspunkt der mobilen Achsen in dessen Endlage bringen; oder endlich durch drei Drehungen θ_x, θ_y, θ_z um diese drei mobilen Achsen, auf welche man das Volumenelement bezieht.

Nennt man x, y, z die Coordinaten eines Molecüles des betrachteten Elementes in Bezug auf die mobilen Achsen, so lassen sich die absoluten Verrückungen mit Hilfe folgender Formeln ausdrücken.

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \xi_0 + z\,\theta_y - y\,\theta_z, \\ \eta &= \eta_0 + x\,\theta_z - z\,\theta_x, \\ \zeta &= \zeta_0 + y\,\theta_x - x\,\theta_y. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Deren Differentiale sind:

$$\left.\begin{aligned} d\,\xi &= d\,\xi_0 + z\,d\,\theta_y - y\,d\,\theta_z, \\ d\,\eta &= d\,\eta_0 + x\,d\,\theta_z - z\,d\,\theta_x, \\ d\,\zeta &= d\,\zeta_0 + y\,d\,\theta_x - x\,d\,\theta_y, \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

denn die Coordinaten x, y, z des betrachteten Molecüles sind bezüglich der mobilen Achsen constant.

Man erhält also für dieses Molecül

$$X\,d\,\xi + Y\,d\,\eta + Z\,d\,\zeta =$$
$$X d\xi_0 + Y d\eta_0 + Z d\zeta_0 + (Z y - Y z)\,d\,\theta_x + (X z - Z x)\,d\,\theta_y + (Y x - X y)\,d\,\theta_z$$

und
$$\xi\,d\,X + \eta\,d\,Y + \zeta\,d\,Z =$$
$$\xi_0\,d\,X + \eta_0\,d\,Y + \zeta_0\,d\,Z + (y\,d\,Z - z\,d\,Y)\,\theta_x + (z\,d\,X - x\,d\,Z)\,\theta_y$$
$$+ (x\,d\,Y - y\,d\,X)\,\theta_z.$$

Wir nennen nun $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ die auf das in Betracht gezogene Element entfallenden Summen der Componenten X, Y, Z der auf alle Molecüle wirkenden äusseren Kräfte und M_x, M_y, M_z die Summen der Momente $Z\,y - Y\,z$, $X\,z - Z\,x$, $Y\,x - X\,y$ dieser Kräfte in Bezug auf die mobilen Achsen. Nachdem die Coordinaten x, y, z diejenigen vor der Deformation sind, so können sie für jedes Molecül des Elementes als constant betrachtet werden und man erhält

$$y\,d\,Z - z\,d\,Y = d\,(Z\,y - Y\,z) \text{ etc.};$$

die Summen der sechs Grössen $d\,X$, $d\,Y$, $d\,Z$, $y\,d\,Z - z\,d\,Y$, $z\,d\,X - x\,d\,Z$, $x\,d\,Y - y\,d\,X$ sind daher folgende:

$$d\,\mathfrak{X},\ d\,\mathfrak{Y},\ d\,\mathfrak{Z},\ d\,M_x,\ d\,M_y,\ d\,M_z.$$

Die Summen der Grössen

$$X\,d\,\xi + Y\,d\,\eta + Z\,d\,\zeta,$$
$$\xi\,d\,X + \eta\,d\,Y + \zeta\,d\,Z,$$

auf alle Molecüle des betrachteten Elementes bezogen, sind:

$$\mathfrak{X}\,d\,\xi_0 + \mathfrak{Y}\,d\,\eta_0 + \mathfrak{Z}\,d\,\zeta_0 + M_x\,d\,\theta_x + M_y\,d\,\theta_y + M_z\,d\,\theta_z, \qquad (10)$$

$$\xi_0\,d\,\mathfrak{X} + \eta_0\,d\,\mathfrak{Y} + \zeta_0\,d\,\mathfrak{Z} + \theta_x\,d\,M_x + \theta_y\,d\,M_y + \theta_z\,d\,M_z. \qquad (11)$$

Die Summe (6), welche das Differentiale der als Function der relativen Verrückung der äusseren Kräfte betrachteten Deformationsarbeit

des Körpers oder Systems gibt, enthält die Differentiale $d\xi_0$, $d\eta_0$, $d\zeta_0$, $d\theta_x$, $d\theta_y$, $d\theta_z$, da diese Summe auch die Formel (10) enthält; in gleicher Weise enthält die Summe (7), welche das Differentiale der als Function der äusseren Kräfte betrachteten Deformationsarbeit gibt, die Differentiale $d\mathfrak{X}$, $d\mathfrak{Y}$, $d\mathfrak{Z}$, dM_x, dM_y, dM_z nur aus dem Grunde, weil sie die Formel (11) enthält.

Hieraus ergeben sich die zwei folgenden Lehrsätze:

1. Die Resultirenden $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ und die resultirenden Momente M_x, M_y, M_z sind die Differentialquotienten der Deformationsarbeit des Systems mit Bezug auf die Verrückungen ξ_0, η_0, ζ_0 und die Drehungen θ_x, θ_y, θ_z.

2. Die drei Verrückungen ξ_0, η_0, ζ_0 und die drei Drehungen θ_x, θ_y, θ_z sind die Differentialquotienten der Deformationsarbeit des Systems mit Bezug auf die Resultirenden $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ und die resultirenden Momente M_x, M_y, M_z.

7. Zusatz. — Wir betrachten nun ein ebenes Element ω auf der Oberfläche eines Körpers oder Systems, welches man auch nach der Deformation des Körpers oder Systems als solches sich denken kann.

Wenn man sagt, dass eine Kraft nur auf die Oberfläche eines Körpers wirkt, so will man damit ausdrücken, dass sie nur auf eine sehr dünne Schichte von Molecülen nahe an der Oberfläche wirkt; wir nehmen nun an, dass die Dimensionen der Fläche ω im Verhältniss zu jenen des Körpers oder Systems sehr klein sind, hingegen sehr gross im Verhältniss zu der sehr geringen Dicke der oberflächlichen Schichte.

Auf das sehr niedrige Prisma, welches zur Grundfläche das Oberflächenelement ω und zur Höhe die Dicke dieser Schichte hat, kann man die beiden vorangehenden Lehrsätze anwenden, denn wenn auch die auf dieses Prisma wirkenden Kräfte derartige sind, von welchen man sagt, dass sie auf das Flächenelement ω wirken, so erkennt man doch, dass sich diese Lehrsätze ebensowohl auf ein Flächenelement, als auch auf ein Körperelement anwenden lassen.

Wenn es sich um ein Flächenelement handelt, so wird im Allgemeinen dessen Schwerpunkt als Anfangspunkt der Coordinaten, die Normale als x-Achse und die Trägheitshauptachsen als y- und z-Achse genommen. θ_x ist sodann die Drehung der Fläche ω um deren Schwer-

punkt und wird *Torsionswinkel* genannt; θ_y und θ_z sind die Drehungen derselben Fläche um die beiden Trägheitshauptachsen und werden *Flexionswinkel* genannt. Desgleichen ist M_x das Moment der auf die Fläche ω wirkenden Kräfte, und sucht dasselbe diese Fläche um die x-Achse, d. h. um den Schwerpunkt zu drehen; dieses Moment wird *Torsionsmoment* genannt. M_y und M_z hingegen sind die Momente, welche die Fläche ω um deren Trägheitshauptachsen zu drehen suchen, und werden *Flexionsmomente oder Biegungsmomente* genannt.

8. Lehrsatz von der kleinsten Arbeit. — Wenn die Gleichungen (2) und (3), welche in Nummer 1 des gegenwärtigen Capitels gegeben wurden, in gleicher Weise behandelt werden, wie dies in Nummer 13 und 14 des ersten Capitels geschehen ist, so gelangt man zu folgendem Lehrsatze, welcher jener *von der kleinsten Arbeit* genannt wird.

Die elastischen Kräfte, welche nach der Deformation des Körpers oder Systems zwischen den Molecülpaaren auftreten, sind jene, welche die Deformationsarbeit zu einem Minimum machen, insoferne man jene Bedingungsgleichungen berücksichtigt, welche ausdrücken, dass zwischen diesen Kräften um jedes Molecül Gleichgewicht herrscht.

Dieser Lehrsatz hat eine grosse Wichtigkeit.

Es empfiehlt sich aber, hier einige Betrachtungen anzuschliessen, um dessen Gebrauch zu zeigen, denn es ist klar, dass man nicht wie für die gegliederten Systeme für jeden Eckpunkt, d. h. für jedes Molecül die drei Gleichgewichtsgleichungen aufstellen kann.

Im Allgemeinen tritt für Körper oder Systeme der Fall ein, dass die Unbekannten, welche man kennen muss, um den Werth der elastischen Kraft in einem beliebigen Punkte zu finden, entweder die resultirenden Kräfte und Momente der zwischen gewissen inneren ebenen Flächen thätigen Molecularkräfte oder aber die Reactionen der besonderen Bedingungen unterworfenen Punkte oder Flächen sind. Die Deformationsarbeit des Systems kann in einer Function dieser Unbekannten ausgedrückt werden. Hat man zwischen diesen einige Bedingungsgleichungen, so kann man sich derselben bedienen, um in dem Ausdrucke für die Arbeit eine gleiche Anzahl von Unbekannten zu eliminiren. Die verbleibenden Unbekannten, welche Functionen der Molecularkräfte sind, dienen sodann dazu, die Spannung in irgend einem beliebigen Punkte des Körpers oder

Systems auszudrücken, d. h. um die elastischen Kräfte zwischen allen Paaren von Molecülen zu bestimmen; nachdem diese elastischen Kräfte die Deformationsarbeit des Systems zu einem Minimum machen müssen, folgt daraus, dass das Gleiche auch für die Werthe der Unbekannten, in deren Functionen man diese Arbeit ausgedrückt hat, eintreffen muss.

Man kann nun den Lehrsatz von der kleinsten Arbeit in einer viel allgemeineren Weise ausdrücken, indem man sagt, *dass, welches auch die unbekannten Grössen sind, in deren Functionen man die Deformationsarbeit eines Systems ausgedrückt hat, die Werthe, welche dieselben nach der Deformation des Systems haben, derartige sind, dass sie unter Berücksichtigung der zwischen ihnen stattfindenden Bedingungsgleichungen diese Arbeit zu einem Minimum machen.*

3. Capitel.

Allgemeine Gleichungen des Elasticitätsgleichgewichtes fester Körper.

1. Deformation der Körper. — Wir betrachten nun einen Körper in seinem natürlichen Zustande und beziehen denselben auf drei rechtwinkelig auf einander stehende Achsen, deren Anfangspunkt mit einem Molecül des Körpers zusammenfällt, deren x-Achse durch dieses Molecül selbst und durch ein anderes geht, und deren xy-Ebene diese zwei und ein drittes Molecül enthält.

Von diesem Körper fassen wir ein parallelopipedisches Element ins Auge, dessen Kanten Δx, Δy, Δz parallel zu den drei Achsen sind, und welches eine sehr grosse Anzahl von Molecülen enthält, welch' letztere aber alle sehr klein sind.

Wirkungs- oder Actionssphäre eines Molecüles nennen wir jene Sphäre, welche ihren Mittelpunkt in diesem Molecül hat, und welche alle Molecüle umfasst, auf welche ersteres seine Wirkung ausübt. Der Halbmesser dieser Sphäre ist mit der Molecularentfernung vergleichbar und daher sehr klein.

Die Kanten Δx, Δy, Δz des elementaren Parallelopipedons sind, wenn auch sehr klein, dennoch verhältnissmässig gross in Bezug auf den Halbmesser der Actionssphäre der Molecüle, so zwar, dass, wenn man auf der Oberfläche des Parallelopipedons eine Schichte betrachtet, welche diesen Halbmesser zur Höhe hat, das Volumen derselben im Vergleich zu jenem des Parallelopipedons verschwindend klein ist.

Lässt man auf den in Betracht gezogenen Körper irgend welche Kräfte einwirken, so wird sich derselbe deformiren, und dessen Molecüle werden sich verschieben. Die von Lamé und von Barré de Saint-Venant gewählten Bezeichnungen beibehaltend, nennen wir u, v, w die Verrückungen parallel zu den Achsen eines beliebigen Molecüles, dessen ursprüngliche Coordinaten x, y, z sind. Diese Verrückungen sind Functionen der Coordinaten.

Dies vorausgesetzt, nehmen wir nun in dem sehr kleinen Parallelopipedon eine Strecke an, welche die Länge r hat, die Mittelpunkte zweier Molecüle verbindet und mit den Achsen die Winkel α, β, γ einschliesst. Die ursprünglichen Coordinaten des einen dieser Molecüle sind x, y, z, die des anderen

$$x + r\cos\alpha, \qquad y + r\cos\beta, \qquad z + r\cos\gamma.$$

Da die Verrückungen des ersten Molecüles parallel zu den Achsen u, v, w sind, so werden, wenn man jene Ausdrücke vernachlässigt, welche Werthe der Grössen $r\cos\alpha$, $r\cos\beta$ und $r\cos\gamma$ vom höheren als vom ersten Grade enthalten, die Verrückungen des zweiten Molecüles folgende sein:

$$\left.\begin{aligned} u' &= u + \frac{du}{dx} r\cos\alpha + \frac{du}{dy} r\cos\beta + \frac{du}{dz} r\cos\gamma, \\ v' &= v + \frac{dv}{dx} r\cos\alpha + \frac{dv}{dy} r\cos\beta + \frac{dv}{dz} r\cos\gamma, \\ w' &= w + \frac{dw}{dx} r\cos\alpha + \frac{dw}{dy} r\cos\beta + \frac{dw}{dz} r\cos\gamma. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

2. Specifische Dehnung. — Die totale Verlängerung der Strecke r wird durch nachstehende Formel ausgedrückt:

$$(u' - u)\cos\alpha + (v' - v)\cos\beta + (w' - w)\cos\gamma. \tag{2}$$

Die Verlängerung derselben per Längeneinheit, d. i. *die specifische Dehnung des festen Körpers im Punkte* (x, y, z) *in der Richtung* (α, β, γ) ist sodann gleich der totalen Verlängerung, getheilt durch die ursprüngliche Länge. Nennt man also die oben definirte Dehnung ∂_r und setzt für $u' - u$, $v' - v$, $w' - w$ die durch die Formel (2) gegebenen Werthe ein, so ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} \partial_r = \frac{du}{dx}\cos^2\alpha + \frac{dv}{dy}\cos^2\beta + \frac{dw}{dz}\cos^2\gamma + \left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\right)\cos\beta\cos\gamma \\ + \left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}\right)\cos\gamma\cos\alpha + \left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right)\cos\alpha\cos\beta. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Durch successive Anwendung dieser Formel auf die drei zur x-, y- und z-Achse parallelen Richtungen erhält man die drei correspondirenden specifischen Dehnungen

$$\partial_x = \frac{du}{dx}, \qquad \partial_y = \frac{dv}{dy}, \qquad \partial_z = \frac{dw}{dz}. \tag{4}$$

Hieraus folgt, dass die drei Kanten des Parallelopipedons nach der Deformation die Längen

$$(1+\partial_x)\Delta x, \qquad (1+\partial_y)\Delta y, \qquad (1+\partial_z)\Delta z$$

haben werden, und dass bei Vernachlässigung der Producte je zweier Dehnungen dessen Volumen

$$(1+\partial_x+\partial_y+\partial_z)\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$$

sein wird, woraus sich die Vergrösserung des Volumens mit

$$(\partial_x+\partial_y+\partial_z)\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$$

ergibt; die cubische specifische Dehnung, welche wir θ nennen wollen, d. h. die Dehnung auf die Volumeinheit bezogen, ist daher

$$\theta=\partial_x+\partial_y+\partial_z=\frac{d\,u}{d\,x}+\frac{d\,v}{d\,y}+\frac{d\,w}{d\,z}. \qquad (5)$$

3. Verschiebung. — Wir betrachten nun in dem Parallelopipedon ein drittes Molecül, welches eine derartige Lage hat, dass vor der Deformation die Verbindungslinie s dieses Molecüles mit dem ersten Molecül senkrecht ist auf der Strecke r, welche das erste Molecül mit dem zweiten verbindet.

Der Winkel, welchen die beiden Strecken r und s einschliessen, sei nach der Deformation ein spitzer und dessen Cosinus gleich dem Sinus der Abnahme des rechten Winkels oder auch dieser Abnahme selbst, nachdem es sich um einen sehr kleinen Winkel handelt.

Diese Abnahme ist die Summe zweier kleiner Grössen, um welche der rechte Winkel kleiner geworden wäre, wenn jede der beiden Strecken r und s für sich die Richtung geändert hätte, während die Richtung der anderen dieselbe geblieben wäre.

Um also die Grösse zu bestimmen, um welche der rechte Winkel kleiner wird, wenn die Strecke r allein die Richtung ändert, muss man die drei Verrückungen des Endpunktes dieser Strecke auf die ursprüngliche Richtung der Strecke s projiciren und die Summe der drei Projectionen durch die Endlänge der Strecke r dividiren oder auch durch die ursprüngliche Länge selbst, indem man die Grössen zweiten Grades gegenüber jenen des ersten Grades vernachlässigt. Nennt man α', β', γ' die Winkel, welche die Strecke s mit den Achsen bildet, so hat man folgende Formel, um den oben bezeichneten kleinen Winkel auszudrücken:

$$\left(\frac{d\,u}{d\,x}\cos\alpha + \frac{d\,u}{d\,y}\cos\beta + \frac{d\,u}{d\,z}\cos\gamma\right)\cos\alpha'$$
$$+\left(\frac{d\,v}{d\,x}\cos\alpha + \frac{d\,v}{d\,y}\cos\beta + \frac{d\,v}{d\,z}\cos\gamma\right)\cos\beta'$$
$$+\left(\frac{d\,w}{d\,x}\cos\alpha + \frac{d\,w}{d\,y}\cos\beta + \frac{d\,w}{d\,z}\cos\gamma\right)\cos\gamma'.$$

Die Grösse, um welche der rechte Winkel abnehmen würde, wenn nur die Strecke s ihre Richtung geändert hätte, wird durch die vorhergehende Formel ausgedrückt, indem man darin die Winkel α, β, γ in α', β', γ' und umgekehrt ändert; man erhält somit:

$$\left(\frac{d\,u}{d\,x}\cos\alpha' + \frac{d\,u}{d\,y}\cos\beta' + \frac{d\,u}{d\,z}\cos\gamma'\right)\cos\alpha$$
$$+\left(\frac{d\,v}{d\,x}\cos\alpha' + \frac{d\,v}{d\,y}\cos\beta' + \frac{d\,v}{d\,z}\cos\gamma'\right)\cos\beta$$
$$+\left(\frac{d\,w}{d\,x}\cos\alpha' + \frac{d\,w}{d\,y}\cos\beta' + \frac{d\,w}{d\,z}\cos\gamma'\right)\cos\gamma.$$

Indem man die Summe dieser zwei Ausdrücke bildet, erhält man für die Abnahme des ursprünglich rechten Winkels folgende Formel:

$$\begin{aligned} g_{rs} = {} & 2\frac{d\,u}{d\,x}\cos\alpha\cos\alpha' + 2\frac{d\,v}{d\,y}\cos\beta\cos\beta' + 2\frac{d\,w}{d\,z}\cos\gamma\cos\gamma' \\ & + \left(\frac{d\,v}{d\,z} + \frac{d\,w}{d\,y}\right)(\cos\beta\cos\gamma' + \cos\beta'\cos\gamma) \\ & + \left(\frac{d\,w}{d\,x} + \frac{d\,u}{d\,z}\right)(\cos\gamma\cos\alpha' + \cos\gamma'\cos\alpha) \\ & + \left(\frac{d\,u}{d\,y} + \frac{d\,v}{d\,x}\right)(\cos\alpha\cos\beta' + \cos\alpha'\cos\beta). \end{aligned} \tag{6}$$

Diese Grösse g_{rs} werden wir *Verschiebung* nennen, und lässt sich dieselbe von zwei verschiedenen Seiten ins Auge fassen; denn da man ein Rechteck hat, dessen zwei Seiten die Strecken r und s sind, so sieht man, dass dieses Rechteck nach der Deformation ein Rhombus sein wird, und man kann sagen, dass diese Deformation sowohl durch die Verschiebung der zwei Seiten r, als auch der zwei Seiten s gegen einander

entstanden ist; aber in beiden Fällen wird der Cosinus des Winkels zwischen den Strecken r und s nach der Deformation das Mass für die Verschiebung sein. Wendet man die Formel (6) auf den Fall an, wo die Strecken r und s parallel zu den Achsen sind, indem man sie zuerst parallel zur y- und z-Achse, sodann parallel zur z- und x-Achse und schliesslich parallel zur x- und y-Achse sein lässt, so erhält man

$$g_{yz} = \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}, \qquad g_{zx} = \frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}, \qquad g_{xy} = \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}. \tag{7}$$

Mit Hilfe dieser und jener in vorhergehender Nummer gegebenen Relationen kann man die Ausdrücke ∂_r und g_{rs} in folgender Form schreiben:

$$\left.\begin{aligned} \partial_r = \partial_x \cos^2\alpha + \partial_y \cos^2\beta + \partial_z \cos^2\gamma + g_{yz} \cos\beta \cos\gamma \\ + g_{zx} \cos\gamma \cos\alpha + g_{xy} \cos\alpha \cos\beta, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

$$\left.\begin{aligned} g_{rs} = 2\,\partial_x \cos\alpha \cos\alpha' + 2\,\partial_y \cos\beta \cos\beta' + 2\,\partial_z \cos\gamma \cos\gamma' \\ + g_{yz} (\cos\beta \cos\gamma' + \cos\beta' \cos\gamma) + g_{zx} (\cos\gamma \cos\alpha' + \cos\gamma' \cos\alpha) \\ + g_{xy} (\cos\alpha \cos\beta' + \cos\alpha' \cos\beta). \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Diese Formeln dienen dazu, um die drei specifischen Dehnungen ∂_x, ∂_y, ∂_z und die drei Verschiebungen g_{yz}, g_{zx}, g_{xy} in Functionen der drei specifischen Dehnungen $\partial_{x'}$, $\partial_{y'}$, $\partial_{z'}$ und der drei, auf drei andere rechtwinkelige Achsen bezogenen Verschiebungen $g_{y'z'}$, $g_{z'x'}$, $g_{x'y'}$ auszudrücken. Hiebei ist hauptsächlich jener später sehr nützlich werdende Fall zu prüfen, wo nämlich die x'-Achse mit der x-Achse zusammenfällt, und wo daher die y'- und z'-Achse in die yz-Ebene fallen. Aus nebenstehender Figur lässt sich ersehen, dass in diesem Falle die x-Achse mit der x'-, y'-, z'-Achse die Winkel 0^0, 90^0, 90^0 einschliesst, die y-Achse die Winkel 90^0, $-\beta$, $-(90+\beta)$, und endlich die z-Achse die Winkel 90^0, $90-\beta$, β.

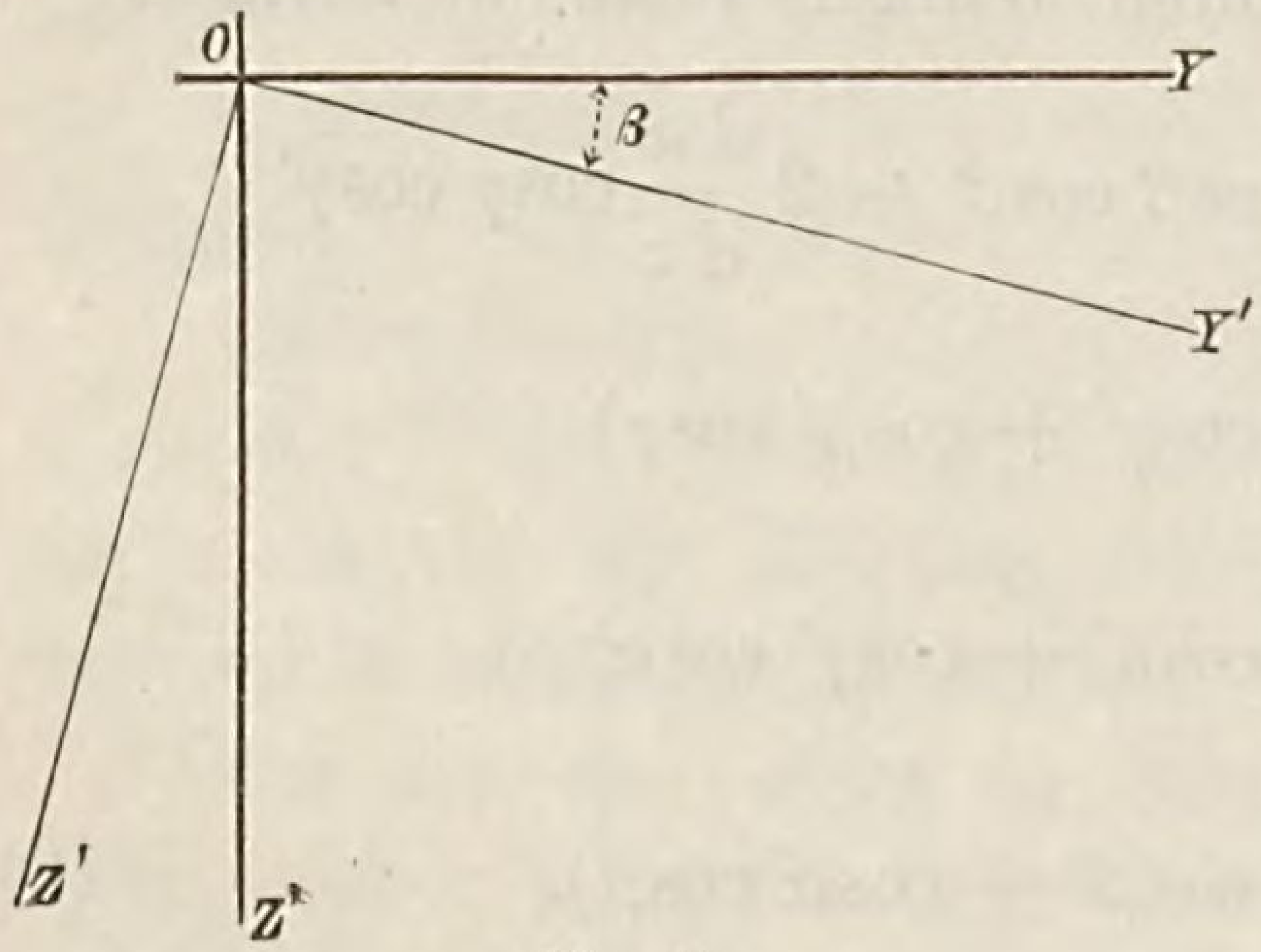


Fig. 7.

Durch Substitution in die Formeln (8) und (9), und nachdem man auf der rechten Seite x, y, z in x', y', z' verwandelt hat, erhält man:

$$\left.\begin{aligned}
\partial_x &= \partial_{x'},\\
\partial_y &= \partial_{y'}\cos^2\beta + \partial_{z'}\sin^2\beta - g_{y'z'}\cos\beta\sin\beta,\\
\partial_z &= \partial_{y'}\sin^2\beta + \partial_{z'}\cos^2\beta + g_{y'z'}\cos\beta\sin\beta,\\
g_{yz} &= 2(\partial_{y'} - \partial_{z'})\cos\beta\sin\beta + g_{y'z'}(\cos^2\beta - \sin^2\beta),\\
g_{zx} &= g_{z'x'}\cos\beta + g_{x'y'}\sin\beta,\\
g_{xy} &= - g_{z'x'}\sin\beta + g_{x'y'}\cos\beta.
\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

4. Deformationsarbeit des sehr kleinen Parallelopipedons. — Nehmen wir in dem elementaren Parallelopipedon, dessen Kanten Δx, Δy, Δz sind, die kleine Strecke r an, welche zwei sehr nahe Molecüle verbindet, so wird diese Strecke bei der Deformation wachsen, und zwar von der ursprünglichen Länge r bis zum Werthe $r(1 + \partial_r)$, und ebenso wird die Spannung zwischen den beiden Molecülen proportional zur specifischen Dehnung zunehmen, so zwar, dass, wenn die angenommene Strecke die Länge $r + \varrho$ hat, wobei ϱ eine Grösse kleiner als $r\,\partial_r$ ist, die Spannung zwischen den beiden Molecülen $\varepsilon\,\varrho$ sein wird; hiebei ist ε ein für jedes Paar von Molecülen constanter Coëfficient, welcher aber für die verschiedenen Paare auch verschieden ist.

Die Deformationsarbeit der Strecke r ist also

$$\int_0^{r\,\partial_r} \varepsilon\,\varrho\,d\varrho = \frac{1}{2}\,\varepsilon\,r^2\,\partial_r^{\,2},$$

und wenn man für ∂_r den durch die Formel (8) gegebenen Werth einsetzt

$$\frac{1}{2}\,\varepsilon\,r^2\,(\partial_x\cos^2\alpha + \partial_y\cos^2\beta + \partial_z\cos^2\gamma + g_{yz}\cos\beta\cos\gamma$$
$$+ g_{zx}\cos\gamma\cos\alpha + g_{xy}\cos\alpha\cos\beta)^2,$$

welcher Ausdruck nach Durchführung des Quadrates und nach Zusammenziehung jener Ausdrücke, welche gleiche Producte von $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ enthalten, schliesslich fünfzehn verschiedene Ausdrücke enthält.

Um die Deformationsarbeit des ganzen Parallelopipedons zu erhalten, muss man die für alle anderen Molecüle analogen Formeln addiren. Strenggenommen muss man eigentlich auch einen Theil der Deformationsarbeit jener Paare von Molecülen hinzufügen, welche eines der Molecüle im Parallelopipedon selbst, das andere ausserhalb desselben haben. Für jedes dieser Paare erhält man einen dem vorhergehenden analogen Aus-

druck; aber da man nur einen Theil der Deformationsarbeit dieser Paare nehmen darf, so kann man diese multiplicirenden Bruchtheile als in der Constanten ε aufgenommen betrachten, so dass die Form des Ausdruckes nicht geändert wird.

Für alle Paare von Molecülen, welche man betrachten muss, um die Deformationsarbeit des Parallelopipedons zu erhalten, ist die Summe der Werthe der Coëfficienten $\varepsilon r^2 \cos^4\alpha$ proportional dem Volumen dieses Elementes. Das Gleiche findet für die anderen Coëfficienten statt. Wenn man zur Vereinfachung

$$\Delta x\, \Delta y\, \Delta z = \overline{\omega}$$

setzt, so kann man folgende Gleichungen aufstellen:

$$\Sigma \varepsilon r^2 \cos^4\alpha = \overline{\omega}\, a_1; \quad \Sigma \varepsilon r^2 \cos^4\beta = \overline{\omega}\, a_2; \quad \Sigma \varepsilon r^2 \cos^4\gamma = \overline{\omega}\, a_3;$$
$$\Sigma \varepsilon r^2 \cos^2\beta \cos^2\gamma = \overline{\omega}\, b_1; \quad \Sigma \varepsilon r^2 \cos^2\gamma \cos^2\alpha = \overline{\omega}\, b_2; \quad \Sigma \varepsilon r^2 \cos^2\alpha \cos^2\beta = \overline{\omega}\, b_3;$$
$$\Sigma \varepsilon r^2 \cos^2\alpha \cos\beta \cos\gamma = \overline{\omega}\, c_1; \quad \Sigma \varepsilon r^2 \cos\alpha \cos^2\beta \cos\gamma = \overline{\omega}\, c_2;$$
$$\Sigma \varepsilon r^2 \cos\alpha \cos\beta \cos^2\gamma = \overline{\omega}\, c_3;$$
$$\Sigma \varepsilon r^2 \cos\beta \cos^3\gamma = \overline{\omega}\, e_1; \quad \Sigma \varepsilon r^2 \cos^3\alpha \cos\gamma = \overline{\omega}\, e_2; \quad \Sigma \varepsilon r^2 \cos\alpha \cos^3\beta = \overline{\omega}\, e_3;$$
$$\Sigma \varepsilon r^2 \cos^3\beta \cos\gamma = \overline{\omega} f_1; \quad \Sigma \varepsilon r^2 \cos\alpha \cos^3\gamma = \overline{\omega} f_2; \quad \Sigma \varepsilon r^2 \cos^3\alpha \cos\beta = \overline{\omega} f_3;$$

$a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, \ldots$ sind fünfzehn numerische Coëfficienten, welche von einem Punkte des festen Körpers zum andern veränderlich sind, sobald derselbe nicht homogen ist, welche aber für jeden Punkt constant bleiben.

Mit diesen Benennungen wird die Deformationsarbeit des Parallelopipedons durch folgende Formel ausgedrückt:

$$\frac{\overline{\omega}}{2} \left\{ \begin{aligned} & a_1 \partial_x^2 + a_2 \partial_y^2 + a_3 \partial_z^2 + b_1 (2 \partial_y \partial_z + g_{yz}^2) + b_2 (2 \partial_z \partial_x + g_{zx}^2) \\ & + b_3 (2 \partial_x \partial_y + g_{xy}^2) + 2 c_1 (\partial_x g_{yz} + g_{zx} g_{xy}) \\ & + 2 c_2 (\partial_y g_{zx} + g_{yz} g_{xy}) + 2 c_3 (\partial_z g_{xy} + g_{yz} g_{zx}) \\ & + 2 e_1 \partial_z g_{yz} + 2 e_2 \partial_x g_{zx} + 2 e_3 \partial_y g_{xy} + 2 f_1 \partial_y g_{yz} \\ & + 2 f_2 \partial_z g_{zx} + 2 f_3 \partial_x g_{xy}. \end{aligned} \right\} \qquad (11)$$

5. Elastische Kräfte, welche in den Flächen des Parallelopipedons wirken. — Wir betrachten nun jene zwei Flächen des Parallelopipedons, welche senkrecht sind zur x-Achse und deren Fläche $\Delta y\, \Delta z$ ist, und bezeichnen mit A die Fläche, deren Abscisse x ist, und mit A' die parallele Fläche, deren Abscisse $x + \Delta x$ ist. Ferner denken wir uns von beiden Seiten der Fläche A zwei sehr dünne Schichten, deren

Dicke gleich ist dem Halbmesser der Wirkungssphäre der Molecüle und daher im Verhältnisse zur Grösse der Kante Δx des Parallelopipedons vernachlässigt werden kann. Die Molecularkräfte zwischen den beiden Schichten sind diejenigen, welche man als auf der Fläche $\Delta y \Delta z$ wirksam betrachtet; jede dieser Molecularkräfte kann in drei Kräfte parallel zu den Achsen zerlegt werden, und wir wollen die auf die Flächeneinheit entfallende Summe der zu den Achsen parallelen Componenten

$$p_{xx}, \qquad p_{xy}, \qquad p_{xz}$$

nennen, indem wir durch den ersten Index die Achse bezeichnen, auf welche die betrachtete Fläche senkrecht steht, und durch den zweiten jene Achse, zu welcher die Componente der auf diese Fläche wirkenden Kraft parallel ist. Wir nennen nun *elastische Normalkraft* die Kraft p_{xx}, welche auf der Fläche $\Delta y \Delta z$ senkrecht ist, und *elastische Tangentialkräfte* die beiden anderen Kräfte p_{xy}, p_{xz}, welche parallel zu dieser Fläche sind.

Die in der Fläche A' wirkenden elastischen Kräfte sind

$$p_{xx} + \frac{d\, p_{xx}}{d\, x} \Delta x, \qquad p_{xy} + \frac{d\, p_{xy}}{d\, x} \Delta x, \qquad p_{xz} + \frac{d\, p_{xz}}{d\, x} \Delta x;$$

dieselben reduciren sich auf p_{xx}, p_{xy}, p_{xz}, wie in der Fläche A, wenn man die sehr kleinen Werthe $\frac{d\, p_{xx}}{d\, x} \Delta x$ etc. vernachlässigt, was man thun muss, sobald man den Ausdruck der Kräfte p_{xx}, p_{xy}, p_{xz} in Functionen der drei specifischen Dehnungen und der drei Verschiebungen sucht.

Wenn man die beiden auf die y-Achse senkrechten Flächen B und B' betrachtet, so werden die auf die Flächeneinheit entfallenden elastischen Kräfte folgende sein:

$$p_{yx}, \qquad p_{yy}, \qquad p_{yz};$$

in ähnlicher Weise erhält man für die beiden auf die z-Achse senkrechten Flächen C und C'

$$p_{zx}, \qquad p_{zy}, \qquad p_{zz}.$$

Um nun diese neun Kräfte in Functionen der drei specifischen Dehnungen und der drei Verschiebungen ausgedrückt zu erhalten, muss man zuerst beachten, dass sich die gegenseitige Lage der beiden Flächen A und A' in der Richtung der x-Achse um die Grösse $\partial_x \Delta x$, in der Richtung der y- und z-Achse um die Grössen $g_{xy} \Delta x$ und $g_{zx} \Delta x$ ändern

wird. *Nimmt man also die Differentialquotienten der Deformationsarbeit des Parallelopipedons* (letzte Formel von Nr. 4) *mit Bezug auf die relativen Verschiebungen* $\partial_x \Delta x$, $g_{xy} \Delta x$, $g_{zx} \Delta x$, so erhält man die absoluten Werthe der auf die Fläche $\Delta y \Delta z$ wirkenden Kräfte, und durch Division dieser Differentialquotienten durch das Product $\Delta y \Delta z$ ergeben sich die Werthe von p_{xx}, p_{xy}, p_{xz}. Man sieht daraus, dass diese letzteren die durch das Volumen $\varpi = \Delta x \Delta y \Delta z$ getheilten Differentialquotienten der Deformationsarbeit des Parallelopipedons mit Bezug auf ∂_x, g_{xy} und g_{zx} sind.

In ähnlicher Weise sind die Kräfte

$$p_{yx}, \quad p_{yy}, \quad p_{yz}, \quad \text{und} \quad p_{zx}, \quad p_{zy}, \quad p_{zz}$$

die Differentialquotienten desselben Ausdruckes mit Bezug auf die Grössen

$$g_{xy}, \quad \partial_y, \quad g_{yz} \quad \text{und} \quad g_{zx}, \quad g_{yz}, \quad \partial_z;$$

hieraus folgt unmittelbar, dass sich die neun Kräfte auf sechs verschiedene reduciren werden, denn man kann nur sechs Differentialquotienten bilden und erhält somit

$$p_{yx} = p_{xy}, \qquad p_{xz} = p_{zx}, \qquad p_{zy} = p_{yz}.$$

Künftig wenden wir immer die Bezeichnungen p_{xy}, p_{zx}, p_{yz} an, um ebensowohl die auf die Flächen A, C, B bezüglichen, zur y-, x- und z-Achse parallelen Tangentialkräfte, als auch die auf die Flächen B, A, C bezüglichen, zur x-, z- und y-Achse parallelen Tangentialkräfte darzustellen.

Die in der oben angedeuteten Weise gesuchten Ausdrücke der sechs elastischen Kräfte ergeben sich dann in folgender Weise:

$$\left.\begin{aligned}
p_{xx} &= a_1 \partial_x + b_3 \partial_y + b_2 \partial_z + c_1 g_{yz} + e_2 g_{zx} + f_3 g_{xy}, \\
p_{yy} &= b_3 \partial_x + a_2 \partial_y + b_1 \partial_z + f_1 g_{yz} + c_2 g_{zx} + e_3 g_{xy}, \\
p_{zz} &= b_2 \partial_x + b_1 \partial_y + a_3 \partial_z + e_1 g_{yz} + f_2 g_{zx} + c_3 g_{xy}, \\
p_{yz} &= c_1 \partial_x + f_1 \partial_y + e_1 \partial_z + b_1 g_{yz} + c_3 g_{zx} + c_2 g_{xy}, \\
p_{zx} &= e_2 \partial_x + c_2 \partial_y + f_2 \partial_z + c_3 g_{yz} + b_2 g_{zx} + c_1 g_{xy}, \\
p_{xy} &= f_3 \partial_x + e_3 \partial_y + c_3 \partial_z + c_2 g_{yz} + c_1 g_{zx} + b_3 g_{xy}.
\end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Die drei ersten Gleichungen geben die elastischen Normalkräfte, die drei letzten hingegen die Tangentialkräfte.

Es sei hier wiederholt, dass in diesen Gleichungen nur fünfzehn verschiedene numerische Coëfficienten vorkommen.

Ferner ist es noch wichtig anzuführen, dass, da die sechs elastischen Kräfte die Differentialquotienten des mit $\frac{\bar{\omega}}{2}$ multiplicirten Werthes in dem Ausdrucke für die Deformationsarbeit des parallelopipedischen Elementes mit Bezug auf $\partial_x, \partial_y, \partial_z, g_{yz}, g_{zx}, g_{xy}$ sind, und da dieser Werth andererseits eine homogene Function zweiten Grades von $\partial_x, \partial_y, \partial_z, g_{yz}, g_{zx}, g_{xy}$ ist, man den Ausdruck für die Deformationsarbeit des Elementes $\bar{\omega}$ auch in folgender Form schreiben kann:

$$\frac{\omega}{2}(p_{xx}\,\partial_x + p_{yy}\,\partial_y + p_{zz}\,\partial_z + p_{yz}\,g_{yz} + p_{zx}\,g_{zx} + p_{xy}\,g_{xy}),$$

was sich übrigens leicht nachweisen lässt.

6. Aenderung der elastischen Kräfte eines festen Körpers von einem Punkte zum anderen. — Aus Obigem ist zu ersehen, dass die auf die Flächen A, B, C, A', B', C' des betrachteten Parallelopipedons wirkenden elastischen Kräfte folgende sind:

$$\text{auf } A\colon\quad p_{xx},\quad p_{xy},\quad p_{zx};$$

$$\text{auf } A'\colon\quad p_{xx} + \frac{d\,p_{xx}}{d\,x}\Delta x,\quad p_{xy} + \frac{d\,p_{xy}}{d\,x}\Delta x,\quad p_{zx} + \frac{d\,p_{zx}}{d\,x}\Delta x;$$

$$\text{auf } B\colon\quad p_{xy},\quad p_{yy},\quad p_{yz};$$

$$\text{auf } B'\colon\quad p_{xy} + \frac{d\,p_{xy}}{d\,y}\Delta y,\quad p_{yy} + \frac{d\,p_{yy}}{d\,y}\Delta y,\quad p_{yz} + \frac{d\,p_{yz}}{d\,y}\Delta y;$$

$$\text{auf } C\colon\quad p_{zx},\quad p_{yz},\quad p_{zz};$$

$$\text{auf } C'\colon\quad p_{zx} + \frac{d\,p_{zx}}{d\,z}\Delta z,\quad p_{yz} + \frac{d\,p_{yz}}{d\,z}\Delta z,\quad p_{zz} + \frac{d\,p_{zz}}{d\,z}\Delta z.$$

Zwischen diesen auf die Flächen des Parallelopipedons wirkenden elastischen Kräften und den äusseren Kräften, welche auf die ganze Masse wirken, wie die Schwerkraft, muss Gleichgewicht herrschen.

Nennen wir X_0, Y_0, Z_0 die zu den Achsen parallelen Componenten der auf das Element $\bar{\omega} = \Delta x\,\Delta y\,\Delta z$ wirkenden äusseren Kraft, auf die Masseneinheit bezogen, und ϱ das specifische Gewicht des Körpers im Punkte (x, y, z), so sind die effectiven Werthe der auf das Parallelopipedon wirkenden äusseren Kraft

$$X_0\,\varrho\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z,\qquad Y_0\,\varrho\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z,\qquad Z_0\,\varrho\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z.$$

Für das Gleichgewicht des Parallelopipedons muss die Summe der zu einer Achse parallelen Componenten aller Kräfte, welche auf dasselbe wirken, gleich Null sein; wenn man z. B. die zur x-Achse parallelen Componenten betrachtet, so erhält man folgende Werthe:

auf die Fläche A: $-p_{xx}\,\Delta y\,\Delta z$ u. auf die Fläche A': $\left(p_{xx}+\frac{d p_{xx}}{d x}\Delta x\right)\Delta y\,\Delta z$;

„ B: $-p_{xy}\,\Delta z\,\Delta x$ „ B': $\left(p_{xy}+\frac{d p_{xy}}{d y}\Delta y\right)\Delta z\,\Delta x$;

„ C: $-p_{zx}\,\Delta x\,\Delta y$ „ C': $\left(p_{zx}+\frac{d p_{zx}}{d z}\Delta z\right)\Delta x\,\Delta y$;

und für die ganze Masse des Parallelopipedons $X_0\,\varrho\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$.

Die Summe aller dieser Kräfte gleich Null gesetzt und durch das Volumen $\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$ dividirt, gibt die erste der drei folgenden Gleichungen, während man die beiden anderen auf gleiche Weise erhält:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\,p_{xx}}{d\,x}+\frac{d\,p_{xy}}{d\,y}+\frac{d\,p_{zx}}{d\,z}+\varrho\,X_0=0,\\ \frac{d\,p_{xy}}{d\,x}+\frac{d\,p_{yy}}{d\,y}+\frac{d\,p_{yz}}{d\,z}+\varrho\,Y_0=0,\\ \frac{d\,p_{zx}}{d\,x}+\frac{d\,p_{yz}}{d\,y}+\frac{d\,p_{zz}}{d\,z}+\varrho\,Z_0=0.\end{aligned}\right\}\qquad(13)$$

Für das Gleichgewicht des Parallelopipedons müssen auch die Summen der Momente der Kräfte in Bezug auf drei rechtwinkelig aufeinanderstehenden Achsen gleich Null sein. Führt man diese drei Achsen durch den Mittelpunkt des Parallelopipedons und parallel zu den Coordinatenachsen, so geben die Kräfte X_0, Y_0, Z_0 keine Momente, denn deren Resultirende geht durch den Mittelpunkt des Parallelopipedons, da die Kräfte auf die ganze Masse desselben gleichmässig vertheilt sind. Ebenso sind die auf jeder Fläche wirkenden elastischen Kräfte gleichmässig vertheilt und können also als im Mittelpunkte wirkend betrachtet werden; ferner geben auch die auf die Flächen normalen elastischen Kräfte mit Bezug auf die drei Achsen kein Moment.

Denkt man sich die zur x-Achse parallele Momentenachse, so werden die Ebenen A und A' durch dieselbe in ihren Mittelpunkten getroffen

und die daselbst wirkenden elastischen Kräfte geben kein Moment. In den Flächen B und B' hat man nur die beiden Kräfte

$$-p_{yz}\,\varDelta z\,\varDelta x, \qquad +\left(p_{yz}+\frac{d\,p_{yz}}{d\,y}\,\varDelta y\right)\varDelta z\,\varDelta x,$$

welche das Parallelopipedon um die x-Achse zu drehen suchen; wird der sehr kleine Werth $\frac{d\,p_{yz}}{d\,y}\,\varDelta x\,\varDelta y\,\varDelta z$ vernachlässigt, so erhält man ein Kräftepaar, dessen Hebelarm $\varDelta y$ und dessen Moment daher

$$p_{yz}\,\varDelta x\,\varDelta y\,\varDelta z$$

ist. Für die Flächen C, C' geben die Kräfte

$$-p_{yz}\,\varDelta x\,\varDelta y, \qquad +\left(p_{yz}+\frac{d\,p_{yz}}{d\,z}\,\varDelta x\,\varDelta y\right)\varDelta x\,\varDelta y$$

ein Kräftepaar, welches das Parallelopipedon im entgegengesetzten Sinne zu dem letztgenannten Kräftepaar zu drehen sucht, und dessen Moment

$$-p_{yz}\,\varDelta x\,\varDelta y\,\varDelta z$$

ist. Diese beiden Kräftepaare heben sich auf, und es herrscht daher in Bezug auf die zur x-Achse parallele Momentenachse Rotationsgleichgewicht.[1]

Bezüglich der anderen zwei Achsen gelangt man zu denselben Resultaten.

Die drei Gleichungen (12) sind daher für das Elasticitätsgleichgewicht irgend eines Körpers oder Systems genügend. Wie man aus den Formeln (4), (7) und (12) ersieht, sind die sechs elastischen Kräfte p_{xx}, p_{yy}, etc. Functionen der drei Verrückungen u, v, w, so dass man durch Integration der drei erhaltenen Gleichungen diese drei Verrückungen in Functionen der Coordinaten erfahren kann, worauf die oben angeführten Gleichungen die Werthe der elastischen Kräfte in irgend einem Punkte geben.

Wenn ein Körper nur durch Kräfte, welche auf seine Oberfläche vertheilt sind, und nicht durch eine Kraft, welche wie die Schwerkraft auf die Masse wirkt, beansprucht wird, so hat man $X_0 = 0$, $Y_0 = 0$, $Z_0 = 0$, und die allgemeinen Elasticitätsgleichungen erhalten folgende Form:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\,p_{xx}}{d\,x}+\frac{d\,p_{xy}}{d\,y}+\frac{d\,p_{zx}}{d\,z}=0,\\ \frac{d\,p_{xy}}{d\,x}+\frac{d\,p_{yy}}{d\,y}+\frac{d\,p_{yz}}{d\,z}=0,\\ \frac{d\,p_{zx}}{d\,x}+\frac{d\,p_{yz}}{d\,y}+\frac{d\,p_{zz}}{d\,z}=0.\end{aligned}\right\}\tag{14}$$

Jener Fall, dass die Masse eines Körpers durch keine Kraft beansprucht wird, kann zwar nicht stattfinden, da die Schwerkraft immer vorhanden ist, aber man kann zufolge dem Principe der Summirung der Wirkungen den Einfluss der auf die Oberfläche wirkenden Kräfte und derjenigen, welche auf das Innere wirken, wie die Schwerkraft, gesondert betrachten und erkennt, dass die Formeln (13) dazu dienen, die elastischen Kräfte zu bestimmen, welche durch die auf die Oberfläche wirkenden äusseren Kräfte entstehen.

7. Componenten der elastischen Kraft, welche in einer gegen die Achsen geneigten kleinen Fläche auftritt. — Man denke sich in der Mitte des festen Körpers einen kleinen Tetraëder, dessen drei in dem Eckpunkte (x, y, z) zusammenkommenden Kanten parallel zu den Achsen sind, und welcher eine solche Gestalt hat, dass die von diesem Eckpunkte auf die gegenüberliegende Fläche gefällte Senkrechte die Winkel α, β, γ mit den Achsen bildet.

Nennt man diese sehr kleine Fläche ω, so werden die drei anderen Flächen, welche senkrecht auf die Achsen sind, ausgedrückt durch

$$\omega\cos\alpha,\qquad \omega\cos\beta,\qquad \omega\cos\gamma$$

und die in diesen drei Flächen wirkenden Kräfte durch

$$\begin{array}{lll} p_{xx}\,.\,\omega\cos\alpha, & p_{xy}\,.\,\omega\cos\beta, & p_{zx}\,.\,\omega\cos\gamma,\\ p_{xy}\,.\,\omega\cos\alpha, & p_{yy}\,.\,\omega\cos\beta, & p_{yz}\,.\,\omega\cos\gamma,\\ p_{zx}\,.\,\omega\cos\alpha, & p_{yz}\,.\,\omega\cos\beta, & p_{zz}\,.\,\omega\cos\gamma; \end{array}$$

in Folge dessen erhält man, wenn die zu den Achsen parallelen Componenten der auf die Flächeneinheit bezogenen, längs der Fläche ω thätigen elastischen Kräfte X, Y, Z genannt werden, und wenn die Bedingung berücksichtigt wird, dass für das Gleichgewicht die Summe der zu jeder Achse parallelen Componenten gleich Null sein muss, folgende drei Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} X &= p_{xx}\cos\alpha + p_{xy}\cos\beta + p_{zx}\cos\gamma, \\ Y &= p_{xy}\cos\alpha + p_{yy}\cos\beta + p_{yz}\cos\gamma, \\ Z &= p_{zx}\cos\alpha + p_{yz}\cos\beta + p_{zz}\cos\gamma. \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

Diese Gleichungen dienen dazu, um die elastischen Kräfte zu bestimmen, welche auf die Flächen eines Parallelopipedons thätig sind, dessen Kanten parallel zu drei neuen rechtwinkeligen Achsen sind.

Wir werden nur den einen Fall untersuchen, wo die x-Achsen zusammenfallen und wo die y'- und z'-Achse mit der y- und z-Achse den Winkel β einschliessen (s. Fig. 7, S. 52). Betrachtet man zuerst die Fläche des neuen Parallelopipedons, welche senkrecht auf die x-Achse ist, so muss man in den Gleichungen (15)

$$\cos\alpha = 1, \qquad \cos\beta = 0, \qquad \cos\gamma = 0$$

machen und erhält sodann

$$X = p_{xx}, \qquad Y = p_{xy}, \qquad Z = p_{zx};$$

für die auf die neuen Achsen bezogenen Kräfte erhält man

$$\begin{aligned} p_{x'x'} &= p_{xx}, \\ p_{x'y'} &= p_{zx}\sin\beta + p_{xy}\cos\beta, \\ p_{z'x'} &= p_{zx}\cos\beta - p_{xy}\sin\beta. \end{aligned}$$

Wenn man sodann die auf die y'-Achse senkrechte Fläche des Parallelopipedons betrachtet, so muss man in den Gleichungen (15)

$$\cos\alpha = 0, \qquad \cos\beta = \cos\beta, \qquad \cos\gamma = \sin\beta$$

machen und erhält

$$\begin{aligned} X &= p_{xy}\cos\beta + p_{zx}\sin\beta, \\ Y &= p_{yy}\cos\beta + p_{yz}\sin\beta, \\ Z &= p_{yz}\cos\beta + p_{zz}\sin\beta, \end{aligned}$$

woraus folgt, dass die Componenten der in der betrachteten Fläche sich geltend machenden elastischen Kraft in der Richtung der neuen Achsen in folgender Weise ausgedrückt werden können:

$$\begin{aligned} p_{x'y'} &= X = p_{xy}\cos\beta + p_{zx}\sin\beta, \\ p_{y'y'} &= Y\cos\beta + Z\sin\beta = p_{yy}\cos^2\beta + 2p_{yz}\sin\beta\cos\beta + p_{zz}\sin^2\beta, \\ p_{y'z'} &= -Y\sin\beta + Z\cos\beta = (-p_{yy} + p_{zz})\sin\beta\cos\beta + p_{yz}(\cos^2\beta - \sin^2\beta). \end{aligned}$$

Wenn man schliesslich die zur z'-Achse senkrechte Fläche des Parallelopipedons betrachtet, so findet man die Ausdrücke für $p_{z'x'}$, $p_{y'z'}$,

$p_{z'z'}$, und nachdem die zwei ersten schon erhalten wurden, erübrigt nur noch den dritten aufzuschreiben, d. i.

$$p_{z'z'} = p_{yy} \sin^2\beta - 2 p_{yz} \sin\beta \cos\beta + p_{zz} \cos^2\beta.$$

Durch Zusammenstellung der vorhergehenden Resultate ergeben sich nachfolgende sechs Gleichungen, um die elastischen Kräfte in Bezug auf die neuen Achsen auszudrücken:

$$\left.\begin{aligned} p_{x'x'} &= p_{xx}, \\ p_{y'y'} &= p_{yy} \cos^2\beta + 2 p_{yz} \sin\beta \cos\beta + p_{zz} \sin^2\beta, \\ p_{z'z'} &= p_{yy} \sin^2\beta - 2 p_{yz} \sin\beta \cos\beta + p_{zz} \cos^2\beta, \\ p_{y'z'} &= (-p_{yy} + p_{zz}) \sin\beta \cos\beta + p_{yz} (\cos^2\beta - \sin^2\beta), \\ p_{z'x'} &= p_{zx} \cos\beta - p_{xy} \sin\beta, \\ p_{x'y'} &= p_{zx} \sin\beta + p_{xy} \cos\beta. \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

8. Vereinfachung der die elastischen Kräfte ausdrückenden Gleichungen (12), sobald die Körper gewisse mechanische Eigenschaften besitzen. Erster Fall. — *Der Körper sei homogen und habe in jedem Punkte eine zur $y\,z$-Ebene parallele Symmetrieebene seines Gefüges.*

Ein Körper hat dann eine zu einer gegebenen Ebene parallele *Symmetrieebene seines Gefüges,* wenn jede zu dieser Ebene parallele Deformation in zwei zu obgenannter Ebene symmetrischen Flächen gleiche elastische Kräfte hervorruft. Sehen wir nun, welche Form die Ausdrücke (12) für die Kräfte p_{xx}, p_{yy}, etc. annehmen, wenn die Symmetrieebene parallel zur $y\,z$-Ebene ist, d. h. senkrecht auf die x-Achse.

Wir betrachten in einem Punkte zwei zu dieser Ebene symmetrische Flächen und nennen α, β, γ die Winkel, welche die Senkrechte auf eine derselben mit den Achsen einschliesst, und in Folge dessen sind $180^0 - \alpha$, β, γ die Winkel, welche die Senkrechte auf die andere mit denselben Achsen bildet.

Die Componenten X, Y, Z der elastischen Kraft in der ersten Fläche sind durch die Gleichungen (15) gegeben und diejenigen X', Y', Z' in der zweiten Fläche durch dieselben Gleichungen (15), indem man $180^0 - \alpha$ für α einsetzt, d. h. indem man $\cos\alpha$ in $-\cos\alpha$ ändert. Wenn aber die Deformation des Körpers symmetrisch zur $y\,z$-Ebene ist, müssen

unserer Annahme zufolge die Kräfte X', Y', Z' mit den Kräften X, Y, Z gleich und symmetrisch sein, d. h. es muss sein

$$X' = -X, \qquad Y' = Y, \qquad Z' = Z.$$

Drückt man diese Bedingungen mit Hilfe der Gleichungen (15) und derjenigen aus, welche man aus jenen ableitet, indem man $\cos\alpha$ in $-\cos\alpha$ ändert, so erhält man

$$p_{zx} = 0, \qquad p_{xy} = 0.$$

Damit eine Deformation in Bezug auf die yz-Ebene symmetrisch sei, darf dieselbe nur aus den drei specifischen Dehnungen ∂_x, ∂_y, ∂_z und der Verschiebung g_{yz} zusammengesetzt sein, so dass die allgemeinen Ausdrücke (12) von p_{xy} und p_{zx} auf folgende Form reducirt werden:

$$p_{zx} = e_2\,\partial_x + c_2\,\partial_y + f_2\,\partial_z + c_3\,g_{yz}$$
$$p_{xy} = f_3\,\partial_x + e_3\,\partial_y + c_3\,\partial_z + c_2\,g_{yz}$$

nachdem aber p_{zx} und p_{xy} Null werden müssen, welches auch die Werthe der Deformationen ∂_x, ∂_y, ∂_z, g_{yz} sind, so folgt daraus, dass

$$c_2 = 0, \qquad e_2 = 0, \qquad f_2 = 0,$$
$$c_3 = 0, \qquad e_3 = 0, \qquad f_3 = 0.$$

Die Ausdrücke für die sechs elastischen Kräfte stellen sich nun in folgender Weise dar:

$$\left.\begin{aligned}
p_{xx} &= a_1\,\partial_x + b_3\,\partial_y + b_2\,\partial_z + c_1\,g_{yz},\\
p_{yy} &= b_3\,\partial_x + a_2\,\partial_y + b_1\,\partial_z + f_1\,g_{yz},\\
p_{zz} &= b_2\,\partial_x + b_1\,\partial_y + a_3\,\partial_z + e_1\,g_{yz},\\
p_{yz} &= c_1\,\partial_x + f_1\,\partial_y + e_1\,\partial_z + b_1\,g_{yz},\\
p_{zx} &= b_2\,g_{zx} + c_1\,g_{xy},\\
p_{xy} &= c_1\,g_{zx} + b_3\,g_{xy}.
\end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

9. Zweiter Fall. — *Der Körper sei homogen und habe in jedem Punkte drei Symmetrieebenen.*

Wenn die Symmetrieebene, statt senkrecht auf die x-Achse zu sein, senkrecht auf die y-Achse ist, so sieht man leicht, dass die Coëfficienten, welche Null sein müssen, folgende sind:

$$c_1, \qquad e_1, \qquad f_1,$$
$$c_3, \qquad e_3, \qquad f_3;$$

wenn der Körper also in jedem Punkte zwei Symmetrieebenen besitzt, welche senkrecht auf die x- und y-Achse sind, so müssen die neun Coëfficienten

$$\begin{matrix} c_1, & e_1, & f_1, \\ c_2, & e_2, & f_2, \\ c_3, & e_3, & f_3 \end{matrix}$$

gleichzeitig Null sein; dies zeigt auch, dass die auf die z-Achse senkrechte Ebene in gleicher Weise eine Symmetrieebene ist, und dass somit der Körper in jedem Punkte drei Symmetrieebenen hat, welche sämmtlich auf die Coordinatenachsen senkrecht sind.

Man erhält in diesem Falle für die elastischen Kräfte folgende Ausdrücke, wenn man gleichzeitig die Coëfficienten b_1, b_2, b_3 in F_1, F_2, F_3 verwandelt:

$$\left.\begin{matrix} p_{xx} = a_1\,\partial_x + F_3\,\partial_y + F_2\,\partial_z, & p_{yz} = F_1\,g_{yz}, \\ p_{yy} = F_3\,\partial_x + a_2\,\partial_y + F_1\,\partial_z, & p_{zx} = F_2\,g_{zx}, \\ p_{zz} = F_2\,\partial_x + F_1\,\partial_y + a_3\,\partial_z, & p_{xy} = F_3\,g_{xy}. \end{matrix}\right\} \quad (18)$$

Die Coëfficienten F_1, F_2, F_3, welche mit den Verschiebungen g_{yz}, g_{zx}, g_{xy} multiplicirt die elastischen Tangentialkräfte geben, werden *Coëfficienten der tangentialen Elasticität* genannt.

10. Dritter Fall. — *Der Körper sei homogen und habe in jedem Punkte eine zur x-Achse parallele Elasticitätsachse.*

Man sagt, es gebe für jeden Punkt eines homogenen, festen Körpers eine *Symmetrie-* oder *Elasticitätsachse*, wenn der Körper in allen von dieser Achse getroffenen Ebenen dieselben Eigenschaften bezüglich der Elasticität zeigt.

Hieraus folgt, dass, wenn man ein System rechtwinkeliger Achsen OX', OY', OZ' betrachtet, wo die x-Achse Elasticitätsachse ist, und wenn man die sechs elastischen Kräfte p_{xx}, p_{yy}, etc. in Functionen der drei Dehnungen $\partial_{x'}$, $\partial_{y'}$, $\partial_{z'}$ und der auf dieselben Achsen bezogenen drei Verschiebungen $g_{y'z'}$, $g_{z'x'}$, $g_{x'y'}$ ausdrückt, die solchermassen erhaltenen Formeln unabhängig sein müssen von der Richtung der y'- und z'-Achse.

Um nun zu prüfen, unter welchen Bedingungen dies möglich ist, beziehen wir die mobilen Achsen der y' und z' auf zwei fixe rechtwinkelige Achsen OY, OZ derselben Ebene (s. Fig. 7, S. 52) und betrachten letztere als zu einem System von rechtwinkeligen Achsen OX,

OY, OZ gehörend, deren Achse OX (in der betreffenden Figur nicht dargestellt) mit der Achse OX' zusammenfällt.

Zuerst ist zu beachten, dass zufolge der Definition der Elasticitätsachse jede auf dieser Achse senkrecht stehende Ebene eine Symmetrieebene ist, und dass man daher von den Gleichungen (18) ausgehen kann.

Weiters erkennt man, dass eine Dehnung ∂_x zwei gleiche Kräfte p_{yy} und p_{zz} geben wird, wodurch bedingt ist, dass $F_2 = F_3$; die zwei unter einander gleichen Dehnungen ∂_y und ∂_z geben auch gleiche elastische Kräfte p_{yy}, p_{zz}, und es muss $a_2 = a_3$ sein. Es werden daher die Gleichungen (18) folgendermassen dargestellt werden können:

$$\left.\begin{aligned} p_{xx} &= a_1\,\partial_x + F_2\,(\partial_y + \partial_z), & p_{yz} &= F_1\,g_{yz}, \\ p_{yy} &= F_2\,\partial_x + a_2\,\partial_y + F_1\,\partial_z, & p_{zx} &= F_2\,g_{zx}, \\ p_{zz} &= F_2\,\partial_x + F_1\,\partial_y + a_2\,\partial_z, & p_{xy} &= F_2\,g_{xy}. \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

Um nun die Ausdrücke für die Kräfte $p_{x'x'}$, $p_{y'y'}$, $p_{z'z'}$, $p_{y'z'}$ etc. zu erhalten, substituirt man zuerst in vorstehenden Gleichungen für ∂_x, ∂_y etc. deren Werthe in Functionen von $\partial_{x'}$, $\partial_{y'}$, etc., welche durch die Gleichungen (10) gegeben sind, und setzt die so erhaltenen Ausdrücke für p_{xx}, p_{yy}, p_{zz} etc. in die Gleichungen (16) ein, worauf man nachstehende Formeln erhält:

$$\begin{aligned} p_{x'x'} &= a_1\,\partial_{x'} + F_2\,(\partial_{y'} + \partial_{z'}) \\ p_{y'y'} &= F_2\,\partial_{x'} + [a_2\,(\cos^4\beta + \sin^4\beta) + 6\,F_1\,\cos^2\beta\,\sin^2\beta]\,\partial_{y'} \\ &\quad + [2\,a_2\,\cos^2\beta\,\sin^2\beta + F_1\,(\cos^4\beta - 4\,\cos^2\beta\,\sin^2\beta + \sin^4\beta)]\,\partial_{z'} \\ &\quad + (3\,F_1 - a_2)\,(\cos^2\beta - \sin^2\beta)\cos\beta\,\sin\beta\,.\,g_{y'z'}, \\ p_{z'z'} &= F_2\,\partial_{x'} + [2\,a_2\,\cos^2\beta\,\sin^2\beta + F_1\,(\cos^4\beta - 4\,\cos^2\beta\,\sin^2\beta + \sin^4\beta)]\,\partial_{y'} \\ &\quad + [a_2\,(\cos^4\beta + \sin^4\beta) + 6\,F_1\,\cos^2\beta\,\sin^2\beta]\,\partial_{z'} \\ &\quad - (3\,F_1 - a_2)\,(\cos^2\beta - \sin^2\beta)\cos\beta\,\sin\beta\,.\,g_{y'z'}, \\ p_{y'z'} &= (3\,F_1 - a_2)\,(\cos^2\beta - \sin^2\beta)\cos\beta\,\sin\beta\,(\partial_{y'} - \partial_{z'}) \\ &\quad + [F_1\,(\cos^2\beta - \sin^2\beta)^2 + 2\,(a_2 - F_1)\cos^2\beta\,\sin^2\beta]\,g_{y'z'}, \\ p_{z'x'} &= F_2\,g_{z'x'}, \\ p_{x'y'} &= F_2\,g_{x'y'}. \end{aligned}$$

Diese Formeln müssen aber von β unabhängig sein, damit die x-Achse eine Elasticitätsachse sei, und man kann leicht erkennen, dass dieser Bedingung vollständig entsprochen wird, wenn

$$a_2 = 3\,F_1.$$

Dies ist also die Beziehung, welche man in die Gleichungen (19) einführen muss, sobald die x-Achse eine Elasticitätsachse ist, und man erhält hiemit die folgenden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} p_{xx} &= a_1\,\partial_x + F_2\,(\partial_y + \partial_z), & p_{yz} &= F_1\,g_{yz}, \\ p_{yy} &= F_2\,\partial_x + F_1\,(3\,\partial_y + \partial_z), & p_{zx} &= F_2\,g_{zx}, \\ p_{zz} &= F_2\,\partial_x + F_1\,(\partial_y + 3\,\partial_z), & p_{xy} &= F_2\,g_{xy}. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

In diesen Formeln gibt es nur die drei Coëfficienten a_1, F_1, F_2.

11. Vierter Fall. — *Körper von constanter Elasticität oder isotrope Körper.*

Ist die y-Achse auch eine Elasticitätsachse, so hat man

$$F_1 = F_2, \qquad a_1 = 3\,F_1,$$

womit sich obige Gleichungen folgendermassen gestalten, wenn man gleichzeitig F_1 in F ändert:

$$\left.\begin{aligned} p_{xx} &= F(3\,\partial_x + \partial_y + \partial_z), & p_{yz} &= F\,g_{yz}, \\ p_{yy} &= F(\partial_x + 3\,\partial_y + \partial_z), & p_{zx} &= F\,g_{zx}, \\ p_{zz} &= F(\partial_x + \partial_y + 3\,\partial_z), & p_{xy} &= F\,g_{xy}. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

in welchen Gleichungen nur der Coëfficient F bleibt.

Man erkennt leicht, dass, wenn zwei Elasticitätsachsen vorhanden sind, welche parallel zur x-Achse und parallel zur y-Achse sind, es auch eine dritte Elasticitätsachse parallel zur z-Achse geben muss.

Man kann in diesem Falle die Ueberzeugung gewinnen, dass jede Linie eine Elasticitätsachse ist; denn nachdem in Bezug auf die Widerstandsfähigkeit um die x-Achse herum vollkommen Gleichheit herrscht, hat jede Linie, welche auf dieser Achse senkrecht steht, dieselben Eigenschaften wie die y- und z-Achse, so zwar, dass, wenn dies Elasticitätsachsen sind, alle in deren Ebene durch den Coordinaten-Anfangspunkt geführten Linien es ebenfalls sind. Aus demselben Grunde sind alle Linien, welche in den beiden anderen Coordinatenebenen gezogen werden, ebenfalls Elasticitätsachsen.

Nennt man θ die cubische specifische Dehnung, so hat man, wie oben gesehen wurde, die Gleichung (5)

$$\theta = \partial_x + \partial_y + \partial_z;$$

es können daher die Gleichungen (21) auch in folgender Form geschrieben werden:

$$\left.\begin{aligned} p_{xx} &= F(2\,\partial_x + \theta), & p_{yz} &= F\,g_{yz}, \\ p_{yy} &= F(2\,\partial_y + \theta), & p_{zx} &= F\,g_{zx}, \\ p_{zz} &= F(2\,\partial_z + \theta), & p_{xy} &= F\,g_{xy}. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Jene Körper, auf welche sich diese Gleichungen anwenden lassen, und welche in jeder Richtung dieselbe Elasticität haben, werden von Lamé *„Körper von constanter Elasticität"* und von Cauchy und Barré de Saint-Venant *„isotrope Körper"* genannt.

12. Bedingungsgleichungen für die Oberfläche. — Der in Nummer 7 betrachtete kleine Tetraeder kann auch in der Weise angenommen werden, dass seine in Bezug auf die Achsen schiefe Fläche an der Oberfläche des festen Körpers sich befindet; X, Y, Z sind dann die Componenten der auf die Oberfläche wirkenden und auf den Quadratmeter bezogenen Kraft. Wenn man diese Kraft $\overline{\omega}$ nennt und α', β', γ' die Winkel, welche deren Richtung mit den Achsen bildet, so ergeben sich aus den Gleichungen (15) folgende:

$$\left.\begin{aligned} \overline{\omega}\cos\alpha' &= p_{xx}\cos\alpha + p_{xy}\cos\beta + p_{zx}\cos\gamma, \\ \overline{\omega}\cos\beta' &= p_{xy}\cos\alpha + p_{yy}\cos\beta + p_{yz}\cos\gamma, \\ \overline{\omega}\cos\gamma' &= p_{zx}\cos\alpha + p_{yz}\cos\beta + p_{zz}\cos\gamma, \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

wobei zu beachten ist, dass α, β, γ jene Winkel sind, welche die in dem betrachteten Punkte der Oberfläche des Körpers auf dieselbe errichtete Senkrechte mit den Achsen bildet.

Es müssen also die Functionen von x, y, z, welche die elastischen Kräfte p_{xx}, p_{yy}, etc. darstellen, derartige sein, dass sie den Gleichungen (13) genügen, welches auch der Werth der Coordinaten sei; und ebenso auch den vorhergehenden Gleichungen für alle Punkte der Oberfläche.

13. Differentialbeziehungen zwischen den specifischen Dehnungen und den Verschiebungen. — Nachdem die drei specifischen Dehnungen

$$\partial_x = \frac{du}{dx}, \qquad \partial_y = \frac{dv}{dy}, \qquad \partial_z = \frac{dw}{dz} \tag{24}$$

und die drei Verschiebungen

$$g_{yz} = \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}, \qquad g_{zx} = \frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}, \qquad g_{xy} = \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \tag{25}$$

von den drei Verrückungen (Ortsveränderungen) u, v, w abhängen, ist es klar, dass man nicht sechs beliebige Functionen von x, y, z aufstellen kann, welche die drei specifischen Dehnungen und die drei Verschiebungen darstellen, sondern es müssen diese Functionen allen Differentialbeziehungen genügen, welche man aus den Gleichungen (24) und (25) durch Elimination von u, v, w ableitet.

Um diese Beziehungen zu finden, muss man zuerst die erste der Gleichungen (25) successive nach y und z differentiiren und erhält dadurch:

$$\frac{d^2 g_{yz}}{dy\,dz} = \frac{d^3 v}{dy\,dz^2} + \frac{d^3 w}{dy^2\,dz};$$

substituirt man für $\frac{dv}{dy}$ und $\frac{dw}{dz}$ die Werthe ∂_y und ∂_z, so erhält man die erste der folgenden Gleichungen; die beiden anderen lassen sich in ähnlicher Weise ableiten:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2 g_{yz}}{dy\,dz} &= \frac{d^2 \partial_y}{dz^2} + \frac{d^2 \partial_z}{dy^2}, \\ \frac{d^2 g_{zx}}{dz\,dx} &= \frac{d^2 \partial_z}{dx^2} + \frac{d^2 \partial_x}{dz^2}, \\ \frac{d^2 g_{xy}}{dx\,dy} &= \frac{d^2 \partial_x}{dy^2} + \frac{d^2 \partial_y}{dx^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

Differentiirt man nun die drei Gleichungen (25) nach x, respective y und z, so ergeben sich die Gleichungen:

$$\frac{d\,g_{yz}}{dx} = \frac{d^2 v}{dz\,dx} + \frac{d^2 w}{dx\,dy},$$

$$\frac{d\,g_{zx}}{dy} = \frac{d^2 w}{dx\,dy} + \frac{d^2 u}{dy\,dz},$$

$$\frac{d\,g_{xy}}{dz} = \frac{d^2 u}{dy\,dz} + \frac{d^2 v}{dz\,dx},$$

in welchen die rechten Seiten nur die Differentialquotienten $\frac{d^2 u}{dy\,dz}$, $\frac{d^2 v}{dz\,dx}$, $\frac{d^2 w}{dx\,dy}$ enthalten. Durch Addition der zwei letzten Gleichungen und darauffolgende Subtraction der ersten erhält man:

$$-\frac{d\,g_{yz}}{dx} + \frac{d\,g_{zx}}{dy} + \frac{d\,g_{xy}}{dz} = 2\frac{d^2 u}{dy\,dz};$$

dieses Resultat nach x differentiirt gibt, bei Beachtung, dass $\frac{du}{dx} = \partial_x$ ist, die erste der folgenden Gleichungen; die zwei anderen werden in ähnlicher Weise erhalten:

$$
\left.
\begin{aligned}
2\frac{d^2\partial_x}{dy\,dz} &= \frac{d}{dx}\left(-\frac{dg_{yz}}{dx} + \frac{dg_{zx}}{dy} + \frac{dg_{xy}}{dz}\right), \\
2\frac{d\partial_y}{dz\,dx} &= \frac{d}{dy}\left(\frac{dg_{yz}}{dx} - \frac{dg_{zx}}{dy} + \frac{dg_{xy}}{dz}\right), \\
2\frac{d\partial_z}{dx\,dy} &= \frac{d}{dz}\left(\frac{dg_{yz}}{dx} + \frac{dg_{zx}}{dy} - \frac{dg_{xy}}{dz}\right).
\end{aligned}
\right\} \qquad (27)
$$

Damit also sechs Functionen von x, y, z die drei specifischen Dehnungen und die drei Verschiebungen vorstellen können, müssen dieselben ebensowohl den Gleichungen (26) als auch den Gleichungen (27) entsprechen.

14. Bestimmung des Elasticitäts-Gleichgewichtes eines beliebigen Kräften unterworfenen festen Körpers. — Die allgemeine und directe Auflösung dieses Problems fordert, dass man in den Gleichungen (13) die Werthe der elastischen Kräfte p_{xx}, p_{yy}, etc. einsetzt, wie sie in Functionen der drei specifischen Dehnungen und der drei Verschiebungen durch die Gleichungen (12) oder (17), (18), (20), (21) gegeben wurden, je nachdem der homogene Körper eine absolut beliebige Gestalt hat, oder in jedem Punkte eine oder drei Symmetrieebenen besitzt, oder eine Elasticitätsachse hat oder endlich isotrop ist.

In diesen so erhaltenen Differentialgleichungen der ersten Ordnung substituirt man für ∂_x, ∂_y, ∂_z, g_{yz}, g_{zx}, g_{xy} deren Werthe in Functionen der drei Verrückungen u, v, w und erhält dadurch drei Differentialgleichungen zwischen diesen drei Unbekannten. Diese Gleichungen müssten sodann integrirt werden, indem man die beliebigen Functionen der Coordinaten derartig bestimmt, dass den drei Bedingungsgleichungen für die Oberfläche in allen Punkten derselben Genüge gethan wird.

Dies wäre der directe Weg, welchen man zu verfolgen hätte.

Die Integrationen, welche derselbe erfordert, sind aber so schwierig, dass sie die Kräfte der jetzigen analytischen Wissenschaft noch übersteigen und man auf diese Weise bis jetzt nicht einmal die einfachsten derartigen Probleme lösen konnte.

Um nun diejenigen Fälle zu behandeln, welchen man in der Praxis oft begegnet, musste man den umgekehrten Weg einschlagen. Die Erfahrung hat uns gelehrt, im Innern der festen Körper eine gewisse Vertheilung der elastischen Kräfte vorauszusetzen, und man hat versucht, sich zu überzeugen, ob diese Vertheilung den Gleichungen des Elasticitäts-Gleichgewichtes ebenso für das Innere als auch für die Oberfläche entspricht.

Man ist hiebei zu dem Resultate gekommen, dass in den einfachen Fällen der gleichmässigen Pressung auf die ganze Oberfläche eines Körpers oder der Längsdehnung eines Prismas allen diesen Gleichungen zur Genüge entsprochen wird; während in den viel complicirteren Fällen, welche aber die wichtigsten sind, d. h. in den Fällen der Torsion oder der Biegung oder des Abscheerens eines Prismas oder Cylinders die vorausgesetzten Kräfte den Gleichgewichtsgleichungen nicht entsprechen.

Für diese letzteren hat M. Barré de Saint-Venant eine sehr scharfsinnige Idee entwickelt, indem er nur einen Theil der elastischen Kräfte als bekannt vorausgesetzt hat, d. h. jene Kräfte, welche man mit grösserer Berechtigung genau annehmen kann; die anderen elastischen Kräfte hat er unbestimmt gelassen. Indem er nun ausdrückt, dass allen Gleichgewichtsbedingungen entsprochen wird, kommt er zu dem Resultate, dass die angenommenen Kräfte wirklich genügen, und erhält zwischen den unbestimmt gelassenen Kräften eine Gleichung mit partiellen Differentialen, welche zu deren Bestimmung genügt, indem sie in der Mehrzahl der Fälle integrirt werden kann.

Wir werden die erhaltene Auflösung kurz gefasst bekannt geben, indem wir uns immer auf die Hauptsache beschränken. Aber vorerst ist es nothwendig, eine wichtige Bemerkung zu machen.

Man könnte vielleicht fürchten, dass diese auf indirectem Wege erhaltenen Auflösungen nur theilweise Lösungen sind, welche uns nicht die wahren Gleichgewichtsbedingungen der festen Körper zu erkennen geben; aber es ist klar, dass jedem System von äusseren Kräften, welche auf einen elastischen Körper wirken, ein besonderer Zustand des Elasticitäts-Gleichgewichtes entspricht, und dass dieser Zustand einzig ist. Es folgt daraus, dass, wenn man für einen gegebenen Körper die elastischen Kräfte findet, welche einem System von äusseren Kräften das Gleich-

gewicht halten, die Lösung eine einzige ist, und dass sie daher immer die gleiche bleibt, welches auch der Weg ist, auf dem sie erhalten wurde.

In allen folgenden Problemen setzen wir voraus, dass die betrachteten Körper nur Kräften unterworfen sind, welche auf die Oberfläche wirken, d. h. keiner Kraft, welche wie die Schwerkraft auf die ganze Masse wirkt; es werden daher stets die Gleichungen (14) das Elasticitäts-Gleichgewicht im Innern eines festen Körpers ausdrücken.

15. Körper von beliebiger Fläche, welche auf ihrer ganzen Oberfläche einem normalen und gleichmässigen Drucke ausgesetzt sind. — Ein homogener Körper von beliebiger Form sei an der Oberfläche einem normalen Drucke von q Kilogr. per Quadratmeter ausgesetzt. In diesem Falle muss man in den Gleichungen (23), welche das Gleichgewicht an der Oberfläche ausdrücken,

$$\overline{\omega} = q, \qquad \alpha' = 180^0 + \alpha, \qquad \beta' = 180^0 + \beta, \qquad \gamma' = 180^0 + \gamma,$$

setzen, so dass man folgende Gleichungen erhält:

$$(p_{xx} + q)\cos\alpha + p_{xy}\cos\beta + p_{zx}\cos\gamma = 0,$$
$$p_{xy}\cos\alpha + (p_{yy} + q)\cos\beta + p_{yz}\cos\gamma = 0,$$
$$p_{zx}\cos\alpha + p_{yz}\cos\beta + (p_{zz} + q)\cos\gamma = 0.$$

Diesen Gleichungen wird entsprochen, wenn

$$p_{xx} = p_{yy} = p_{zz} = -q, \qquad p_{yz} = p_{zx} = p_{xy} = 0; \tag{28}$$

es wäre nun zu untersuchen, ob diese Vertheilung der elastischen Kräfte im Innern möglich ist.

Zuerst sieht man, dass den drei unbestimmten Gleichungen (14) durch die Annahme (28) entsprochen wird, denn alle Differentialquotienten der elastischen Kräfte sind Null.

Wenn man weiters in den allgemeinen Gleichungen (12) für p_{xx}, p_{yy}, p_{zz} den Werth $-q$ und für p_{yz}, p_{zx}, p_{xy} den Werth Null einsetzt, so erhält man für die drei specifischen Dehnungen und die drei Verschiebungen constante Werthe, welche proportional zu q sind, so dass hiedurch auch allen Gleichungen (26) und (27) entsprochen wird.

Die erhaltenen elastischen Kräfte sind also diejenigen, welche unter dem Einflusse der gleichmässigen äusseren Pressung in dem Körper wirklich stattfinden.

Wenn der Körper in jedem Punkte drei Symmetrieebenen hat, welche senkrecht auf die Coordinatenachsen stehen, so zeigen die Gleichungen (18), dass

$$g_{yz} = 0, \qquad g_{zx} = 0, \qquad g_{xy} = 0,$$

d. h. dass die Verschiebungen überall Null sind.

Wenn der Körper isotrop ist, so werden aus den drei ersten Gleichungen (21) folgende:

$$-\frac{q}{F} = 3\,\partial_x + \partial_y + \partial_z,$$

$$-\frac{q}{F} = \partial_x + 3\,\partial_y + \partial_z,$$

$$-\frac{q}{F} = \partial_x + \partial_y + 3\,\partial_z,$$

woraus man erhält

$$\partial_x = \partial_y = \partial_z = -\frac{1}{5}\frac{q}{F};$$

und die cubische Compression ist

$$-\theta = -(\partial_x + \partial_y + \partial_z) = \frac{3}{5}\frac{q}{F}.$$

Wir werden später sehen, dass der Werth, welchen man gewöhnlich *Elasticitätscoëfficient* nennt, und welchen man mit dem Buchstaben E bezeichnet, durch die Gleichung

$$E = \frac{5}{2}F \tag{29}$$

gegeben ist, so dass

$$\partial_x = \partial_y = \partial_z = -\frac{q}{2E}; \tag{30}$$

$$-\theta = \frac{3q}{2E}. \tag{31}$$

16. Ein Prisma oder Cylinder werde durch Kräfte gezogen, welche auf den Grundflächen gleichmässig vertheilt sind und in der Richtung der Achse wirken. — Wir denken uns ein Prisma oder einen Cylinder, auf dessen seitlicher Oberfläche keine Kraft thätig ist, auf dessen Grundflächen aber normale und gleichmässig vertheilte Kräfte in der Stärke von p Kilogr. per Quadratmeter wirken. Nimmt man als x-Achse eine Parallele zur Cylinderachse, so hat man für alle Punkte der seitlichen Oberfläche

$$\varpi = 0, \qquad \cos\alpha = 0, \qquad \cos\gamma = \sin\beta;$$

womit sich die Bedingungsgleichungen für die Oberfläche folgendermassen gestalten:

$$p_{xy}\cos\beta + p_{zx}\sin\beta = 0,$$
$$p_{yy}\cos\beta + p_{yz}\sin\beta = 0,$$
$$p_{yz}\cos\beta + p_{zz}\sin\beta = 0;$$

und nachdem diesen Gleichungen entsprochen werden muss, welches auch die Lage des betrachteten Oberflächenelementes sei, d. h. welches auch der Werth von β sei, so muss man untersuchen, ob für alle Punkte der seitlichen Oberfläche

$$p_{yy} = 0, \quad p_{zz} = 0, \quad p_{yz} = 0, \quad p_{zx} = 0, \quad p_{xy} = 0. \tag{32}$$

Für alle Punkte der beiden Grundflächen hat man

$$\overline{\omega} = p, \qquad \cos\beta = \cos\beta' = 0, \qquad \cos\gamma = \cos\gamma' = 0;$$

für eine der Grundflächen hat man

$$\cos\alpha = \cos\alpha' = 1,$$

während für die andere

$$\cos\alpha = \cos\alpha' = -1;$$

hieraus ergeben sich als Bedingungsgleichungen für die Grundflächen des Prismas oder Cylinders folgende drei Gleichungen:

$$p_{xx} = p, \qquad p_{xy} = 0, \qquad p_{zx} = 0.$$

Den Gleichungen (23) wird also für alle Punkte der Oberfläche entsprochen, wenn für alle Punkte des Körpers

$$p_{xx} = p, \qquad p_{yy} = p_{zz} = p_{yz} = p_{zx} = p_{xy} = 0. \tag{33}$$

Nachdem alle diese Kräfte constant sind, sind auch alle ihre Differentialquotienten gleich Null, und es wird somit den unbestimmten Gleichungen (14) Genüge gethan. Wenn man ferner mit Hilfe der Gleichungen (12) die Bedingungen (33) ausdrückt und die so erhaltenen sechs Gleichungen nach ∂_x, ∂_y, ∂_z, g_{yz}, ... auflöst, erhält man Resultate von folgender Form

$$\left.\begin{aligned} \partial_x &= \frac{p}{E}, & \partial_y &= -\eta\,\frac{p}{E}, & \partial_x &= -\eta'\,\frac{p}{E}, \\ g_{yz} &= \frac{p}{H_1}, & g_{zx} &= \frac{p}{H_2}, & g_{xy} &= \frac{p}{H_3}, \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

worin E, η, η', H_1, H_2, H_3 constante Coëfficienten sind.

Wir nennen *normalen Elasticitätscoëfficienten* die Grösse E und *Contractionscoëfficienten* die Werthe η und η', welche die Beziehungen zwischen den transversalen Contractionen des Prismas in der Richtung der y- und z-Achse und der Längsdehnung desselben ausdrücken.

Nachdem die durch die Gleichungen (34) gegebenen Dehnungen und Verschiebungen alle constant sind, genügen dieselben offenbar den Bedingungsgleichungen (26) und (27), woraus folgt, dass in der durch die Annahme (33) gegebenen Auflösung die wirkliche Lösung des Problems liegt.

Dieselbe zeigt uns, dass ein Prisma oder ein Cylinder, welcher nur an seiner Grundfläche von gleichmässig vertheilten und nach dessen Achse gerichteten Kräften beansprucht wird, sich in dieser Richtung ausdehnt und quer dazu sich zusammenzieht, und dass in einem beliebigen Querschnitte parallel zur Grundfläche es nur eine mit der Richtung der Achse des Prismas zusammenfallende Spannung gibt, deren Grösse gleich ist den in den Grundflächen thätigen Spannungen.

Wenn der Körper in jedem Punkte drei Symmetrieebenen besitzt, muss man die Bedingungen (33) mit Hilfe der Gleichungen (18) ausdrücken; in diesem Falle werden die Verschiebungen g_{yz}, g_{zx}, g_{xy} für alle Punkte gleich Null, und man hat zur Bestimmung der Dehnungen ∂_x, ∂_y, ∂_z die drei Gleichungen

$$p = a_1\,\partial_x + F_3\,\partial_y + F_2\,\partial_z,$$
$$0 = F_3\,\partial_x + a_2\,\partial_y + F_1\,\partial_z,$$
$$0 = F_2\,\partial_x + F_1\,\partial_y + a_3\,\partial_z,$$

und indem man der Abkürzung halber

$$a_1\,a_2\,a_3 - a_1\,F_1^2 - a_2\,F_2^2 - a_3\,F_3^2 + 2\,F_1\,F_2\,F_3 = K \tag{35}$$

setzt, erhält man

$$\left.\begin{aligned} \partial_x = \frac{a_2\,a_3 - F_1^2}{K}\,p, \qquad \partial_y = -\frac{a_3\,F_3 - F_1\,F_2}{K}\,p, \\ \partial_z = -\frac{a_2\,F_2 - F_1\,F_3}{K}\,p. \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

Wenn man diese Ausdrücke für die Dehnungen mit jenen durch die Gleichungen (34) gegebenen vergleicht, erhält man

$$E = \frac{K}{a_2\,a_3 - F_1^2}, \quad \eta = \frac{a_3\,F_3 - F_1\,F_2}{a_2\,a_3 - F_1^2}, \quad \eta' = \frac{a_2\,F_2 - F_1\,F_3}{a_2\,a_3 - F_1^2}. \tag{37}$$

Ist die x-Achse eine Elasticitätsachse, so hat man nach Obigem

$$a_2 = a_3 = 3 F_1 , \qquad F_2 = F_3 ;$$

man erhält also in diesem Falle

$$\left. \begin{aligned} K &= 4 F_1 (2 a_1 F_1 - F_2^2), \\ E &= \frac{2 a_1 F_1 - F_2^2}{2 F_1}, \qquad \eta = \eta' = \frac{1}{4} \frac{F_2}{F_1}. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Und wenn der Körper isotrop ist, hat man noch

$$a_1 = 3 F_1 , \qquad F_2 = F_1 = F,$$

und daher

$$E = \frac{5}{2} F, \qquad \eta = \frac{1}{4}. \quad (39)$$

Man sieht hieraus, dass für einen isotropen Körper der normale Elasticitätscoëfficient gleich ist dem zweiundeinhalbfachen tangentialen Elasticitätscoëfficienten, und dass die seitliche Contraction gleich ist dem Viertel der specifischen Längsdehnung.

17. Torsion eines homogenen Prismas oder Cylinders. — Es sei ein Prisma oder Cylinder gegeben, auf dessen seitliche Oberfläche keine Kraft wirkt, dessen Grundflächen aber durch Tangentialkräfte beansprucht werden, welche denselben zu drehen suchen.

Es wird angezeigt sein, zuerst das Gesetz zu bestimmen, nach welchem diese Kräfte auf die Grundflächen vertheilt sind, damit in jedem Querschnitte die elastischen Kräfte vollkommen gleich sind den auf die Grundfläche wirkenden äusseren Kräften.

Ferner wird die Annahme gemacht, dass die y- und die z-Achse in einer der Grundflächen liegen, dass folglich die x-Achse parallel zur Achse des Prismas ist, und dass die positiven Abscissen auf der Seite des Prismas liegen.

In einem Oberflächenelement parallel zu den Grundflächen, d. h. senkrecht auf die x-Achse, dürfen zufolge dem früher Gesagten nur die elastischen Tangentialkräfte p_{zx} und p_{xy} auftreten, und müssen dieselben die gleichen Werthe behalten, wenn man auch von einem Punkte eines Querschnittes auf den correspondirenden Punkt eines anderen Querschnittes übergeht, d. h. wenn man nur x ändert und für y und z dieselben Werthe behält. Es folgt daraus, dass die elastischen Kräfte nur Functionen von y und z sind, und dass somit

$$\frac{d\,p_{zx}}{d\,x} = 0, \qquad \frac{d\,p_{xy}}{d\,x} = 0 \text{ ist.}$$

Dies für alle Elemente jener Grundfläche vorausgesetzt, wofür $x = 0$ ist, gibt

$$\cos\alpha = -1, \qquad \cos\beta = 0, \qquad \cos\gamma = 0,$$

und für alle Elemente der anderen Grundfläche

$$\cos\alpha = 1, \qquad \cos\beta = 0, \qquad \cos\gamma = 0;$$

da aber die auf die Grundflächen wirkenden äusseren Kräfte senkrecht auf die x-Achse sind, so hat man für beide $\cos\alpha' = 0$, so dass die Gleichungen (23) die folgenden ergeben:

$$p_{xx} = 0, \qquad \overline{\omega}\cos\beta' = p_{xy}, \qquad \overline{\omega}\cos\gamma' = p_{zx}.$$

Für alle Elemente der seitlichen Oberfläche des Prismas oder des Cylinders hat man

$$\overline{\omega} = 0, \qquad \cos\alpha = 0, \qquad \cos\gamma = \sin\beta,$$

womit sich die Gleichungen (23) folgendermassen gestalten:

$$\begin{aligned} p_{xy}\cos\beta + p_{zx}\sin\beta &= 0, \\ p_{yy}\cos\beta + p_{yz}\sin\beta &= 0, \\ p_{yz}\cos\beta + p_{zz}\sin\beta &= 0. \end{aligned}$$

Die beiden Kräfte p_{zx} und p_{xy} können weder an der Oberfläche, noch im Innern gleich Null werden; die vier anderen p_{xx}, p_{yy}, p_{zz}, p_{yz} aber werden den zwei letzten, auf die seitliche Oberfläche Bezug habenden Gleichungen und derjenigen $p_{xx} = 0$ für die Grundfläche entsprechen, wenn sie überall Null sind.

Es ist also zu untersuchen, ob man für alle Punkte des Prismas

$$p_{xx} = 0, \quad p_{yy} = 0, \quad p_{zz} = 0, \quad p_{yz} = 0, \quad \frac{d\,p_{zx}}{d\,x} = 0, \quad \frac{d\,p_{xy}}{d\,x} = 0. \tag{40}$$

setzen kann.

Substituirt man diese Werthe in die unbestimmten Gleichungen (14) ein, so ersieht man daraus, dass den beiden letzten in gleicher Weise entsprochen wird, und dass die erstere

$$\frac{d\,p_{xy}}{d\,y} + \frac{d\,p_{zx}}{d\,z} = 0 \tag{41}$$

ergibt; es müssen also die Kräfte p_{zx} und p_{xy} im Innern des Prismas in der Art vertheilt sein, dass sie für alle Punkte des festen Körpers der Gleichung (41) entsprechen.

Aber ausserdem müssen diese Kräfte für alle Punkte der seitlichen Oberfläche, d. h. für alle Punkte der Contour eines beliebigen Querschnittes, der Gleichung

$$p_{xy} \cos\beta + p_{zx} \sin\beta = 0$$

entsprechen; da β der Winkel ist, welchen die Normale auf diese Contour mit der y-Achse bildet, so hat man

$$\operatorname{tang}\beta = -\frac{d\,y}{d\,z},$$

und aus obiger Gleichung wird sodann

$$p_{xy}\, d\,z - p_{zx}\, d\,y = 0. \tag{42}$$

Die Kräfte p_{zx} und p_{xy} dürfen daher nur Functionen von y und z sein und müssen für alle Punkte eines beliebigen Querschnittes der Gleichung (41) und für alle Punkte der Contour dieses Querschnittes der Gleichung (42) entsprechen.

Differentiirt man nun die sechs Gleichungen (12) nach x, so erhält man bei Berücksichtigung der Gleichungen (40) die folgende:

$$\frac{d\,\partial_x}{d\,x} = 0, \quad \frac{d\,\partial_y}{d\,x} = 0, \quad \frac{d\,\partial_z}{d\,x} = 0, \quad \frac{d\,g_{yz}}{d\,x} = 0, \quad \frac{d\,g_{zx}}{d\,x} = 0, \quad \frac{d\,g_{xy}}{d\,x} = 0.$$

Auf Grund dieser Resultate geben uns die Gleichungen (26) und (27)

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2\,g_{yz}}{d\,y\,d\,z} &= \frac{d^2\,\partial_y}{d\,z^2} + \frac{d^2\,\partial_z}{d\,y^2}, \\ \frac{d^2\,\partial_x}{d\,y^2} = 0, &\qquad \frac{d^2\,\partial_x}{d\,z^2} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

$$\frac{d}{d\,y}\left(\frac{d\,g_{zx}}{d\,y} - \frac{d\,g_{xy}}{d\,z}\right) = 0, \qquad \frac{d}{d\,z}\left(\frac{d\,g_{zx}}{d\,y} - \frac{d\,g_{xy}}{d\,z}\right) = 0.$$

Diese zwei letzten Gleichungen zeigen, dass die Grösse

$$\frac{d\,g_{zx}}{d\,y} - \frac{d\,g_{xy}}{d\,z}$$

weder eine Function von y, noch von z sein kann, und nachdem dieselbe auf Grund der Gleichungen

$$\frac{d\,g_{zx}}{d\,x} = 0, \qquad \frac{d\,g_{xy}}{d\,x} = 0$$

auch keine Function von x sein kann, so muss dieselbe constant sein, und man kann daher schreiben:

$$\frac{d\,g_{zx}}{d\,y} - \frac{d\,g_{xy}}{d\,z} = 2\,\theta, \tag{44}$$

wobei θ eine constante Grösse ist.

Substituirt man in diese Gleichungen

$$g_{zx} = \frac{d\,w}{d\,x} + \frac{d\,u}{d\,z}, \qquad g_{xy} = \frac{d\,u}{d\,y} + \frac{d\,v}{d\,x},$$

so erhält man

$$\frac{d^2\,w}{d\,x\,d\,y} - \frac{d^2\,v}{d\,z\,d\,x} = 2\,\theta;$$

und nachdem

$$\frac{d\,g_{yz}}{d\,x} = 0, \quad \text{oder} \quad \frac{d^2\,v}{d\,z\,d\,x} + \frac{d^2\,w}{d\,x\,d\,y} = 0,$$

so ergibt sich

$$\frac{d^2\,w}{d\,x\,d\,y} = \theta, \qquad \frac{d^2\,v}{d\,z\,d\,x} = -\,\theta.$$

Wenn man diese beiden Gleichungen unter der Voraussetzung integrirt, dass derjenige Punkt, welcher vor der Deformation mit dem Anfangspunkt der Coordinaten zusammenfällt, fix bleibt, und dass der unendlich nahe Punkt auf der x-Achse sich auch nach der Deformation dort befinde, d. h. wenn für $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ das Resultat der Integration

$$v = 0, \qquad w = 0, \qquad \frac{d\,v}{d\,x} = 0, \qquad \frac{d\,w}{d\,x} = 0$$

ist, so erhält man

$$w = \theta\,x\,y, \qquad v = -\,\theta\,x\,z;$$

setzt man diese Werthe für v und w in die Ausdrücke für g_{zx} und g_{xy} ein, so folgt daraus, dass

$$g_{zx} = \frac{d\,u}{d\,z} + \theta\,y, \qquad g_{xy} = \frac{d\,u}{d\,y} - \theta\,z. \tag{45}$$

Das Ergebniss dieser Untersuchung zeigt also, dass die drei specifischen Dehnungen und die drei Verschiebungen nur solche Functionen von y und z sein dürfen, welche den Differentialgleichungen (43) und (44)

entsprechen, und welche für die Kräfte p_{zx} und p_{xy} Werthe geben, die sowohl der Gleichung (41) für alle Werthe von y und z, als auch der Gleichung (42) für alle Contourpunkte der Querschnitte entsprechen.

Wir wollen nun jene Fälle ins Auge fassen, wo das Problem in endlichen Ausdrücken gelöst werden kann; vorerst müssen wir aber beachten, dass, wenn p_{zx} und p_{xy} als Functionen von y und z betrachtet werden, die Gleichung (41) die Bedingung der Integrirbarkeit der Gleichung (42) ausdrückt, so zwar, dass, wenn die für p_{zx} und p_{xy} gefundenen zwei Functionen der Gleichung (41) entsprechen und man dieselben in die Gleichung (42) einsetzt, die resultirende Gleichung direct integrirbar sein wird.

18. Fortsetzung der Betrachtungen über die Torsion. — Homogenes Prisma von beliebigem Gefüge mit elliptischem Querschnitte. — Hat ein Körper ein beliebiges Gefüge, so werden die elastischen Kräfte mittelst der Gleichungen ~~(12)~~ in Functionen der specifischen Dehnungen und der Verschiebungen ausgedrückt; macht man nun in den vier ersten $p_{xx} = 0$, $p_{yy} = 0$, $p_{zz} = 0$, $p_{yz} = 0$, so erhält man die Werthe von ∂_x, ∂_y, ∂_z, g_{yz} in Functionen von g_{zx} und g_{xy}, und es sind diese Ausdrücke linear; wenn also die Verschiebungen g_{zx} und g_{xy} lineare Functionen von y und z sind, so sind es auch die Dehnungen ∂_x, ∂_y, ∂_z und die Verschiebung g_{yz}. Folglich geben die zwei letzten Gleichungen ~~(12)~~ für p_{zx} und p_{xy} lineare Functionen von y und z, d. h. Ausdrücke von der Form

$$\left.\begin{aligned} p_{zx} &= A + B y + C z, \\ p_{xy} &= A_1 + B_1 y + C_1 z, \end{aligned}\right\} \qquad (46)$$

worin A, B, C, A_1, B_1, C_1 constante Coëfficienten sind.

Nachdem die Dehnungen und Verschiebungen lineare Functionen von y und z sind, wird den Gleichungen (43) und (44) vollständig entsprochen; ebenso genügen die für p_{zx} und p_{xy} gegebenen Ausdrücke der unbestimmten Gleichung (41) unter der Voraussetzung, dass

$$B_1 + C = 0; \qquad (47)$$

unter Berücksichtigung dieser Beziehung, und indem man in der Gleichung (42) für p_{zx} und p_{xy} deren Ausdrücke in Functionen von y und z einsetzt, erhält man die Differentialgleichung

$$A_1\, d\, z - A\, d\, y - C(y\, d\, z + z\, d\, y) + C_1\, z\, d\, z - B\, y\, d\, y = 0,$$

welcher für die ganze Contour der Querschnitte entsprochen werden muss. Es muss also die Gleichung dieser Contour das Integral obiger Gleichung sein, d. h.

$$A_1\, z - A\, y - C\, y\, z + \frac{1}{2}\, C_1\, z^2 - \frac{1}{2}\, B\, y^2 = D, \tag{48}$$

wobei D eine beliebige Constante ist.

Man sieht hieraus, dass die Querschnittscontour eine Curve zweiten Grades sein muss; sie könnte eine Parabel oder eine Hyperbel sein, aber dann würde das Prisma eine unendliche Querschnittsfläche haben; es erübrigt daher nur den Fall zu betrachten, in welchem der Querschnitt elliptisch ist.

Hat man also ein Prisma von elliptischem Querschnitt, welches homogen ist, aber sonst ein beliebiges Gefüge hat, und sucht man dasselbe um eine zu dessen Achse parallele Linie zu drehen, so zwar, dass die elastischen Kräfte eines beliebigen Querschnittes gleich sind den auf die Grundflächen wirkenden Tangentialkräften, so schreibt man die Gleichung des Querschnittes des Prismas, indem man dieselbe auf zwei durch den Durchstosspunkt der Drehungsachse mit dem Querschnitte gehende rechtwinkelige Achsen bezieht; sodann vergleicht man diese Gleichung mit der Gleichung (48), damit diese die gleiche Ellipse darstelle, was dadurch erreicht wird, dass man ausdrückt, dass die Coëfficienten der Gleichung (48) proportional sind zu jenen der Gleichung der gegebenen Ellipse; man erhält also fünf Beziehungen zwischen den Coëfficienten A, A_1, B, C, C_1, D, und indem man hiezu die Gleichung (47) gibt, hat man sechs Gleichungen zwischen den sechs Coëfficienten der Gleichungen (46) und der beliebigen Constanten D.

Um noch eine andere Beziehung zu finden, welche im Vereine mit den sechs vorhergehenden die zur Bestimmung der Unbekannten nothwendige Zahl der Gleichungen vervollständigen soll, wäre zu beachten, dass, wenn die Summe der Momente aller auf eine Grundfläche wirkenden Kräfte auf die Torsionsachse bezogen, d. h. das Torsionsmoment des Prismas M genannt wird, man folgende Gleichung hat:

$$M = \sum (p_{zx}\, y - p_{xy}\, z)\, d\, \varpi. \tag{49}$$

Hiebei ist $d\omega$ ein Oberflächenelement der Grundfläche, und die Summe $\sum$ muss sich auf die ganze Grundfläche erstrecken. Indem man für p_{zx} und p_{xy} deren Ausdrücke (46) einsetzt, erhält man

$$\left. \begin{aligned} M = A\,\Sigma\, y\, d\omega - A_1\,\Sigma\, z\, d\omega + B\,\Sigma\, y^2\, d\omega - C_1\,\Sigma\, z^2\, d\omega \\ + 2\,C\,\Sigma\, y\, z\, d\omega, \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

welches die letzte Beziehung zwischen den unbekannten Grössen ist.

Wenn also ein Prisma von beliebiger Gestalt gegeben ist, so kann das Problem der Torsion nur dann in endlichen Werthen gelöst werden, wenn der Querschnitt eine Ellipse ist.

19. Fortsetzung über die Torsion. — Homogenes Prisma, welches in jedem Punkte eine zu den Grundflächen parallele Symmetrieebene oder auch drei Symmetrieebenen hat, deren eine parallel zu den Grundflächen ist. — Besitzt das Prisma in jedem Punkte eine zu dessen Achse senkrechte Symmetrieebene, so lassen sich die elastischen Kräfte in Functionen der specifischen Dehnungen und Verschiebungen mit Hilfe der Gleichungen (17) ausdrücken. Wenn man zufolge der Hypothese (40) in den vier ersten Gleichungen

$$p_{xx} = 0, \qquad p_{yy} = 0, \qquad p_{zz} = 0, \qquad p_{yz} = 0$$

setzt, erhält man

$$\partial_x = 0, \qquad \partial_y = 0, \qquad \partial_z = 0, \qquad g_{yz} = 0,$$

woraus folgt, dass den Gleichungen (43) gleichfalls entsprochen wird. Für g_{zx} und g_{xy} kann man daher beliebige Functionen von y und z wählen, vorausgesetzt, dass dieselben der Gleichung (44) genügen, und dass die beiden Kräfte p_{zx} und p_{xy}, welche man hieraus mittelst der zwei letzten Gleichungen (17) ableitet, der unbestimmten Gleichung (41) für alle Werthe von y und z und der Gleichung (42) für alle Werthe von y und z der Querschnittscontour entsprechen.

Denkt man sich nun für g_{zx} und g_{xy} zwei beliebige Functionen von y und z gewählt, welche mehrere unbestimmte Coëfficienten enthalten, so erhält man durch Einsetzen dieser Functionen in die Gleichung (44) zwischen den unbekannten Coëfficienten gewisse Beziehungen, wodurch die Zahl derselben vermindert wird; substituirt man dieselben sodann in die zwei letzten Gleichungen (17) und setzt die so erhaltenen Aus-

drücke in die Gleichung (41), welche für alle Werthe von y und z bestehen muss, so ergeben sich neue Beziehungen zwischen den unbestimmten Coëfficienten, deren Anzahl dadurch noch kleiner wird; wenn man schliesslich die Ausdrücke von g_{zx} und g_{xy} in die Gleichung (42) einsetzt, indem man gleichzeitig die zwischen den unbekannten Coëfficienten erhaltenen Beziehungen berücksichtigt, erhält man eine *direct integrirbare* Differentialgleichung, welche der Querschnittscontour entsprechen wird; durch Integration dieser Gleichung erhält man in endlichen Ausdrücken die Gleichung der Contour, welche der Querschnitt des Prismas haben muss, damit die für g_{zx} und g_{xy} angenommenen Werthe möglich sind.

Diese Contourgleichung enthält im Allgemeinen noch mehrere unbestimmte Coëfficienten, über welche man verfügen kann, so dass diese Gleichung wenigstens annäherungsweise eine gegebene Curve darstellt.

Man sieht also, dass für ein Prisma, welches in jedem Punkte eine Symmetrieebene hat, das Problem der Torsion, wenigstens annäherungsweise, gelöst ist, welches auch die Form des Querschnittes sei.

Wenn das Gefüge des Körpers noch bestimmter ist, d. h. wenn derselbe in jedem Punkte drei Symmetrieebenen besitzt, deren eine senkrecht auf die Achse des Prismas ist, so wird sich die Auflösung des Problems noch mehr vereinfachen, denn in diesem Falle hat man, zufolge der Gleichungen (18)

$$p_{zx} = F_2\, g_{zx}\,, \qquad p_{xy} = F_3\, g_{xy}\,,$$

und bei Berücksichtigung der Gleichungen (45),

$$p_{zx} = F_2 \left(\frac{d\,u}{d\,z} + \theta\, y\right), \qquad p_{xy} = F_3 \left(\frac{d\,u}{d\,y} - \theta\, z\right), \tag{51}$$

welche Formeln augenscheinlich der Gleichung (41) entsprechen.

Durch Substitution dieser Ausdrücke von p_{zx} und p_{xy} in die Gleichungen (41) und (42) erhält man die Gleichungen

$$F_3\,\frac{d^2 u}{d\,y^2} + F_2\,\frac{d^2 u}{d\,z^2} = 0, \tag{52}$$

$$F_3 \left(\frac{d\,u}{d\,y} - \theta\, z\right) d\,z - F_2 \left(\frac{d\,u}{d\,z} + \theta\, y\right) d\,y = 0, \tag{53}$$

von welchen die erste für alle Werthe von y und z, die zweite hingegen nur für die Querschnittscontour bestehen muss.

Nunmehr wollen wir für zwei Fälle, welche die wichtigsten der Praxis sind, die Auflösung des Problems suchen.

20. Fortsetzung über die Torsion. — Prisma mit rechtwinkeligem Querschnitte. — Wir denken uns, dass von den Flächen des Prismas je zwei parallel zu drei Symmetrieebenen sind, und nennen b und c die zur y- und z-Achse parallelen Seiten des Querschnittes.

In diesem Falle hat man für die zur y-Achse parallele Seite des Querschnittes die Gleichung $\frac{dz}{dy} = 0$, welches auch der Werth von y sei, und für die zur z-Achse parallele Seite $\frac{dy}{dz} = 0$, wie gross auch z sei. Aus der Gleichung (53) leiten sich daher folgende zwei Bedingungen ab:

$\frac{du}{dy} - \theta z = 0$, für $y = \pm \frac{b}{2}$, welchen Werth zwischen $-\frac{c}{2}$ und $\frac{c}{2}$ z auch habe,

$\frac{du}{dz} + \theta y = 0$, für $z = \pm \frac{c}{2}$, welchen Werth zwischen $-\frac{b}{2}$ und $\frac{b}{2}$ y auch habe;

die Integration der Gleichung (52) muss ferner ein Resultat geben, welches diesen zwei Bedingungen entspricht.

Der unbestimmten Gleichung (52) wird, wie man sich leicht überzeugen kann, entsprochen, wenn man

$$u = \theta y z + \sum A_n \left(e^{\alpha m z} - e^{-\alpha m z}\right) \sin m y$$

macht, wie gross hiebei auch die Zahl der in der Summe Σ enthaltenen Ausdrücke sei, vorausgesetzt, dass für alle diese Ausdrücke

$$\alpha = \sqrt{\frac{F_3}{F_2}}$$

ist; die Grössen A_n und m können sich übrigens in den verschiedenen Gliedern ändern und sind in der Weise zu bestimmen, dass der Ausdruck von u den zwei Bedingungen entspricht, in welche die Gleichung (53) für die Contour getheilt wurde.

Die erste dieser Bedingungen, d. i.

$$\frac{d\,u}{d\,y} - \theta\,z = 0 \quad \text{für} \quad y = \pm\frac{b}{2},$$

ergibt, wenn man für u dessen Werth einsetzt,

$$\sum A_n \left(e^{\alpha m z} - e^{-\alpha m z}\right) m \cos\frac{m\,b}{2} = 0;$$

und nachdem dieser Gleichung für alle Werthe von z zwischen $-\frac{c}{2}$ und $\frac{c}{2}$ entsprochen werden soll, muss für alle Ausdrücke der Summe

$$\cos\frac{m\,b}{2} = 0$$

sein; und folglich, wenn man n eine beliebige ganze Zahl nennt,

$$\frac{m\,b}{2} = \frac{2\,n - 1}{2}\pi \quad \text{oder} \quad m = \frac{(2\,n - 1)\,\pi}{b}.$$

Es wird also der Ausdruck für u

$$u = \theta\,y\,z + \sum A_n \left(e^{\frac{\alpha(2n-1)\pi z}{b}} - e^{-\frac{\alpha(2n-1)\pi z}{b}}\right) \sin\frac{(2\,n - 1)\,\pi\,y}{b}.$$

Drückt man nun mit Hilfe dieser Gleichung die zweite Bedingung aus, d. h.

$$\frac{d\,u}{d\,z} + \theta\,y = 0 \quad \text{für} \quad z = \pm\frac{c}{2},$$

so erhält man die Gleichung

$$2\,\theta\,y + \sum A_n \frac{\alpha(2n-1)\pi}{b}\left(e^{\frac{\alpha(2n-1)\pi c}{2b}} + e^{-\frac{\alpha(2n-1)\pi c}{2b}}\right) \sin\frac{(2n-1)\pi y}{b} = 0, \quad (54)$$

welche bestehen muss, welchen Werth zwischen $-\frac{b}{2}$ und $\frac{b}{2}$ y auch hat.

Die bekannte Formel von Lagrange ist:

$$\varphi(y) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{n=\infty} \sin\frac{(2\,n - 1)\,\pi\,y}{2\,l}\left(\int_0^l \varphi(y') \sin\frac{(2\,n - 1)\,\pi\,y'}{2\,l}\,d\,y'\right);$$

macht man

$$\varphi(y) = 2\,\theta\,y, \qquad \varphi(y') = 2\,\theta\,y',$$

so gestaltet sich dieselbe wie folgt:

$$2\,\theta\,y - \frac{4\,\theta}{l}\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\sin\frac{(2\,n-1)\,\pi\,y}{2\,l}\int_0^l y'\sin\frac{(2\,n-1)\,\pi\,y'}{2\,l}\,d\,y'\right) = 0;$$

und wenn man beachtet, dass

$$\int_0^l y'\sin\frac{(2\,n-1)\,\pi\,y'}{2\,l}\,d\,y' = \pm\frac{4\,l^2}{(2\,n-1)^2\,\pi^2},$$

so reducirt sich obige Formel auf

$$2\,\theta\,y - \frac{16\,l\,\theta}{\pi^2}\sum_{n=1}^{n=\infty}\left|\pm\frac{\sin\dfrac{(2\,n-1)\,\pi\,y}{2\,l}}{(2\,n-1)^2}\right| = 0,$$

wobei man das obere Zeichen in der Summe $\sum$ für ungerade Werthe von n und das untere Zeichen für gerade Werthe nehmen muss.

Der Vergleich dieser Formel mit derjenigen (54) ergibt, dass dieselben identisch werden, wenn man

$$2\,l = b,$$

$$A_n\,\frac{\alpha\,(2\,n-1)\,\pi}{b}\left(e^{\frac{\alpha(2n-1)\pi c}{2b}} + e^{-\frac{\alpha(2n-1)\pi c}{2b}}\right) = \mp\frac{16\,l\,\theta}{(2\,n-1)^2\,\pi^2}$$

macht; der Gleichung (54) wird also für alle beliebigen Werthe von y zwischen $-\frac{b}{2}$ und $\frac{b}{2}$ entsprochen, wenn man im Allgemeinen für einen beliebigen Werth von n

$$A_n = \mp\frac{8\,b^2\,\theta}{\alpha\,(2\,n-1)^3\,\pi^3\left[e^{\frac{\alpha(2n-1)\pi c}{2b}} + e^{-\frac{\alpha(2n-1)\pi c}{2b}}\right]},$$

setzt, wobei das obere Zeichen für alle ungeraden Werthe von n, das untere für die geraden Werthe zu nehmen ist.

Wenn man diesen Werth von A_n in den allgemeinen Ausdruck von u einsetzt, und wenn man die Ausdrücke

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2},\quad \frac{e^x + e^{-x}}{2},\quad \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},\quad \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}},$$

hyperbolischen Sinus, Cosinus, hyperbolische Tangente und Cotangente einer Grösse x nennt und dieselben durch die Symbole

sih, coh, tah, coth

darstellt, erhält man schliesslich die Gleichung

$$u = \theta \left[y z + \frac{8 b^2}{\alpha \pi^3} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n \operatorname{sih} \frac{\alpha (2n-1) \pi z}{b} \sin \frac{(2n-1) \pi y}{b}}{(2n-1)^3 \operatorname{coh} \frac{\alpha (2n-1) \pi c}{2b}} \right]. \quad (55)$$

Man kann sich überzeugen, dass eine Vertauschung von y in z, von F_2 in F_3, von b in c und ausserdem von θ in $-\theta$ weder die Gleichung (52), noch die aus der Gleichung (53) abgeleiteten, auf die Contour bezüglichen Bedingungen ändert, woraus folgt, dass man auch in der Gleichung (55) dieselbe Verwechslung durchführen kann und einen Ausdruck für u erhält, welcher wieder das Integral der Gleichung (52) ist, wenn man hiebei die aus der Gleichung (53) abgeleiteten Bedingungen berücksichtigt. Die Vertauschung von F_2 in F_3 bedingt auch eine Aenderung von α in $\frac{1}{\alpha}$, und erhält man somit:

$$u = -\theta \left[y z + \frac{8 c^2 \alpha}{\pi^3} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n \operatorname{sih} \frac{(2n-1) \pi y}{\alpha c} \sin \frac{(2n-1) \pi z}{c}}{(2n-1)^3 \operatorname{coh} \frac{(2n-1) \pi b}{2 \alpha c}} \right]. \quad (56)$$

Diese beiden so erhaltenen Formeln für u, welche zwar verschiedene Zusammensetzung zeigen, repräsentiren doch beide jene Flächen, in welche die — vor der Deformation ebenen — Querschnitte des Prismas durch die Deformation verwandelt wurden.

Mit Hilfe der Gleichungen (51) kann man nun die Formeln für die elastischen Kräfte p_{zx} und p_{xy} finden, und zwar erhält man, ebenso wie für u, auch für p_{zx} und p_{xy} je zwei Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} p_{zx} &= F_2 \theta \left[2y + \frac{8b}{\pi^2} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n \operatorname{coh} \frac{\alpha (2n-1) \pi z}{b} \sin \frac{(2n-1) \pi y}{b}}{(2n-1)^2 \operatorname{coh} \frac{\alpha (2n-1) \pi c}{2b}} \right] \\ &= -F_2 \theta \frac{8 c \alpha}{\pi^2} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n \operatorname{sih} \frac{(2n-1) \pi y}{\alpha c} \cos \frac{(2n-1) \pi z}{c}}{(2n-1)^2 \operatorname{coh} \frac{(2n-1) \pi b}{2 \alpha c}}, \end{aligned}\right\} \quad (57)$$

$$\left.\begin{aligned} p_{xy} &= F_3\,\theta\,\frac{8\,b}{\alpha\,\pi^2}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(-1)^n\,\mathrm{sih}\,\dfrac{\alpha\,(2\,n-1)\,\pi\,z}{b}\,\cos\dfrac{(2\,n-1)\,\pi\,y}{b}}{(2\,n-1)^2\,\mathrm{coh}\,\dfrac{\alpha\,(2\,n-1)\,\pi\,c}{2\,b}} \\ &= -F_3\,\theta\left\{2\,z+\frac{8\,c}{\pi^2}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(-1)^n\,\mathrm{coh}\,\dfrac{(2\,n-1)\,\pi\,y}{\alpha\,c}\,\sin\dfrac{(2\,n-1)\,\pi\,z}{c}}{(2\,n-1)^2\,\mathrm{coh}\,\dfrac{(2\,n-1)\,\pi\,b}{2\,\alpha\,c}}\right\}. \end{aligned}\right\} \quad (58)$$

In diesen Formeln erscheint die Grösse θ, welche die *Torsion des Prismas* ausdrückt, und zwar ist dies der Winkel, um welchen nach der Deformation ein Querschnitt in Bezug auf einen anderen in der Entfernung einer Einheit befindlichen Querschnitt gedreht worden ist.

Diese Erklärung von θ leitet sich aus den zwei Gleichungen

$$w = \theta\,x\,y, \qquad v = -\,\theta\,x\,z \quad \text{ab.}$$

Um nun aber den Torsionswinkel θ zu bestimmen, drücken wir denselben in einer Function des *Torsionsmomentes* aus, d. h. in einer Function der Summe der Momente aller auf die Grundfläche wirkenden Kräfte in Bezug auf die Torsionsachse. Wenn wir in einer Grundfläche ein Oberflächenelement $d\,y\,d\,z$ mit den Coordinaten y und z betrachten, so werden die in diesem Elemente wirkenden effectiven Kräfte $p_{zx}\,d\,y\,d\,z$ und $p_{xy}\,d\,y\,d\,z$ und deren Momente in Bezug auf die Torsionsachse $y\,p_{zx}\,d\,y\,d\,z$ und $-\,z\,p_{xy}\,d\,y\,d\,z$ sein; nennt man M das Torsionsmoment, so ist dasselbe

$$M = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} d\,y \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} (p_{zx}\,y - p_{xy}\,z)\,d\,z.$$

Substituirt man in diese Formel für p_{zx} und p_{xy} die ersten oder die zweiten Ausdrücke (57) und (58), so erhält man für das Moment M die zwei folgenden Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} M &= F_2\,\theta\,b^3\,c\left\{\frac{1}{3}-\frac{64}{\pi^5}\,\frac{b}{\alpha c}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\mathrm{tah}\,\dfrac{\alpha\,(2\,n-1)\,\pi\,c}{2\,b}}{(2\,n-1)^5}\right\} \\ &= F_3\,\theta\,b\,c^3\left\{\frac{1}{3}-\frac{64}{\pi^5}\,\frac{\alpha c}{b}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\mathrm{tah}\,\dfrac{(2\,n-1)\,\pi\,b}{2\,\alpha\,c}}{(2\,n-1)^5}\right\}. \end{aligned}\right\} \quad (59)$$

Mit Hilfe dieser Formeln (59) kann man den Torsionswinkel θ bestimmen, sobald das Torsionsmoment gegeben ist.

Die Formeln (59) können aber auch in eine für die Berechnung viel einfachere Form gebracht werden, denn in der That hat man gleichbedeutend

$$-\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\tanh \frac{\alpha(2n-1)\pi c}{2b}}{(2n-1)^5} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1-\tanh \frac{\alpha(2n-1)\pi c}{2b}}{(2n-1)^5} - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{(2n-1)^5};$$

und da man leicht berechnen kann, dass

$$\frac{64}{\pi^5} = 0{,}20914, \qquad \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{(2n-1)^5} = 1{,}00452,$$

$$\frac{64}{\pi^5} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{(2n-1)^5} = 0{,}21008,$$

so bekommen die Gleichungen (59) folgende Form:

$$\left.\begin{aligned} M &= F_2 \theta b^3 c \left\{ \frac{1}{3} - 0{,}21008 \frac{b}{\alpha c} + 0{,}20914 \frac{b}{\alpha c} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1-\tanh \frac{\alpha(2n-1)\pi c}{2b}}{(2n-1)^5} \right\} \\ &= F_3 \theta b c^3 \left\{ \frac{1}{3} - 0{,}21008 \frac{\alpha c}{b} + 0{,}20914 \frac{\alpha c}{b} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1-\tanh \frac{(2n-1)\pi b}{2\alpha c}}{(2n-1)^5} \right\}. \end{aligned}\right\} \quad (60)$$

Der erste Ausdruck für M ist mehr oder weniger convergent als der zweite, je nachdem die Grösse αc grösser oder kleiner als b ist, so dass man zur Erleichterung der Berechnung je nach dem zu behandelnden Falle sich des einen oder anderen Ausdruckes bedienen kann.

Nachdem

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}, \quad \text{und} \quad 1 - \tanh x = \frac{2}{e^{2x}+1},$$

sieht man, dass, wenn x eine genügend grosse Zahl ist, es auch die Grösse e^{2x} ist, so dass die Grösse $1 - \tanh x$ sehr klein wird; hieraus folgt, dass für den Gebrauch der Formeln (60) es im Allgemeinen genügt, eine sehr kleine Anzahl von Ausdrücken zu berechnen.

Besitzt der feste Körper in der Richtung der beiden Achsen der y und der z die gleiche Festigkeit, so kann man $F_2 = F_3$ und $\alpha = 1$ setzen, was die gegebenen Formeln etwas vereinfacht; dies ist wohl jener Fall, welchen man in der Praxis gewöhnlich annehmen muss, denn meistens kennt man nicht die beiden Coëfficienten F_2 und F_3, sondern nur einen Mittelwerth, und man muss daher diese zwei Coëfficienten als mit dem bekannten Mittelwerthe gleichwerthig betrachten.

Wenn die Elasticität in den zwei Richtungen der y und der z gleich ist und ausserdem der Querschnitt des Prismas ein Quadrat ist, also $\alpha = 1$ und $b = c$, so erhält man

$$M = F_2\,\theta\,b^4 \left\{ \frac{1}{3} - 0{,}21008 + 0{,}20914 \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1 - \operatorname{tah}\frac{(2n-1)\pi}{2}}{(2n-1)^5} \right\}; \quad (61)$$

Die Grösse zwischen den Klammern ist vollständig numerisch und kann sogleich berechnet werden; hiebei ist zu beachten, dass, um fünf Decimalstellen genau zu erhalten, es genügt, nur das erste Glied der durch das Symbol Σ angezeigten Reihe zu berechnen, so dass man leicht finden wird

$$M = 0{,}84368\; F_2\,\theta\,\frac{b^4}{6}.$$

Nachdem aber $\frac{b^4}{6}$ das *polare Trägheitsmoment* des Quadrates mit Bezug auf dessen Mittelpunkt ist, so hat man, wenn dieses Moment J genannt wird,

$$M = 0{,}84368\; F_2\,\theta\,J \quad (62)$$

anstatt

$$M = F_2\,\theta\,J,$$

was durch die alte Methode erhalten wird, wobei angenommen wurde, dass bei der Torsion die Querschnitte nach der Deformation eben bleiben.

21. Fortsetzung über die Torsion. — Prisma mit einem beliebigen Querschnitte. — Wir werden nun eine Methode verfolgen, welche derjenigen für den rechteckigen Querschnitt angewendeten entgegengesetzt ist, indem wir die Function u, welche jene gekrümmte Fläche darstellt, in welche die ebenen und auf die Achse des Prismas senkrecht stehenden Querschnitte verwandelt werden, als gegeben betrachten und sodann die Formel für die Contour der Querschnitte suchen.

Unter der unendlichen Zahl von Formen, welche man der Function u geben kann, wählen wir

$$u = C f(\beta y + \gamma z),$$

wobei C, β, γ constante Coëfficienten sind. Wir finden daraus

$$\frac{du}{dy} = C\beta f'(\beta y + \gamma z), \qquad \frac{d^2 u}{dy^2} = C\beta^2 f''(\beta y + \gamma z),$$

$$\frac{du}{dz} = C\gamma f'(\beta y + \gamma z), \qquad \frac{d^2 u}{dz^2} = C\gamma^2 f''(\beta y + \gamma z),$$

und nach Substitution dieser Ausdrücke in die Gleichung (52) ersehen wir, dass derselben entsprochen wird, wenn

$$F_3 \beta^2 + F_2 \gamma^2 = 0;$$

machen wir in dieser Gleichung $\beta = 1$, was die Allgemeinheit der Function nicht vermindert, so erhalten wir

$$\gamma = \pm \sqrt{\frac{F_3}{F_2}} \sqrt{-1};$$

es kann also die Function u auch in folgender Form geschrieben werden:

$$u = C f\left(y \pm \sqrt{\frac{F_3}{F_2}}\, z \sqrt{-1}\right).$$

Durch Entwicklung der rechten Seite der Gleichung und durch Vereinigung aller Ausdrücke, welche von $\sqrt{-1}$ unabhängig sind, und andererseits derjenigen, welche mit dieser Grösse multiplicirt werden, erhält man

$$u = C\left[\varphi(y, z) \pm \sqrt{-1}\, \psi(y, z)\right],$$

wobei φ und ψ zwei Functionen sind, welche man leicht bestimmen kann.

Es ist bekannt, dass, wenn mehrere Functionen von y und z der Gleichung (52) genügen, man dieselben addiren kann, nachdem jede derselben mit einer Constanten multiplicirt wurde, und dass man hiedurch eine Summe erhält, welche ebenfalls dieser Gleichung entspricht.

Da also die beiden Functionen

$$\varphi(y, z) + \sqrt{-1}\, \psi(y, z),$$
$$\varphi(y, z) - \sqrt{-1}\, \psi(y, z),$$

der Gleichung (52) genügen, kann man dieselben mit der gleichen Constante $\frac{1}{2} B_1$, oder auch die erste mit $-\frac{1}{2} C_1 \sqrt{-1}$ und die zweite mit $\frac{1}{2} C_1 \sqrt{-1}$ multipliciren und erhält sodann durch Addition die beiden

Functionen $\qquad B_1 \varphi(y, z), \qquad C_1 \psi(y, z),$

welche der Gleichung (52) entsprechen und deren Summe desgleichen genügen muss.

Wir können demzufolge für u einen genügend allgemeinen Ausdruck annehmen, und zwar von der Form

$$u = \sum \left[B_1 \varphi(y, z) + C_1 \psi(y, z) \right]. \tag{63}$$

Da man in diesem Ausdrucke eine beliebige Anzahl von Gliedern einführen kann, indem man jedem dieser Glieder einen beliebigen Coëfficienten gibt, und da diese Coëfficienten in der Gleichung der Contour erhalten bleiben, so kann man dieselben offenbar so wählen, dass sie, wenigstens annäherungsweise, eine beliebige Curve darstellen.

Nehmen wir z. B.

$$f\left(y \pm \sqrt{\frac{F_3}{F_2}} z \sqrt{-1}\right) = \left(y \pm \alpha z \sqrt{-1}\right)^n,$$

indem wir voraussetzen, dass n eine ganze Zahl sei, und dass

$$\alpha = \sqrt{\frac{F_3}{F_2}} \quad \text{ist.}$$

Durch Entwicklung ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} \varphi_n(y, z) &= y^n - \frac{n(n-1)}{1 \,.\, 2} \alpha^2 z^2 y^{n-2} \\ &\quad + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} \alpha^4 z^4 y^{n-4} - \ldots, \\ \psi_n(y, z) &= n \alpha \left[z y^{n-1} - \frac{(n-1)(n-2)}{2 \,.\, 3} \alpha^2 z^3 y^{n-3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5} \alpha^4 z^5 y^{n-5} - \ldots \right], \end{aligned}\right\} \tag{64}$$

wobei den Symbolen φ und ψ der Index n gegeben wurde, um hiedurch den Grad der durch diese Functionen dargestellten Polynome zu kennzeichnen.

Wenn wir nun

$$u = \sum \left[B_n \varphi_n (y, z) + C_n \psi_n (y, z)\right] \tag{65}$$

annehmen, wobei B_n und C_n beliebige Constante sind, und wenn wir diesen Ausdruck in die Gleichung (53), welche auch in der Form

$$\alpha^2 \frac{d u}{d y} d z - \frac{d u}{d z} d y - \theta (\alpha^2 z \, d z + y \, d y) = 0$$

geschrieben werden kann, einsetzen, erhalten wir

$$\sum B_n \left(\alpha^2 \frac{d \varphi_n}{d y} d z - \frac{d \varphi_n}{d z} d y\right) + \sum C_n \left(\alpha^2 \frac{d \psi_n}{d y} d z - \frac{d \psi_n}{d z} d y\right) \\ - \theta (\alpha^2 z \, d z + y \, d y) = 0;$$

aber man kann leicht erkennen, dass

$$\alpha^2 \frac{d \varphi_n}{d y} d z - \frac{d \varphi_n}{d z} d y = \alpha \, d \psi_n,$$

$$\alpha^2 \frac{d \psi_n}{d y} d z - \frac{d \psi_n}{d z} d y = - \alpha \, d \varphi_n;$$

das Integral obiger Gleichung ist also

$$\alpha \sum \left[B_n \psi_n (y, z) - C_n \varphi_n (y, z)\right] - \frac{\theta}{2} (\alpha^2 z^2 + y^2) = A, \tag{66}$$

wobei A eine constante Grösse ist.

Dies ist also die allgemeine Gleichung der Contour der Querschnitte, welche sich in Folge der Torsion nach der durch die Gleichung (65) dargestellten gebogenen Fläche krümmen.

Wenn man successive $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ etc. macht, so erhält die Formel (65) folgende Gestalt:

$$\left.\begin{array}{l} u = B_1 y + B_2 (y^2 - \alpha^2 z^2) + B_3 (y^3 - 3 \alpha^2 z^2 y) + B_4 (y^4 - 6 \alpha^2 z^2 y^2 + \alpha^4 z^4) + \ldots \\ + C_1 \alpha z + C_2 . 2 \alpha z y + C_3 (3 \alpha z y^2 - \alpha^3 z^3) + C_4 (4 \alpha z y^3 - 4 \alpha^3 z^3 y) + \ldots \end{array}\right\} \tag{67}$$

und aus der Gleichung (66), welche die Querschnittscontour darstellt, wird, indem man sie gleichzeitig durch α dividirt, folgende:

$$\left.\begin{array}{l} B_1\,\alpha z + B_2 . 2\,\alpha z y + B_3 (3\,\alpha z y^2 - \alpha^3 z^3) + B_4 (4\,\alpha z y^3 - 4\,\alpha^3 z^3 y) + \ldots \\ - C_1 y - C_2 (y^2 - \alpha^2 z^2) - C_3 (y^3 - 3\,\alpha^2 z^2 y) - C_4 (y^4 - 6\,\alpha^2 z^2 y^2 + \alpha^4 z^4) - \ldots \\ - \dfrac{\theta}{2\,\alpha} (y^2 + \alpha^2 z^2) \end{array}\right\} = \frac{A}{\alpha}. \quad (68)$$

Indem man auf der linken Seite der Gleichung eine genügend grosse Anzahl von Gliedern nimmt und deren Coëfficienten B_1, B_2, . . . C_1, C_2 . . . etc. passend bestimmt, kann man durch diese Gleichung, wenigstens annäherungsweise, jede beliebige Contour darstellen.

22. Fortsetzung über die Torsion. — Prisma mit einem elliptischen Querschnitte. — Ist der Querschnitt des Prismas eine Ellipse, so ist die Lösung dieses Problems der Torsion in dem unter der vorhergehenden Nummer behandelten Falle schon inbegriffen; setzen wir z. B. voraus, dass die Torsion um die Achse des Prismas stattfinde, und dass die Ebenen, welche durch diese Achse und durch die Ellipsenachsen gehen, parallel zu den Symmetrieebenen sind, und nennen wir die beiden Halbachsen der Ellipse b und c, so ist deren Gleichung

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (69)$$

Die Gleichung (68) nimmt, wenn sie nur auf die alleinigen Glieder zweiten Grades beschränkt wird, folgende Form an:

$$B_2 . 2\,\alpha z y - C_2 (y^2 - \alpha^2 z^2) - \frac{\theta}{2\,\alpha} (y^2 + \alpha^2 z^2) = \frac{A}{\alpha}.$$

Damit diese Gleichung mit derjenigen der Ellipse identisch wird, muss man die beliebigen Coëfficienten B_2, C_2, A in folgender Weise bestimmen

$$B_2 = 0, \qquad - \frac{\alpha\, C_2 + \dfrac{\theta}{2}}{A} = \frac{1}{b^2}, \qquad \frac{\alpha^2 \left(\alpha\, C_2 - \dfrac{\theta}{2}\right)}{A} = \frac{1}{c^2},$$

woraus man durch Elimination von A

$$\frac{\alpha\, C_2 + \dfrac{\theta}{2}}{\alpha\, C_2 - \dfrac{\theta}{2}} = - \frac{\alpha^2 c^2}{b^2}$$

erhält und folglich

$$C_2 = -\frac{\theta}{2\alpha} \cdot \frac{b^2 - \alpha^2 c^2}{b^2 + \alpha^2 c^2}.$$

Der Ausdruck von u für die betrachtete elliptische Contour lässt sich aus der Gleichung (67) ableiten, indem man alle beliebigen Coëfficienten gleich Null setzt, mit Ausnahme von C_2, welches den oben gefundenen Werth haben wird; wir erhalten somit

$$u = -\theta \frac{b^2 - \alpha^2 c^2}{b^2 + \alpha^2 c^2} y z. \tag{70}$$

Durch Einführung dieses Werthes von u in die Gleichung (51) und bei Beachtung, dass $\alpha^2 = \frac{F_3}{F_2}$, erhält man

$$\left.\begin{aligned} p_{zx} &= F_2 \theta \left(-\frac{b^2 - \alpha^2 c^2}{b^2 + \alpha^2 c^2} + 1 \right) y = \frac{2 F_2 F_3 c^2}{F_2 b^2 + F_3 c^2} \theta y, \\ p_{xy} &= F_3 \theta \left(-\frac{b^2 - \alpha^2 c^2}{b^2 + \alpha^2 c^2} - 1 \right) z = -\frac{2 F_2 F_3 b^2}{F_2 b^2 + F_3 c^2} \theta z. \end{aligned}\right\} \tag{71}$$

Wir wollen nun das Torsionsmoment M suchen, welches nach dem in Nummer 18 Angeführten durch die Formel

$$M = \iint (p_{zx} y - p_{xy} z)\, dy\, dz$$

ausgedrückt wird, wobei sich die Integration auf den ganzen Querschnitt erstreckt. In dieser Formel substituiren wir für p_{zx} und p_{xy} deren Werthe (71), und setzen zur Vereinfachung

$$\iint y^2\, dy\, dz = I_z, \qquad \iint z^2\, dy\, dz = I_y,$$

d. h., wir nennen $I y$ und $I z$ die Trägheitsmomente der Ellipse in Bezug auf die Hauptachsen c und b; unter diesen Voraussetzungen erhalten wir

$$M = \frac{2 F_2 F_3 (c^2 I_z + b^2 I_y)}{F_2 b^2 + F_3 c^2} \theta, \tag{72}$$

aus welcher Formel man den Werth des Torsionswinkels θ berechnen kann, sobald das Moment M gegeben ist.

Aus der Gleichung (70) kann man den Schluss ziehen, dass für alle Werthe von y und z $u = 0$ wird, sobald zwischen den Achsen b und c die Beziehung

$$b^2 - a^2 c^2 = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{b^2}{F_3} = \frac{c^2}{F_2} \tag{73}$$

besteht, d. h. sobald die Quadrate der Halbachsen proportional sind den tangentialen Elasticitätscoëfficienten in deren Richtungen. In diesem Falle bleiben die Querschnitte auch nach der Deformation eben.

Wenn die beiden Coëfficienten F_2 und F_3 gleich sind, was für jene Fälle gilt, wo die x-Achse eine Elasticitätsachse ist, oder wo der Körper isotrop ist, nehmen die Formeln (70), (71), (72) folgende Formen an:

$$\left.\begin{aligned} u = -\theta \frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2} y\, z, \quad p_{zx} = \frac{2\, F_2\, c^2\, \theta}{b^2 + c^2} y, \quad p_{xy} = -\frac{2\, F_2\, b^2\, \theta}{b^2 + c^2} z, \\ M = \frac{2\, F_2\, (c^2\, I_z + b^2\, I_y)}{b^2 + c^2}\, \theta; \end{aligned}\right\} \tag{74}$$

aus der ersten dieser Formeln sieht man, dass bei einem Cylinder mit kreisförmiger Grundfläche die Querschnitte auch nach der Deformation eben bleiben.

23. Biegung eines homogenen Prismas oder Cylinders. — Wir denken uns ein Prisma oder einen Cylinder $A\,B\,C\,D$ auf drei recht-

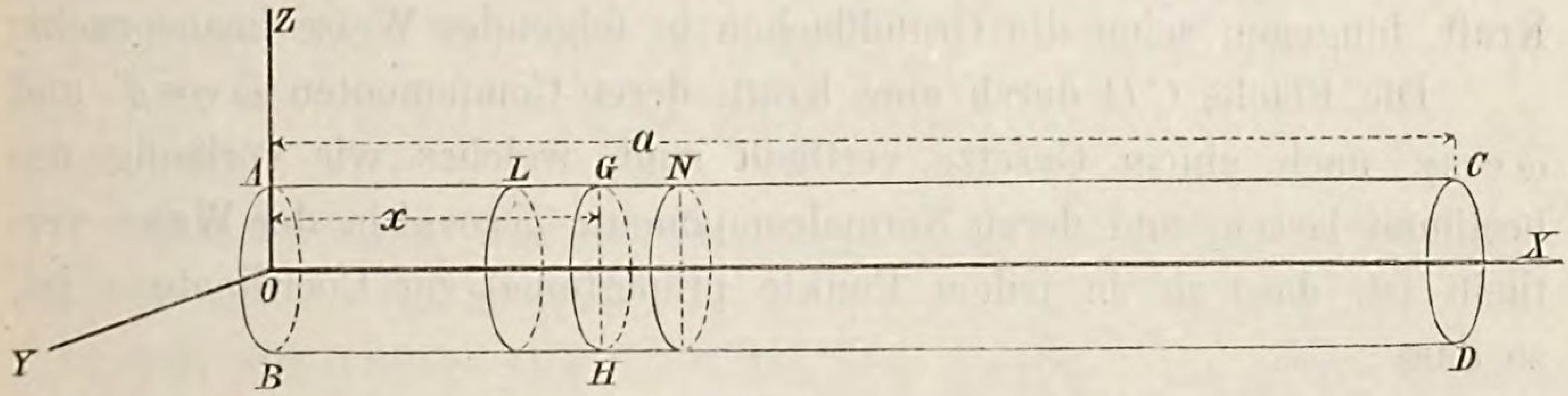


Fig. 8.

winkelige Achsen $O\,X$, $O\,Y$, $O\,Z$ bezogen, welche vor der Deformation mit den folgenden drei Linien zusammenfallen, und zwar:

$O\,X$ mit der Achse des Prismas oder Cylinders, $O\,Y$ und $O\,Z$ mit den Trägheitshauptachsen der Grundfläche.

Ferner setzen wir voraus, dass die drei Achsen mit dem festen Körper mobil seien, so zwar, dass nachfolgend angeführte Bedingungen erfüllt werden:

1. Der Mittelpunkt der Grundfläche $A\,B$ muss immer mit dem Anfangspunkt der Coordinaten zusammenfallen, so dass, wenn man die Verrückungen irgend eines Punktes parallel zu den Achsen u, v, w nennt, man

$$u = 0, \qquad v = 0, \qquad w = 0$$

für $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ erhält;

2. das den Werthen $y = 0$ und $z = 0$ entsprechende Element der Basis AB muss immer tangirend zur yz-Ebene bleiben, wodurch bedingt ist, dass für $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ sich

$$\frac{du}{dy} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{du}{dz} = 0 \quad \text{ergibt;}$$

3. schliesslich soll jene Trägheitshauptachse, welche vor der Deformation mit der y-Achse zusammenfällt, nach der Deformation tangirend zu dieser Achse sein, d. h., man hat für $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$

$$\frac{dw}{dy} = 0.$$

Unter diesen Bedingungen sind die Coordinatenachsen mit dem festen Körper mobil, so dass u, v, w nur die relativen Verrückungen darstellen, d. h. diejenigen, welche durch die Deformation entstehen.

Auf die seitliche Oberfläche des Prismas oder Cylinders wirke keine Kraft, hingegen seien die Grundflächen in folgender Weise beansprucht:

Die Fläche CD durch eine Kraft, deren Componenten $\bar{\omega}\cos\beta'$ und $\bar{\omega}\cos\gamma'$ nach einem Gesetze vertheilt sind, welches wir vorläufig unbestimmt lassen, und deren Normalcomponente $\bar{\omega}\cos\alpha'$ in der Weise vertheilt ist, dass sie in jedem Punkte proportional zur Coordinate z ist, so dass

$$\bar{\omega}\cos\alpha' = m z, \qquad \bar{\omega}\cos\beta' = \varphi(y, z), \qquad \bar{\omega}\cos\gamma' = \psi(y, z);$$

Die Grundfläche AB durch eine Kraft, deren Tangentialcomponenten genau jenen gleich sind, welche auf die Fläche CD wirken, welche aber entgegengesetzte Richtung haben, und deren Normalcomponente bezüglich der auf die andere Grundfläche wirkenden verkehrt gerichtet und ebenfalls proportional zur Coordinate z ist, so dass

$$\bar{\omega}\cos\alpha' = -(m + C a) z, \quad \bar{\omega}\cos\beta' = -\varphi(y, z), \quad \bar{\omega}\cos\gamma' = -\psi(y, z);$$

wobei C eine neue ganz beliebige Grösse und a die Länge des Prismas ist.

Untersuchen wir nun, ob die inneren elastischen Kräfte den folgenden Bedingungen entsprechen können, und zwar:

1. dass die tangentialen Kräfte p_{zx} und p_{xy} dieselben sind für die Grundflächen, sowie für einen beliebigen Querschnitt, so dass überall $p_{xy} = \varphi(y, z)$ und $p_{zx} = \psi(y, z)$ ist;

2. dass die normale Kraft p_{xx} für die verschiedenen Punkte desselben Querschnittes sich proportional zu den Coordinaten z und für die correspondirenden Punkte verschiedener Querschnitte nach einem in Bezug auf x linearen Gesetze ändere;

3. dass die normalen Kräfte p_{yy} und p_{zz}, sowie die tangentiale Kraft p_{yz} überall Null sind.

Wenn diesen Bedingungen entsprochen wird, hat man für einen beliebigen Punkt des Körpers

$$\left.\begin{array}{l} p_{xx} = [m + C(a - x)]\, z, \quad p_{yy} = 0, \quad p_{zz} = 0, \quad p_{yz} = 0, \\ \qquad p_{zx} = \psi(y, z), \qquad p_{xy} = \varphi(y, z), \end{array}\right\} \tag{75}$$

und folglich auch

$$\frac{d\, p_{zx}}{d\, x} = 0, \qquad \frac{d\, p_{xy}}{d\, x} = 0. \tag{76}$$

Mit Rücksicht auf diese letzten Beziehungen (75) und (76) sieht man, dass den zwei letzten Bedingungsgleichungen (14) entsprochen wird, während die erste derselben die folgende Form annimmt:

$$\frac{d\, p_{xy}}{d\, y} + \frac{d\, p_{zx}}{d\, z} = C\, z. \tag{77}$$

Sehen wir nun, was in dem gegenwärtigen Falle aus der Gleichung (23) für die Oberfläche wird.

Für die seitliche Oberfläche hat man überall

$$\overline{\omega} = 0, \qquad \cos\alpha = 0, \qquad \cos\gamma = \sin\beta;$$

es wird daher den beiden letzten Gleichungen (23) entsprochen, während die erste derselben die Gleichung

$$p_{xy} \cos\beta + p_{zx} \sin\beta = 0$$

ergibt; nachdem aber β der Winkel ist, welchen die Normale auf die Contour des Querschnittes mit der y-Achse bildet, hat man

$$\operatorname{tang}\beta = -\frac{dy}{dz},$$

so dass aus obiger Gleichung die folgende entsteht:

$$p_{xy}\, d z - p_{zx}\, d y = 0. \tag{78}$$

Für die Fläche $C D$ hat man

$$\cos\alpha = 1, \qquad \cos\beta = 0, \qquad \cos\gamma = 0,$$
$$\bar{\omega}\cos\alpha' = m z, \qquad \bar{\omega}\cos\beta' = \varphi(y, z), \qquad \bar{\omega}\cos\gamma' = \psi(y, z);$$

wenn man beachtet, dass für $x = a$

$$p_{xx} = m z$$

ist, und unter Berücksichtigung der Werthe für p_{xy} und p_{zx} findet man, dass den Gleichungen (23) vollständig entsprochen wird.

Für die Fläche $A B$ hat man

$$\cos\alpha = -1, \qquad \cos\beta = 0, \qquad \cos\gamma = 0$$
$$\bar{\omega}\cos\alpha' = -(m + C a) z, \qquad \bar{\omega}\cos\beta' = -\varphi(y, z),$$
$$\bar{\omega}\cos\gamma' = -\psi(y, z),$$

und indem man $x = 0$ macht,

$$p_{xx} = (m + C a) z,$$

woraus folgt, dass den Gleichungen (23) ebenfalls entsprochen wird.

Unter der Voraussetzung, dass das Gefüge des Körpers drei auf die Coordinatenachsen senkrechte Symmetrieebenen habe, ist es klar, dass die vier ersten Gleichungen (18) und die Differentialquotienten der beiden letzten mit Bezug auf x, bei Berücksichtigung der Formeln (75), folgende Gleichungen geben:

$$\left.\begin{array}{lll} \partial_x = \dfrac{[m + C(a - x)] z}{E}, & \partial_y = -\eta\,\partial_x, & \partial_z = -\eta'\,\partial_x, \\ g_{yz} = 0, & \dfrac{d g_{zx}}{d x} = 0, & \dfrac{d g_{xy}}{d x} = 0; \end{array}\right\} \quad (79)$$

wobei die Coëfficienten E, η, η' dieselbe Bedeutung und denselben Werth haben wie in den Formeln (37).

Diese Ausdrücke für die Dehnungen und Verschiebungen entsprechen vollständig den Gleichungen (26), sowie der ersten der Gleichungen (27) und reduciren die beiden letzten auf folgende:

$$\frac{d}{d y}\left(-\frac{d g_{zx}}{d y} + \frac{d g_{xy}}{d z}\right) = \frac{2\eta C}{E},$$
$$\frac{d}{d z}\left(\frac{d g_{zx}}{d y} - \frac{d g_{xy}}{d z}\right) = 0.$$

Da man übrigens aus den zwei letzten Gleichungen (79) auch

$$\frac{d}{d\,x}\left(\frac{d\,g_{zx}}{d\,y}-\frac{d\,g_{xy}}{d\,z}\right)=0$$

erhält, so folgt daraus, dass die Function

$$\frac{d\,g_{zx}}{d\,y}-\frac{d\,g_{xy}}{d\,z}$$

weder eine Function von x, noch von z sein kann, sondern nur von y, so dass

$$-\frac{d\,g_{zx}}{d\,y}+\frac{d\,g_{xy}}{d\,z}=\frac{2\,\eta\,C}{E}\,y. \tag{80}$$

Wir fügen diesmal keine beliebige Constante hinzu, denn es folgt aus dem Problem über die Torsion, dass die hinzugefügte Constante einer gleichmässigen Torsion des Prismas oder Cylinders entspricht, einer Torsion, welche wir in diesem Falle als nicht stattfindend voraussetzen.

Man sieht also, dass die Annahmen (75) und (76) über die elastischen Kräfte im Innern des Cylinders wirklich zutreffen, soferne die Vertheilung der Tangentialkräfte über die Grundflächen eine solche ist, dass diese Kräfte den Gleichungen (77) und (80) für alle Punkte der Grundflächen und ausserdem der Gleichung (78) für alle Punkte der Contour entsprechen.

Wir wollen nun die Kräfte p_{xy} und p_{zx} mit Hilfe einer einzigen unbekannten Function in der Weise ausdrücken, dass dieselben der unbestimmten Gleichung (80) entsprechen; es genügt also, die Function unter Berücksichtigung der unbestimmten Gleichung (77), sowie der Gleichung (78) für die Contour zu bestimmen.

Setzt man in die Gleichung (80) für g_{zx} und g_{xy} deren Ausdrücke (25), so erhält man

$$\frac{d^2\,v}{d\,z\,d\,x}-\frac{d^2\,w}{d\,x\,d\,y}=\frac{2\,\eta\,C}{E}\,y;$$

nachdem aber $g_{yz}=0$ ist, hat man auch

$$\frac{d\,g_{yz}}{d\,x}=0,\quad \text{oder}\quad \frac{d^2\,v}{d\,z\,d\,x}+\frac{d^2\,w}{d\,x\,d\,y}=0,$$

so dass man durch Combination dieser Gleichung mit der vorangehenden die folgenden erhält:

$$\frac{d^2 v}{dz\,dx} = \frac{\eta\, C}{E} y, \qquad \frac{d^2 w}{dx\,dy} = -\frac{\eta\, C}{E} y.$$

Ferner geben die drei ersten Gleichungen (79)

$$\frac{du}{dx} = \frac{[m + C(a - x)]\, z}{E}, \qquad \frac{dv}{dy} = -\frac{\eta\,[m + C(a - x)]\, z}{E},$$
$$\frac{dw}{dz} = -\frac{\eta'\,[m + C(a - x)]\, z}{E},$$

woraus man durch Differentirung

$$\frac{d^2 u}{dz\,dx} = \frac{m + C(a - x)}{E}, \qquad \frac{d^2 u}{dx\,dy} = 0,$$
$$\frac{d^2 v}{dx\,dy} = \frac{\eta\, C z}{E}, \qquad \frac{d^2 w}{dz\,dx} = \frac{\eta'\, C z}{E}$$

ableitet; die beiden letzten Gleichungen (79) geben

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dz\,dx} = 0, \qquad \frac{d^2 u}{dx\,dy} + \frac{d^2 v}{dx^2} = 0,$$

woraus sich bei Berücksichtigung obiger Resultate

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = 0, \qquad \frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{m + C(a - x)}{E}$$

ergibt.

Alle vorangehenden Resultate vereinigt geben also:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = 0, \qquad \frac{d^2 v}{dx\,dy} = \frac{\eta\, C z}{E}, \qquad \frac{d^2 v}{dz\,dx} = \frac{\eta\, C y}{E},$$
$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{m + C(a - x)}{E}, \quad \frac{d^2 w}{dx\,dy} = -\frac{\eta\, C y}{E}, \quad \frac{d^2 w}{dz\,dx} = \frac{\eta'\, C y}{E};$$

d. h. man kennt somit alle drei Differentialquotienten von $\frac{dv}{dx}$, sowie von $\frac{dw}{dx}$ mit Bezug auf x, y, z.

Durch Integration erhält man hieraus

$$\frac{dv}{dx} = C' + \frac{\eta\, C y z}{E},$$

$$\frac{dw}{dx} = C'' - \frac{mx - \frac{1}{2}C(a-x)^2}{E} - \frac{\eta C y^2}{2E} + \frac{\eta' C z^2}{2E},$$

wobei C' und C'' zwei beliebige Constante sind.

Substituirt man diese Werthe von $\frac{dv}{dx}$ und $\frac{dw}{dx}$ in die Ausdrücke für g_{xy} und g_{zx}, so erhält man

$$g_{xy} = \frac{du}{dy} + C' + \frac{\eta C y z}{E},$$

$$g_{zx} = \frac{du}{dz} + C'' - \frac{mx - \frac{1}{2}C(a-x)^2}{E} - \frac{\eta C y^2}{2E} + \frac{\eta' C z^2}{2E};$$

im Anfange dieser Nummer wurde gesehen, dass für $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ man $\frac{du}{dy} = 0$, $\frac{du}{dz} = 0$ hat; wenn man also in diesen Formeln $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ macht und g^0_{xy} und g^0_{zx} die correspondirenden Werthe von g_{xy} und g_{zx} nennt, so erhält man

$$g^0_{xy} = C', \qquad g^0_{zx} = C'' + \frac{C a^2}{2E},$$

so dass man nach Elimination von C' und C'' schreiben kann:

$$g_{xy} = \frac{du}{dy} + g^0_{xy} + \frac{\eta C y z}{E},$$

$$g_{zx} = \frac{du}{dz} + g^0_{zx} - \frac{mx + \frac{1}{2}C(2ax - x^2)}{E} - \frac{\eta C y^2}{2E} + \frac{\eta' C z^2}{2E}.$$

Man erhält also folgende Ausdrücke für die elastischen Kräfte:

$$\left.\begin{aligned} p_{xy} &= F_3\left(\frac{du}{dy} + g^0_{xy} + \frac{\eta C y z}{E}\right), \\ p_{zx} &= F_2\left(\frac{du}{dz} + g^0_{zx} - \frac{mx + \frac{1}{2}C(2ax - x^2)}{E} - \frac{\eta C y^2}{2E} + \frac{\eta' C z^2}{2E}\right), \end{aligned}\right\} \quad (81)$$

welche nur von der einzigen Function u abhängen. Durch Substitution in die unbestimmte Gleichung (77) nimmt letztere folgende Form an:

$$F_3 \frac{d^2 u}{d y^2} + F_2 \frac{d^2 u}{d z^2} = \left(1 - \frac{\eta F_3}{E} - \frac{\eta' F_2}{E}\right) C z. \qquad (82)$$

24. Fortsetzung über die Biegung. — Bestimmung der Constanten *C* und *m*. — Nachdem wir die Möglichkeit, das Problem der Biegung aufzulösen, erkannt haben, gehen wir daran, die Bedeutung der Constanten C und m zu bestimmen.

Wenn wir nun in dem Querschnitte, dessen Abscisse x ist, ein Oberflächenelement $d\omega = dy\,dz$ betrachten, so wird die in diesem Elemente wirkende normale elastische Kraft ausgedrückt sein durch

$$p_{xx}\, d\omega = [m + C(a - x)]\, z\, dy\, dz;$$

das Moment dieser Kraft in Bezug auf die zur y-Achse parallele Hauptachse ist somit

$$p_{xx}\, z\, d\omega = [m + C(a - x)]\, z^2\, dy\, dz;$$

die Summe dieser Elementarmomente auf den ganzen Querschnitt bezogen ist daher

$$\Sigma\, p_{xx}\, z\, d\omega = [m + C(a - x)] \int\!\!\int z^2\, dy\, dz.$$

Es ist bekannt, dass die Grösse

$$\int\!\!\int z^2\, dy\, dz,$$

indem man die zweifache Integration auf die ganze Fläche ausdehnt, das *Trägheitsmoment des Querschnittes* mit Bezug auf die Trägheitshauptachse genannt wird; diese Achse werden wir künftighin *Biegungsachse* nennen. Wird dieses Moment durch I dargestellt, so hat man

$$\Sigma\, p_{xx}\, z\, d\omega = [m + C(a - x)]\, I.$$

Denkt man sich das Prisma nach dem Querschnitt GH (s. Fig. 8, S. 95) geschnitten, so wird offenbar das Gleichgewicht des Stückes $CDHG$ nicht gestört, vorausgesetzt, dass man auf den Querschnitt GH äussere Kräfte wirken lässt, welche den thatsächlich wirkenden Kräften gleich sind; das Stück $CDHG$ wird also unter der Einwirkung der auf die Grundfläche CD wirkenden äusseren Kräfte, sowie der in dem Querschnitte GH

statthabenden elastischen Kräfte im Gleichgewicht sein. Diese Kräfte sind folgende:

Auf die Grundfläche CD die Normalkräfte mz und die Tangentialkräfte $\varphi(y, z)$ und $\psi(y, z)$;

Auf den Querschnitt GH die Normalkräfte $-[m + C(a - x)]z$ und die Tangentialkräfte $-\varphi(y, z)$, $-\psi(y, z)$.

Man sieht zuerst, dass, nachdem die Tangentialkräfte auf CD und GH einander gleich und im entgegengesetzten Sinne gerichtet sind, die Gleichgewichtsbedingungen sowohl der Fortbewegung in der Richtung der y- und der z-Achse, sowie jene der Drehung um die x-Achse vollkommen erfüllt werden; ferner führt die Bedingung, dass die Summe der auf CD und GH wirkenden Normalkräfte Null sei, zu folgender Gleichung:

$$m\int\int z\,d\,y\,d\,z - [m + C(a - x)]\int\int z\,d\,y\,d\,z$$
$$= - C(a - x)\int\int z\,d\,y\,d\,z = 0,$$

wobei die zweifache Integration auf den ganzen Querschnitt ausgedehnt werden muss. Dieser Gleichung wird vollständig entsprochen, denn da die Coordinaten z die Entfernungen der Elemente $dy\,dz$ von einer Achse sind, welche durch den Schwerpunkt des Querschnittes geht, wird auch das in der Formel enthaltene Doppelintegral gleich Null sein.

Es erübrigt nunmehr noch auszudrücken, dass die Summe der Momente aller auf das Stück $CDHG$ wirkenden Kräfte in Bezug auf zwei zu den Achsen der y und z parallelen Linien gleich Null seien. Wir nehmen für diese zwei Linien die Hauptachsen des Querschnittes CD, so dass die auf diesen Querschnitt wirkenden Tangentialkräfte ein Moment gleich Null geben. Dies angenommen, muss man ferner beachten, dass, da die auf die Grundfläche CD wirkenden Normalkräfte mz, wie oben zu ersehen ist, eine Summe gleich Null haben, sie statisch gleich sind zwei Kräftepaaren, welche die y- und z-Achse zu Achsen haben, und deren Momente

$$m\int\int z^2\,dy\,dz \quad \text{und} \quad m\int\int y\,z\,dy\,dz$$

sind, wobei die Entfernungen y und z auf die Hauptachsen der Grundfläche CD bezogen werden. Die Beziehung zwischen diesen beiden Achsen ergibt aber

$$\int\int y\,z\,d\,y\,d\,z = 0;$$

es wird also das zur z-Achse senkrechte Kräftepaar gleich Null sein, und bleibt somit nur das zur y-Achse senkrechte Kräftepaar, dessen Moment

$$m\int\int z^2\,d\,y\,d\,z = m\,I$$

ist, indem man I das Trägheitsmoment des Prismaquerschnittes in Bezug auf dessen zur y-Achse parallele Trägheitshauptachse nennt.

Desgleichen sind die auf den Querschnitt GH wirkenden Normalkräfte gleich einem Kräftepaar, welches als Achse die y-Achse hat, und dessen Moment

$$-[m + C(a - x)]\,I \quad \text{ist.}$$

Für das Rotationsgleichgewicht um die Trägheitshauptachsen des Querschnittes GH hat man die beiden Gleichungen

$$-C(a-x)\,I + (a-x)\int\int \psi(y, z)\,d\,y\,d\,z = 0,$$

$$(a-x)\int\int \varphi(y, z)\,d\,y\,d\,z = 0,$$

oder nach Division durch $(a - x)$

$$\int\int \psi(y, z)\,d\,y\,d\,z = C\,I, \qquad \int\int \varphi(y, z)\,d\,y\,d\,z = 0.$$

Die zweite dieser Gleichungen zeigt, dass die Summe der zur y-Achse parallelen Tangentialkräfte gleich Null ist, während aus der ersten hervorgeht, dass die Summe der zur z-Achse parallelen Kräfte gleich $C\,I$ ist. Wird die letztere Summe S genannt, so erhält man

$$S = C\,I \quad \text{und daher} \quad C = \frac{S}{I},$$

was den Werth der Constanten C gibt.

Um m zu bestimmen, hat man zu beachten, dass, wenn die Summe der Momente der auf die Grundfläche CD wirkenden Normalkräfte $m\,z$

in Bezug auf die zur y-Achse parallele Trägheitshauptachse M genannt wird, man folgende Gleichungen erhält:

$$M = m I \quad \text{und in Folge dessen} \quad m = \frac{M}{I}.$$

Bei Berücksichtigung dieser Werthe von C und m erhalten die ersten Gleichungen (75) und (79), die Gleichungen (81) und die unbestimmte Gleichung (82) folgende Form:

$$p_{xx} = \frac{M + S(a - x)}{I} z, \qquad \partial_x = \frac{M + S(a - x)}{E I} z, \tag{83}$$

$$\left.\begin{aligned} p_{xy} &= F_3 \left(\frac{d u}{d y} + g^0{}_{xy} + \frac{\eta S y z}{E I}\right), \\ p_{zx} &= F_2 \left(\frac{d u}{d z} + g^0{}_{zx} - \frac{M x + \frac{1}{2} S (2 a x - x^2)}{E I} - \frac{\eta S y^2}{2 E I} + \frac{\eta' S z^2}{2 E I}\right), \end{aligned}\right\} \tag{84}$$

$$F_3 \frac{d^2 u}{d y^2} + F_2 \frac{d^2 u}{d^2 z^2} = \left(1 - \frac{\eta F_3}{E} - \frac{\eta' F_2}{E}\right) \frac{S z}{I}. \tag{85}$$

25. Fortsetzung über die Biegung. — Betrachtung eines Prismas mit rechteckigem Querschnitte. — Es seien b und c die zur y- und zur z-Achse parallelen Seiten des Querschnittes; der Anfangspunkt der Coordinaten befindet sich im Mittelpunkte einer Grundfläche des Prismas.

Macht man nun

$$u = u' - g^0{}_{xy}\, y - \left[g'_{zx} - \frac{M x + \frac{1}{2} S (2 a x - x^2)}{E I} - \frac{\eta S}{E I} \frac{b^2}{12} + \frac{1}{F_2} \frac{S c^2}{8 I} \right] z$$
$$- \frac{\eta S y^2 z}{2 E I} + \left(1 - \frac{\eta' F_2}{E}\right) \frac{S z^3}{6 F_2 I},$$

wobei u' eine unbekannte Function von y und z ist, so werden aus den Formeln (84) und aus der Gleichung (85) folgende:

$$\left.\begin{aligned} p_{xy} &= F_3 \frac{d u'}{d y}, \\ p_{zx} &= F_2 \left[\frac{d u'}{d z} - \frac{\eta S}{E I}\left(y^2 - \frac{b^2}{12}\right) + \frac{S}{2 F_2 I}\left(z^2 - \frac{c^2}{4}\right)\right], \end{aligned}\right\} \tag{86}$$

$$F_3 \frac{d^2 u'}{d y^2} + F_2 \frac{d^2 u'}{d z^2} = 0. \tag{87}$$

Die Gleichung

$$p_{xy}\, d z - p_{zx}\, d y = 0,$$

welche sich auf die Contour der Querschnitte bezieht, theilt sich in zwei andere; denn für die Kanten c hat man überall $d y = 0$, und es muss daher $p_{xy} = 0$ sein, während für die Kanten b überall $d z = 0$ ist, was wieder $p_{zx} = 0$ gibt, so dass hieraus die folgenden Bedingungen resultiren:

$$\text{für} \quad y = \pm \frac{b}{2} \qquad p_{xy} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{d u'}{d y} = 0, \tag{88}$$

wie auch z sei;

$$\text{und für} \quad z = \pm \frac{c}{2} \qquad p_{zx} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{d u'}{d z} - \frac{\eta S}{E I}\left(y^2 - \frac{b^2}{12}\right) = 0, \tag{89}$$

wie gross auch y sei.

Nehmen wir nun an, dass

$$u' = \sum A_n \left(e^{\alpha m z} - e^{-\alpha m z}\right) \cos m y,$$

wobei die Summe Σ eine beliebige Anzahl von Gliedern enthält und wobei die Grössen A_n und m von einem Glied zum andern verschieden sein können.

Zuerst ist zu beachten, dass dieser Ausdruck der unbestimmten Gleichung (87) unter der Voraussetzung entspricht, dass

$$F_3 - \alpha^2 F_2 = 0 \quad \text{oder} \quad \alpha = \pm \sqrt{\frac{F_3}{F_2}}.$$

Weiters erhält man, indem man den Differentialquotienten von u' nach y nimmt und denselben nach Einführung von $y = \pm \frac{b}{2}$, zufolge der Bedingung (88), gleich Null setzt, folgende Formel:

$$\pm \sum m A_n \left(e^{\alpha m z} - e^{-\alpha m z}\right) \sin \frac{m b}{2} = 0;$$

hieraus ergibt sich

$$\frac{m b}{2} = n \pi \quad \text{und folglich} \quad m = \frac{2 n \pi}{b},$$

wobei n eine beliebige ganze Zahl ist. Mit diesem Werthe von m erhält man

$$u' = \sum A_n \left(e^{\alpha \frac{2n\pi z}{b}} - e^{-\alpha \frac{2n\pi z}{b}}\right) \cos \frac{2n\pi y}{b}.$$

Bildet man den Differentialquotienten von u' nach z und substituirt denselben in die Bedingungsgleichung (89), indem man $z = \pm \frac{c}{2}$ macht, so erhält man

$$\frac{\eta S}{EI}\left(\frac{b^2}{12} - y^2\right) + \frac{2\pi\alpha}{b} \sum n A_n \left(e^{\alpha \frac{n\pi c}{b}} + e^{-\alpha \frac{n\pi c}{b}}\right) \cos \frac{2n\pi y}{b} = 0,$$

worauf man die Anzahl der in der Summe Σ enthaltenen Glieder und den Coëfficienten A_n jedes Gliedes in der Weise bestimmen muss, dass dieser Gleichung entsprochen wird.

Die Formel von Lagrange lautet:

$$\varphi(y) - \frac{1}{l}\int_0^l \varphi(y')\,dy' = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{n=\infty} \cos \frac{n\pi y}{l} \int_0^l \varphi(y') \cos \frac{n\pi y'}{l}\,dy',$$

worin das Symbol $\varphi(y)$ eine beliebige Function von y darstellt. Macht man

$$\varphi(y) = y^2 \quad \text{und} \quad \varphi(y') = y'^2,$$

so findet man sogleich

$$\int_0^l y'^2\,dy' = \frac{l^3}{3}, \qquad \int_0^l y'^2 \cos \frac{n\pi y'}{l}\,dy' = -\frac{(-1)^{n-1}\,2\,l^3}{n^2\pi^2},$$

und aus obiger Gleichung von Lagrange wird folgende:

$$\frac{l^2}{3} - y^2 - \frac{4\,l^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^{n-1}\cos \frac{n\pi y}{l}}{n^2} = 0;$$

der Vergleich dieser Gleichung mit jener, welche aus der Bedingungsgleichung (89) abgeleitet wurde, zeigt, dass dieselben identisch sind, sobald man

$$l = \frac{b}{2}, \quad \text{und}$$

$$\frac{2\pi\alpha EI}{\eta S b}\, n A_n \left(e^{\alpha \frac{n\pi c}{b}} + e^{-\alpha \frac{n\pi c}{b}}\right) = -\frac{(-1)^{n-1}\,b^2}{\pi^2 n^2},$$

setzt, d. h. dass

$$A_n = -\frac{\eta S b^3}{2\pi^3 \alpha E I} \times \frac{(-1)^{n-1}}{n^3\left(e^{\alpha\frac{n\pi c}{b}} + e^{-\alpha\frac{n\pi c}{b}}\right)}.$$

Bei Berücksichtigung der in Nummer 20 für den hyperbolischen Sinus und Cosinus gegebenen Ausdrücke erhält man durch Substitution dieses Werthes von A_n in den allgemeinen Ausdruck für u'

$$u' = -\frac{\eta S b^3}{2\pi^3 \alpha E I}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(-1)^{n-1}\operatorname{sih}\alpha\frac{2n\pi z}{b}\cdot\cos\frac{2n\pi y}{b}}{n^3\operatorname{coh}\alpha\frac{n\pi c}{b}}. \tag{90}$$

Dies ist somit das allgemeine Integral der Gleichung (87) unter Berücksichtigung der Bedingungsgleichungen (88) und (89).

Nimmt man die partiellen Differentialquotienten dieses Ausdruckes nach y und z und substituirt man dieselben in die Formeln (86), welche die Werthe der elastischen Kräfte p_{xy} und p_{zx} geben, so ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} p_{xy} &= F_3\frac{\eta S b^2}{\pi^2 \alpha E I}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(-1)^{n-1}\operatorname{sih}\alpha\frac{2n\pi z}{b}\cdot\sin\frac{2n\pi y}{b}}{n^2\operatorname{coh}\alpha\frac{n\pi c}{b}},\\ p_{zx} &= -\frac{S}{2I}\left(\frac{c^2}{4}-z^2\right)+\frac{\eta F_2 S}{EI}\left[\frac{b^2}{12}-y^2-\frac{b^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(-1)^{n-1}\operatorname{coh}\alpha\frac{2n\pi z}{b}\cos\frac{2n\pi y}{b}}{n^2\operatorname{coh}\alpha\frac{n\pi c}{b}}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{91}$$

Will man die Werthe der elastischen Tangentialkräfte p_{xy} und p_{zx} im Mittelpunkte des Querschnittes erfahren, so hat man nur $y = 0$ und $z = 0$ zu machen und erhält

$$\left.\begin{aligned} p_{xy} &= 0,\\ p_{zx} &= -\frac{S c^2}{8 I}\left[1-\frac{2\eta F_2}{3E}\frac{b^2}{c^2}\left(1-\frac{12}{\pi^2}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2\operatorname{coh}\alpha\frac{n\pi c}{b}}\right)\right]. \end{aligned}\right\} \tag{92}$$

26. Fortsetzung über die Biegung. — Betrachtung eines Prismas mit elliptischem Querschnitte. — Man denke sich nun, dass

$$u = - g^0{}_{xy}\, y - \left| g^0{}_{zx} - \frac{M x + \frac{1}{2} S (2 a x - x^2)}{E I} \right| z$$

$$+ \left(1 - \frac{\eta F_3}{E} - \frac{\eta' F_2}{E}\right) \frac{S z^3}{6 F_2 I} + A z + B \left(y^2 z - \frac{F_3}{3 F_2} z^3\right),$$

sei, wobei A und B unbestimmte Coëfficienten sind.

Zuerst ist zu beachten, dass für $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ ebensowohl

$$\frac{d u}{d y} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d u}{d z} = 0,$$

als auch

$$g^0{}_{xy} = 0 \quad \text{und} \quad g^0{}_{zx} = A,$$

sein muss, so dass man für u folgenden Ausdruck erhält:

$$= \frac{M x + \frac{1}{2} S (2 a x - x^2)}{E I} z + \left(1 - \frac{\eta F_3}{E} - \frac{\eta' F_2}{E}\right) \frac{S z^3}{6 F_2 I} + B \left(y^2 z - \frac{F_3}{3 F_2} z^3\right); \quad (93)$$

derselbe entspricht der unbestimmten Gleichung (85) und reducirt die Formeln (84) auf folgende:

$$p_{xy} = 2 F_3 \left(B + \frac{\eta S}{2 E I}\right) y z,$$

$$p_{zx} = F_2 \left[g^0{}_{zx} + \left(B - \frac{\eta S}{2 E I}\right) y^2 \right] + \left[\frac{S}{2 I} - F_3 \left(B + \frac{\eta S}{2 E I}\right)\right] z^2.$$

Macht man zur Vereinfachung

$$B + \frac{\eta S}{2 E I} = P, \quad (94)$$

so ergeben sich folgende zwei Formeln:

$$p_{xy} = 2 F_3 P y z,$$

$$p_{zx} = F_2 \left[g^0{}_{zx} + \left(P - \frac{\eta S}{E I}\right) y^2 \right] + \left(\frac{S}{2 I} - F_3 P\right) z^2;$$

so dass die Contourgleichung

$$p_{xy}\, d z - p_{zx}\, d y = 0$$

nach Substitution zu folgender wird:

$$2\,F_3\,P\,y\,z\,d\,z - \left[F_2\,g^0_{zx} + F_2\left(P - \frac{\eta\,S}{E\,I}\right)y^2 + \left(\frac{S}{2I} - F_3\,P\right)z^2\right]d\,y = 0.$$

Diese Gleichung kann man homogen machen, indem man

$$F_2\,g^0_{zx} + \left(\frac{S}{2I} - F_3\,P\right)z^2 = \left(\frac{S}{2I} - F_3\,P\right)z'^2;$$

setzt, denn man kann hieraus

$$z\,d\,z = z'\,d\,z',$$

ableiten, womit die betrachtete Gleichung die folgende ergibt:

$$2\,F_3\,P\,y\,z'\,d\,z' - \left[\left(\frac{S}{2I} - F_3\,P\right)z'^2 + F_2\left(P - \frac{\eta\,S}{E\,I}\right)y^2\right]d\,y = 0.$$

Um diese Gleichung zu integriren, muss man vorerst die Variablen trennen; dies kann man durch Einführung einer neuen Variablen t machen, welche von z' und y durch die Relation

$$z' = t\,y$$

abhängt. Setzt man in der vorhergehenden Gleichung $t\,y$ für z' und berücksichtigt man, dass

$$d\,z' = t\,d\,y + y\,d\,t$$

ist, so erhält man in der That, nachdem man noch durch y^2 dividirt hat,

$$2\,F_3\,P\,t\,(t\,d\,y + y\,d\,t) - \left[\left(\frac{S}{2I} - F_3\,P\right)t^2 + F_2\left(P - \frac{\eta\,S}{E\,I}\right)\right]d\,y = 0,$$

oder

$$2\,F_3\,P\,y\,t\,d\,t - \left[\left(\frac{S}{2I} - 3\,F_3\,P\right)t^2 + F_2\left(P - \frac{\eta\,S}{E\,I}\right)\right]d\,y = 0,$$

und folglich

$$\frac{d\,y}{y} = \frac{2\,F_3\,P\,t\,d\,t}{\left(\frac{S}{2I} - 3\,F_3\,P\right)t^2 + F_2\left(P - \frac{\eta\,S}{E\,I}\right)},$$

wobei die Variablen getrennt sind.

Diese Gleichung kann leicht integrirt werden und gibt, wenn man C eine beliebige Constante nennt,

$$\log C\,y = \frac{F_3\,P}{\left(\frac{S}{2I} - 3\,F_3\,P\right)}\log\left[\left(\frac{S}{2I} - 3\,F_3\,P\right)t^2 + F_2\left(P - \frac{\eta\,S}{E\,I}\right)\right];$$

will man von den Logarithmen zu den Zahlen übergehen, so hat man zur Vereinfachung

$$C^{\frac{S}{2F_3PI}-3} = C'$$

zu setzen und erhält dann

$$C'y^{\frac{S}{2F_3PI}-3} = \left(\frac{S}{2I} - 3F_3P\right)t^2 + F_2\left(P - \frac{\eta S}{EI}\right);$$

durch Multiplication dieser Gleichung mit y^2 und indem man gleichzeitig z'^2 für $t^2 y^2$ setzt, erhält man

$$C'y^{\frac{S}{2F_3PI}-1} = \left(\frac{S}{2I} - 3F_3P\right)z'^2 + F_2\left(P - \frac{\eta S}{EI}\right)y^2.$$

Aus der Beziehung, welche zwischen z^2 und z'^2 aufgestellt wurde, ergibt sich

$$z'^2 = z^2 + \frac{F_2 g^0{}_{zx}}{\frac{S}{2I} - F_3P},$$

so dass man der vorhergehenden Gleichung folgende Form geben kann:

$$C'y^{\frac{S}{2F_3PI}-1} = \left(\frac{S}{2I} - 3F_3P\right)z^2 + F_2\left(P - \frac{\eta S}{EI}\right)y^2 + F_2 g^0{}_{zx}\frac{\frac{S}{2I} - 3F_3P}{\frac{S}{2I} - F_3P}. \quad (95)$$

Dies ist also die allgemeine Gleichung des Querschnittes der Cylinder, deren gekrümmte Oberfläche nach der Deformation durch die Gleichung (93) repräsentirt wird.

Differentiirt man die Gleichung (95), so erhält man

$$\left[\left(\frac{S}{2F_3PI} - 1\right)C'y^{\frac{S}{2F_3PI}-2} - 2F_2\left(P - \frac{\eta S}{EI}\right)y\right]dy = 2\left(\frac{S}{2I} - 3F_3P\right)z\,dz;$$

unter der Voraussetzung, dass

$$\frac{S}{2F_3PI} - 2$$

positiv ist, d. h. dass

$$\frac{S}{2F_3PI} - 1 > 1 \quad (96)$$

ist, hat man auch

$$\text{für } y=0 \quad \frac{dz}{dy}=0,$$

$$\text{für } z=0 \quad \frac{dy}{dz}=0,$$

woraus ersichtlich ist, dass der Werth von z, welcher einem Werthe $y=0$ entspricht, ein Maximum oder Minimum ist, eben so wie der mit $z=0$ correspondirende Werth von y.

Wird der Bedingung (96) entsprochen, so ist es klar, dass der Exponent

$$\frac{S}{2F_3 PI}-1$$

immer in der Form

$$\frac{2\alpha}{2\beta}$$

geschrieben werden kann, wobei α und β zwei ganze Zahlen sind, von welchen die zweite kleiner ist als die erste, so dass der Ausdruck

$$C'\, y^{\frac{S}{2F_3 PI}-1}$$

sein Zeichen nicht ändert, wenn dies auch bei y geschieht. Es folgt hieraus, dass die durch die Gleichung (95) dargestellte Curve symmetrisch ist, und zwar sowohl in Bezug auf die y-Achse, als auch in Bezug auf die z-Achse.

Wir nennen nun $\pm b$ die mit $z=0$ correspondirenden Werthe von y und $\pm c$ die mit $y=0$ correspondirenden Werthe von z und dividiren die ganze Gleichung (95) durch das letzte Glied derselben, machen aber

$$\frac{\frac{S}{2I}-F_3 P}{F_2\, g^0{}_{zx}}=-\frac{1}{c^2}, \qquad \frac{\frac{S}{2I}-F_3 P}{g^0{}_{zx}} \cdot \frac{P-\frac{\eta S}{EI}}{\frac{S}{2I}-3F_3 P}=-\frac{K}{b^2}, \quad (97)$$

$$\frac{\frac{S}{2I}-F_3 P}{F_2\, g^0{}_{zx}} \; \frac{C'}{\frac{S}{2I}-3F_3 P}=C'',$$

wobei K eine constante Grösse ist. Aus der Gleichung (95) ergibt sich dann

$$C'' y^{\frac{S}{2F_3 PI} - 1} + K\left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1,$$

und da man für $z = 0$ $y = b$ erhalten muss, folgt hieraus

$$C'' = \frac{1 - K}{b^{\frac{S}{2F_3 PI} - 1}};$$

so dass man durch Eliminirung von C'' und, indem man zur Abkürzung

$$\frac{S}{2F_3 PI} - 1 = n \tag{98}$$

macht, als Contourgleichung der Querschnitte des Prismas oder Cylinders folgende Gleichung erhält:

$$(1 - K)\left(\frac{y}{b}\right)^n + K\left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1. \tag{99}$$

Aus der Gleichung (98) und den zwei Gleichungen (97) lässt sich ableiten, dass

$$P = \frac{S}{2F_3 I(n+1)}, \quad g^0{}_{zx} = -\frac{S n c^2}{2F_2 I(n+1)}, \quad K = \frac{1 - (n+1)\frac{2\eta F_3}{E}}{n - 2} \cdot \frac{F_2 b^2}{F_3 c^2}, \tag{100}$$

womit man für die elastischen Tangentialkräfte folgende Ausdrücke erhält:

$$\left.\begin{aligned} p_{xy} &= \frac{S}{(n+1) I} y z, \\ p_{zx} &= -\frac{S}{2(n-1) I}\left[n(c^2 - z^2) - (n-2) K \frac{c^2}{b^2} y^2\right]. \end{aligned}\right\} \tag{101}$$

Die Gleichung (99) kann offenbar unendlich viele Curven mit den Halbachsen b und c repräsentiren, denn man kann dem Coëfficienten n und folglich auch K unendlich viele Werthe geben.

Macht man $K = 1$, so erhält man als Contourgleichung

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

welche eine Ellipse darstellt, deren Halbachsen b und c sind. Die letzte der Gleichungen (100) wird sodann

$$1 = \frac{1-(n+1)\frac{2\eta F_3}{E}}{n-2} \cdot \frac{F_2 b^2}{F_3 c^2},$$

woraus sich ergibt, dass

$$n = \frac{2+\left(1-\frac{2\eta F_3}{E}\right)\frac{F_2 b^2}{F_3 c^2}}{1+\frac{2\eta F_3}{E}\cdot\frac{F_2 b^2}{F_3 c^2}}. \tag{102}$$

Für die Prismen oder Cylinder mit elliptischer Grundfläche, sowie für diejenigen mit rechteckiger Grundfläche kann das Problem der Biegung vollständig aufgelöst werden, sobald der betreffende Körper in jedem Punkte drei Symmetrieebenen besitzt, welche wechselseitig auf der Achse des Körpers und auf den Hauptachsen der Grundflächen senkrecht stehen.

27. Fortsetzung über die Biegung. — Form des Prismas oder Cylinders nach der Biegung. — Die Bestimmung der Form des Prismas oder Cylinders nach der Biegung erfordert, dass die Ausdrücke für die Verrückungen u, v, w in Functionen von x, y, z gefunden werden.

Was den Ausdruck für u betrifft, so wurde gesehen, dass derselbe nur für specielle Querschnitte gefunden werden kann; hingegen wird die Folge lehren, dass die Ausdrücke für v und w in Functionen der Coordinaten gefunden werden können, welches auch immer die Querschnittsform des Prismas oder Cylinders sei.

Zuerst betrachten wir aber den Ausdruck für u in den schon behandelten Fällen, um hieraus einige wichtige Eigenschaften zu folgern, und nehmen z. B. die Formel (93), welche für jene Cylinder gefunden wurde, deren Querschnitte im Allgemeinen durch die Gleichung (99) dargestellt werden.

Wird x als constant betrachtet, so gibt die Formel (93) offenbar die zur x-Achse parallelen Verrückungen der verschiedenen Punkte eines Cylinderquerschnittes, d. h. sie stellt jene krumme Fläche dar, in welche ein vorher ebener Querschnitt nach der Deformation verwandelt wurde. Die Formel (93) kann auch in die Form

$$u = u' + u''$$

gebracht werden, indem man

$$u' = \frac{Mx + \frac{1}{2} S(2ax - x^2)}{EI} z, \tag{103}$$

$$u'' = \left(1 - \frac{\eta F_3}{E} - \frac{\eta' F_2}{E}\right) \frac{S z^3}{6 F_2 I} + B \left(y^2 z - \frac{F_3}{3 F_2} z^3\right) \tag{104}$$

setzt. Wenn man x als eine Constante annimmt, d. h. wenn man die Punkte ein und desselben Querschnittes betrachtet, so stellt die erste dieser Gleichungen eine zur y-Achse parallele Ebene dar, während die zweite eine Fläche dritter Ordnung repräsentirt. Diese Ebene und diese Fläche sind im Mittelpunkte des Querschnittes zu einander tangential, denn für $y = 0$, $z = 0$ hat man, wie auch die Abscisse x sei,

$$\frac{du''}{dy} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{du''}{dz} = 0;$$

daraus folgt, dass die Gleichung (104) jene krumme Fläche darstellt, in welche die der Abscisse x entsprechende Querschnittsfläche nach der Biegung verwandelt wurde. Nachdem der Ausdruck für u'' von x unabhängig ist, kann man leicht ersehen, dass alle Querschnitte nach der Biegung dieselben krummen Flächen bilden.

Für das Prisma mit rechteckiger Grundfläche kommt man zu demselben Schlusse.

Zur Bestimmung von v und w übergehend, integrire man die Gleichung

$$\frac{d^2 v}{dz\, dx} - \frac{d^2 w}{dx\, dy} = \frac{2\eta C}{E} y,$$

mit Bezug auf x; setzt man gleichzeitig für C dessen Werth $\frac{S}{I}$, und nennt man $\varphi\,(y, z)$ eine beliebige Function von y und z, so erhält man

$$\frac{dv}{dz} - \frac{dw}{dy} = \frac{2\eta S}{EI} x y + 2\varphi\,(y, z);$$

nachdem aber die Verschiebung g_{yz} Null sein muss, hat man auch

$$\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} = 0,$$

so dass durch Combination mit der vorhergehenden Gleichung folgende Formeln erhalten werden:

$$\frac{dv}{dz} = \frac{\eta S}{EI} x y + \varphi(y, z),$$

$$\frac{dw}{dy} = -\frac{\eta S}{EI} x y - \varphi(y, z).$$

Durch Differentiation der ersten dieser Gleichungen nach y und der zweiten nach z ergibt sich

$$\frac{d^2 v}{dy\, dz} = \frac{\eta S}{EI} x + \frac{d\varphi(y, z)}{dy}, \qquad \frac{d^2 w}{dy\, dz} = -\frac{d\varphi(y, z)}{dz};$$

andererseits erhält man aus den zwei Gleichungen

$$\frac{dv}{dy} = -\frac{\eta [m + C(a - x)] z}{E}, \qquad \frac{dw}{dz} = -\frac{\eta' [m + C(a - x)] z}{E}$$

durch Differentiation der ersten nach z und der zweiten nach y, und indem man für m und C deren Werthe setzt,

$$\frac{d^2 v}{dy\, dz} = -\frac{\eta [M + S(a - x)]}{EI}, \qquad \frac{d^2 w}{dy\, dz} = 0.$$

Der Vergleich dieser Ausdrücke für $\frac{d^2 v}{dy\, dz}$ und $\frac{d^2 w}{dy\, dz}$ mit den oben erhaltenen ergibt

$$\frac{d\varphi(y, z)}{dy} = -\frac{\eta (M + Sa)}{EI}, \qquad \frac{d\varphi(y, z)}{dz} = 0,$$

woraus man durch Integration

$$\varphi(y, z) = -\frac{\eta (M + Sa)}{EI} y + D$$

ableitet, wobei D eine beliebige Constante ist.

Diesen Werth der Function $\varphi(y, z)$ kann man in die Ausdrücke für $\frac{dv}{dz}$ und $\frac{dw}{dy}$ einsetzen und erhält

$$\frac{dv}{dz} = \frac{\eta S}{EI} x y - \frac{\eta (M + Sa)}{EI} y + D,$$

$$\frac{dw}{dy} = -\frac{\eta S}{EI} x y + \frac{\eta (M + Sa)}{EI} y - D;$$

und da man für $x=0$, $y=0$: $\frac{dw}{dz}=0$ haben muss, folgt daraus, dass die Constante D gleich Null sein muss.

Unter Berücksichtigung der in Nummer 23 gefundenen Ausdrücke für $\frac{dv}{dx}$, $\frac{dv}{dy}$ und jener für $\frac{dw}{dx}$, $\frac{dw}{dz}$ sind somit alle drei Differentialquotienten von v und w mit Bezug auf x, y, z bekannt, und zwar sind es folgende:

$$\frac{dv}{dx}=g^0_{xy}+\frac{\eta S y z}{EI}, \qquad \frac{dw}{dx}=g^0_{zx}-\frac{Mx+\frac{1}{2}S(2ax-x^2)}{EI}-\frac{\eta S y^2}{2EI}+\frac{\eta' S z^2}{2EI},$$

$$\frac{dv}{dy}=-\frac{\eta[M+S(a-x)]z}{EI}, \qquad \frac{dw}{dy}=\frac{\eta[M+S(a-x)]y}{EI},$$

$$\frac{dv}{dz}=-\frac{\eta[M+S(a-x)]y}{EI}, \qquad \frac{dw}{dz}=-\frac{\eta'[M+S(a-x)]z}{EI}.$$

Die Integration dieser Gleichungen kann man vollständig ausführen, und da für $x=0$, $y=0$, $z=0$: $v=0$, $w=0$ sein muss, hat man auch keine Constante hinzuzufügen, so dass die Integration folgende Werthe ergibt:

$$\left.\begin{aligned} v &= g^0_{xy}\,x-\frac{\eta\,[M+S(a-x)]\,y z}{EI}, \\ w &= g^0_{zx}\,x-\frac{Mx^2+S\left(a x^2-\frac{x^3}{3}\right)}{2EI}+\frac{[M+S(a-x)]\,(\eta\, y^2-\eta' z^2)}{2EI}. \end{aligned}\right\} \quad (105)$$

Dies sind in endlicher Form die Ausdrücke für die transversalen Verschiebungen v und w; es ist sehr bemerkenswerth, dass dieselben erhalten wurden, ohne dass eine Beschränkung bezüglich der Querschnittsform des Prismas oder Cylinders gemacht worden wäre. Diese Allgemeinheit ist jedoch nur scheinbar, denn die in den Ausdrücken für v und w enthaltenen Verschiebungen g_{xy} und g_{zx} sind ihrerseits von der Form des Querschnittes abhängig.

Wenn man die von der Achse des festen Körpers nach der Biegung beschriebene Curve bestimmen will, hat man $y=0$ und $z=0$ zu machen,

welchen Werth die Abscisse x in den Gleichungen (105) immerhin habe, und erhält sodann

$$\left.\begin{aligned} v &= g^0{}_{xy}\, x, \\ w &= g^0{}_{zx}\, x - \frac{M x^2 + S\left(a x^2 - \frac{x^3}{3}\right)}{2 E I}\,; \end{aligned}\right\} \qquad (106)$$

diese Gleichungen geben die Curve, nach welcher sich die Achse des Prismas biegt. Die erste derselben zeigt, dass diese Curve eben ist.

Sobald der Querschnitt des Prismas oder Cylinders symmetrisch ist in Bezug auf die zur z-Achse parallele Trägheitshauptachse, muss offenbar die Biegung der Achse des Prismas in einer verticalen Ebene vor sich gehen, und man erhält somit für jeden beliebigen Werth von x $v = 0$ und folglich $g^0{}_{xy} = 0$.

28. Das Prisma sei Kräften von verschiedener Art unterworfen. — Bis jetzt wurde das Elasticitätsgleichgewicht eines geraden Prismas untersucht, auf welches folgende äussere Kräfte einzeln wirken, und zwar:

1. Eine gleichmässig über dessen Oberfläche, sowie über dessen Grundflächen vertheilte Kraft;

2. eine nur über die Grundflächen gleichmässig vertheilte und senkrecht zu denselben gerichtete Kraft;

3. Tangentialkräfte, welche nach einem von der Form der Querschnitte abhängigen Gesetze über die Grundflächen vertheilt sind, und welche eine gleichmässige Torsion hervorrufen;

4. Tangentialkräfte, welche nach einem von der Form der Querschnitte abhängigen Gesetze über die beiden Grundflächen vertheilt sind, sowie gleichmässig über die beiden Grundflächen vertheilte Normalkräfte; alle diese Kräfte bewirken in dem Prisma eine Biegung in einer durch die Achse des Prismas und durch eine Hauptachse der Grundfläche bestimmten Ebene.

Es wurde aber gesehen, dass in jedem dieser Fälle die hervorgerufenen elastischen Kräfte lineare Functionen der äusseren Kräfte sind, woraus folgt, dass, sobald alle die oben betrachteten äusseren Kräfte gleichzeitig auf das Prisma wirken würden, die elastischen Kräfte p_{xx}, p_{yy}, p_{zz}, p_{yz}, p_{zx}, p_{xy} die Summen derjenigen Werthe sein

würden, welche dieselben hätten, wenn jede dieser äusseren Kräfte einzeln thätig wäre.

Man betrachte z. B. jenen Fall, welcher im Verlauf dieses Werkes öfter Gegenstand der Untersuchung sein wird, d. h. den Fall, in welchem das auf drei rechtwinkelige Achsen bezogene Prisma in jedem seiner Punkte drei zu diesen Coordinatenachsen senkrechte Symmetrieebenen besitzt, und auf welches folgende Kräfte wirken:

1. Auf die beiden Grundflächen, für welche $x = a$ und $x = 0$ ist, die gleichmässig vertheilten Normalkräfte P und $-P$;

2. auf die mit $x = a$ correspondirende Grundfläche die nach dem linearen Gesetze

$$\frac{M^0_y}{I_y} z$$

vertheilten Normalkräfte und die analog wie in dem Probleme über die Biegung vertheilten Tangentialkräfte, welche parallel zur y-Achse eine Resultirende gleich Null und parallel zur z-Achse eine solche gleich $-S_z$ geben; ferner auf die mit $x = 0$ correspondirende Grundfläche Normalkräfte, welche nach dem linearen Gesetze

$$-\frac{M^0_y + S a}{I_y} z$$

vertheilt sind, und Tangentialkräfte, welche gleich sind mit den auf die andere Grundfläche wirkenden, welche aber entgegengesetzte Richtung haben;

3. auf die mit $x = a$ correspondirende Grundfläche die nach dem linearen Gesetze

$$-\frac{M^0_z}{I_z} y$$

vertheilten Normalkräfte, und die analog wie in dem Probleme über die Biegung vertheilten Tangentialkräfte, welche parallel zur z-Achse eine Resultirende gleich Null und parallel zur y-Achse eine solche gleich $-S_y$ geben; ferner auf die mit $x = 0$ correspondirende Grundfläche Normalkräfte, welche nach dem linearen Gesetze

$$\frac{M^0_z - S_y a}{I_z} y$$

vertheilt sind, und Tangentialkräfte, welche gleich sind mit den auf die andere Grundfläche wirkenden, welche aber entgegengesetzte Richtung haben;

4. schliesslich auf die mit $x = a$ correspondirende Grundfläche Tangentialkräfte, welche wie in dem Problem über die Torsion vertheilt sind, und welche in Bezug auf die Achse des Prismas ein Moment M_x geben; ferner auf die mit $x = 0$ correspondirende Grundfläche Tangentialkräfte, welche vollkommen gleich sind mit den auf die andere Grundfläche wirkenden, welche aber entgegengesetzt gerichtet sind.

Wenn jedes dieser vier Systeme von Kräften einzeln auf das Prisma wirkt, so hat man, wie schon oben gesehen wurde, in jedem beliebigen Punkte

$$p_{yy} = 0, \qquad p_{zz} = 0, \qquad p_{yz} = 0.$$

Ferner resultirt aus dem Problem über die einfache Dehnung, dass die alleinigen Kräfte des ersten Systems in jedem beliebigen Punkte

$$p_{xx} = \frac{P}{\Omega}, \qquad p_{xy} = 0, \qquad p_{zx} = 0 \quad \text{geben.}$$

Aus dem Problem über die Biegung folgt, dass die Kräfte des zweiten Systems allein, d. h. diejenigen, welche eine Biegung in der Richtung der xz-Ebene hervorrufen, für die auf ein ebenes Element des mit der Abscisse x correspondirenden Querschnittes wirkende Normalkraft folgenden Werth geben:

$$p_{xx} = \frac{M^0_y + S_z(a - x)}{I_y} z \quad \text{oder} \quad p_{xx} = \frac{M_y}{I_y} z,$$

wobei man M_y das Biegungsmoment in Bezug auf die zur y-Achse parallele Trägheitsachse des betrachteten Querschnittes nennt; für die Tangentialkräfte p_{xy} und p_{zx} erhält man Functionen von y und z, welche man durch die Formeln

$$p_{xy} = \varphi_1(y, z)\, S_z \quad \text{und} \quad p_{zx} = \varphi_2(y, z)\, S_z$$

darstellen kann, wobei die Functionen $\varphi_1(y, z)$ und $\varphi_2(y, z)$ nur von der Querschnittsform des Prismas oder Cylinders abhängen und nicht von der Grösse der auf die Grundflächen wirkenden Kräfte. Zur Vereinfachung können die beiden letzten Formeln auch in der Form

$$p_{xy} = A_1 \frac{S_z}{\Omega} \quad \text{und} \quad p_{zx} = A_2 \frac{S_z}{\Omega}$$

geschrieben werden, indem man Ω die Querschnittsfläche des Prismas oder Cylinders und A_1, A_2 zwei Functionen von y und z nennt, welche nichts Anderes sind als die mit Ω multiplicirten Functionen $\varphi_1(y, z)$ und $\varphi_2(y, z)$.

Die Kräfte des dritten Systems würden, wenn sie allein wären, eine Biegung in der Richtung der xy-Ebene hervorrufen und würden für die Normalkraft p_{xx} den Werth

$$p_{xx} = \frac{-M^0_z + S_y(a - x)}{I_z} \quad \text{oder} \quad p_{xx} = -\frac{M_z}{I_z} y$$

geben, wobei M_z das Biegungsmoment in Bezug auf die zur z-Achse parallele Trägheitsachse des mit der Abscisse x correspondirenden Querschnittes ist; für die Tangentialkräfte p_{xy} und p_{zx} erhält man die Ausdrücke

$$p_{xy} = B_1 \frac{S_y}{\Omega} \quad \text{und} \quad p_{zx} = B_2 \frac{S_y}{\Omega},$$

wobei B_1 und B_2 Functionen von y und z sind, welche nur von der Querschnittsform des Prismas oder Cylinders abhängen, aber nicht von der Grösse der auf die Grundflächen wirkenden Kräfte.

Schliesslich würden die Kräfte des vierten Systems, wenn dieselben allein wären, eine Torsion um die Achse des Prismas hervorrufen und zufolge dem Problem über die Torsion

$$p_{xx} = 0, \qquad p_{xy} = \psi_1(y, z) M_x, \qquad p_{zx} = \psi_2(y, z) M_x$$

ergeben, wobei $\psi_1(y, z)$ und $\psi_2(y, z)$ von der Querschnittsform abhängige Functionen von y und z sind, welche aber von der Grösse der auf die Grundflächen wirkenden Kräfte nicht beeinflusst werden. Zur Vereinfachung kann man, wie oben,

$$p_{xy} = C_1 \frac{M_x}{J}, \qquad p_{zx} = C_2 \frac{M_x}{J}$$

schreiben, indem man J das *polare Trägheitsmoment des Querschnittes* nennt, d. h. das Trägheitsmoment des Querschnittes in Bezug auf dessen Mittelpunkt und C_1, C_2 die mit J multiplicirten Functionen $\psi_1(y, z)$ und $\psi_2(y, z.)$

Auf Grund des Princips der Summirung der Wirkungen erhält man, wenn die oben betrachteten vier Systeme von Kräften gleichzeitig auf das Prisma oder den Cylinder wirken, für jeden Punkt

$$p_{yy} = 0, \qquad p_{zz} = 0, \qquad p_{yz} = 0, \tag{107}$$

und für einen Punkt, dessen Coordinaten x, y, z sind,

$$\left.\begin{aligned} p_{xx} &= \frac{P}{\Omega} + \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y, \\ p_{xy} &= A_1 \frac{S_z}{\Omega} + B_1 \frac{S_y}{\Omega} + C_1 \frac{M_x}{J}, \\ p_{zx} &= A_2 \frac{S_z}{\Omega} + B_2 \frac{S_y}{\Omega} + C_2 \frac{M_x}{J}. \end{aligned}\right\} \tag{108}$$

Dies sind die allgemeinen Formeln für alle einzelnen Fälle, deren Kenntniss im Verlaufe dieses Werkes nothwendig sein wird. Die Functionen A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2 können für viele in der Praxis vorkommende Fälle nicht genau bestimmt werden; für den rechteckigen, kreisförmigen und elliptischen Querschnitt kann dies, wie oben gesehen wurde, vollkommen geschehen.

29. Cohäsions- oder Festigkeitsgleichungen. — Damit alle Formeln und Resultate, welche wir bis jetzt zusammengestellt haben, genau seien, müssen die auf die betrachteten festen Körper wirkenden Kräfte in gewissen Grenzen bleiben, welche von den Dimensionen und der Materie des festen Körpers abhängen. Diese Grenzen geben die Werthe jener Kräfte, welche in den festen Körpern derartige Deformationen hervorrufen, dass dieselben nicht vollkommen verschwinden, wenn auch die Wirkung der äusseren Kräfte aufhört.

Diese Grenzen können für jede Materie, für jede Form des festen Körpers und für jede Art der Einwirkung der äusseren Kräfte nur durch directe Erfahrungen gefunden werden.'

Nachdem man bis jetzt für die grosse Verschiedenheit der sich in der Construction darbietenden Fälle noch nicht die genügende Anzahl von Erfahrungen hat und noch lange nicht haben wird, hat man versucht, die Bestimmung dieser Grenzen, wenigstens für die isotropen Körper, auf allgemeine, wenn auch nicht strenge Methoden zu leiten.

Da es sich also um nicht ganz strenge Methoden handelt, wurden von den verschiedenen Autoren auch zweierlei Principe verfolgt, welche wir nachfolgend bekannt geben und kurz discutiren wollen.

1. Einige Autoren, namentlich Navier und Barré de Saint-Venant haben das Princip angenommen, dass in allen isotropen Körpern derselben Materie die Grenzen der elastischen Widerstandsfähigkeit erreicht werden, sobald — wie auch die Art der Einwirkung der äusseren Kräfte sei — die grösste specifische Dehnung einen gegebenen Werth erlangt hat.

Dieses Princip scheint nicht vollkommen streng zu sein; denn es kann geschehen, dass die Grenze der elastischen Widerstandsfähigkeit in einem Punkte nicht allein von dem Werthe der grössten specifischen Dehnung in diesem Punkte abhängt, sondern auch von der Art, wie die specifische Dehnung nach den verschiedenen Richtungen sich ändert. Wenn z. B. ein Prisma von einer über seine ganze Oberfläche gleichmässig vertheilten Zugkraft in Anspruch genommen wird, so ist die specifische Dehnung um einen Punkt nach allen Richtungen dieselbe; wenn hingegen auf dieses Prisma eine nur über dessen Grundflächen gleichmässig vertheilte Zugkraft wirkt, so findet die grösste specifische Dehnung parallel zu den Seitenkanten statt, während in den Richtungen, welche mit diesen Kanten einen immer grösser werdenden Winkel einschliessen, die specifische Dehnung sich immer mehr vermindert und sich sogar in eine Contraction verwandelt, wie oben gesehen wurde. Es ist also zweifelhaft, ob in diesen beiden so verschiedenen Fällen die elastische Widerstandsfähigkeit erreicht wird, sobald die grösste specifische Dehnung denselben Werth hat.

2. Andere Autoren, darunter Clebsch, nehmen an, dass in allen isotropen Körpern derselben Materie die Grenzen der elastischen Widerstandsfähigkeit ohne Rücksicht auf die Art der Einwirkung der äusseren Kräfte erreicht sei, sobald die grösste elastische Kraft in einem Punkte einen gegebenen Werth erlangt hat.

Dieses Princip scheint wie das vorhergehende nicht vollkommen streng zu sein, denn es kann geschehen, dass die Grenzen der elastischen Widerstandsfähigkeit nicht nur von dem Werthe der grössten elastischen Kraft, sondern auch von der Art und Weise abhängen, nach welcher sich die elastische Kraft um den betrachteten Punkt ändert, sobald man

die Richtung des Flächenelementes ändert, in Bezug auf welches man diese Kraft betrachtet. Es wird z. B. in einem Prisma, welches einer über seine ganze Oberfläche gleichmässig vertheilten Zugkraft unterworfen ist, die grösste elastische Kraft um einen Punkt dieselbe sein, wie auch die Richtung des durch diesen Punkt gehenden Flächenelementes sein mag; wenn hingegen auf dieses Prisma nur eine über dessen Grundflächen gleichmässig vertheilte Zugkraft wirkt, so erreicht die elastische Kraft in einem Punkt ihren grössten Werth für ein zu den Grundflächen paralleles Flächenelement und vermindert sich, bis sie gleich Null wird, sobald die Richtung des Elementes sich soweit ändert, dass dasselbe senkrecht auf die Grundflächen steht.

Es wurde aber schon oben gesehen, dass in diesen beiden Fällen der grösste Werth der elastischen Kraft derselbe ist, vorausgesetzt, dass die elastische Kraft in beiden Grundflächen für jede derselben gleich ist. Nachdem in dem zweiten Falle die Kräfte nur auf die Grundflächen des Prismas wirken, während dies in dem ersten Falle auch auf die seitliche Oberfläche stattfindet, ist es nicht klar, dass die Grenzen der elastischen Widerstandsfähigkeit in diesen beiden Fällen für denselben Werth der grössten elastischen Kraft erreicht seien.

Es ist daher keines dieser beiden aufgestellten Principien vollkommen streng; da man dieselben aber aus Mangel eines Besseren oft annehmen muss, so lassen wir die Formeln für ihre Anwendung folgen, indem wir ersteres so verallgemeinern, wie es Barré de Saint-Venant gethan hat, um dasselbe auch für Körper mit drei Symmetrieebenen anwendbar zu machen.

In dieser Hinsicht ist zu beachten, dass, wenn man für einen Körper von absolut beliebigem Gefüge ∂_r die specifische Dehnung um einen Punkt in einer gewissen Richtung nennt und δ_r die specifische Dehnung, welche in derselben Richtung mit der Elasticitätsgrenze correspondirt, ∂_r in allen Richtungen kleiner sein muss als δ_r. Die Richtung, für welche am meisten zu befürchten ist, dass die Elasticitätsgrenze erreicht werde, ist jene, wo das Verhältniss $\frac{\partial_r}{\delta_r}$ den grössten Werth hat, hiebei stets unter der Einheit bleibend.

Was das zweite Princip betrifft, so lässt sich dasselbe nicht in gleicher Weise verallgemeinern, denn wenn man P die elastische Kraft

auf ein Flächenelement um einen Punkt nennt und R den Werth der elastischen Kraft, welche auf dieses Element senkrecht steht und mit der Elasticitätsgrenze correspondirt, so kann man das Verhältniss $\frac{P}{R}$ nicht als Mass der Festigkeit annehmen, da die effective Kraft P im Allgemeinen nicht senkrecht sein wird auf das Element, auf welches sie wirkt.

30. Ableitung der Cohäsionsgleichungen aus den grössten specifischen Dehnungen. — In Nummer 3 wurde die Formel

$$\partial_r = \partial_x \cos^2\alpha + \partial_y \cos^2\beta + \partial_z \cos^2\gamma + g_{yz}\cos\beta\cos\gamma + g_{zx}\cos\gamma\cos\alpha + g_{xy}\cos\alpha\cos\beta$$

gefunden. Man kann nun voraussetzen, dass der betrachtete Körper in jedem Punkte drei zu den Coordinatenebenen parallele Symmetrieebenen besitze, und kann die mit den Elasticitätsgrenzen correspondirenden specifischen Spannungen in den zu diesen Ebenen senkrechten Richtungen

$$\delta_x, \quad \delta_y, \quad \delta_z \text{ nennen.}$$

Die specifische Dehnung δ_r, welche mit der Elasticitätsgrenze correspondirt und welche mit den Achsen die Winkel α, β, γ bildet, wird eine Function dieser drei Winkel sein, und zwar in der Art, dass sie die Werthe δ_x, δ_y, δ_z gibt, sobald man die Strecke r successive parallel zu den Coordinatenachsen nimmt.

Zur Vereinfachung sei

$$\delta_r = \delta_x \cos^2\alpha + \delta_y \cos^2\beta + \delta_z \cos^2\gamma; \tag{109}$$

es wären sodann die mit dem grössten Werthe des Verhältnisses $\frac{\partial_r}{\delta_r}$ correspondirenden Werthe von α, β, γ zu suchen.

Nachdem die Gleichung

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1, \tag{110}$$

besteht, kann man einen der Winkel α, β, γ, z. B. α, als Function der beiden anderen betrachten und erhält folglich als Gleichungen zur Bestimmung des Maximums und Minimums der Function $\frac{\delta_r}{\partial_r}$

$$\frac{d\frac{\partial_r}{\delta_r}}{d\cos\alpha}\,\frac{d\cos\alpha}{d\cos\beta} + \frac{d\frac{\partial_r}{\delta_r}}{d\cos\beta} = 0, \qquad \frac{d\frac{\partial_r}{\delta_r}}{d\cos\alpha}\,\frac{d\cos\alpha}{d\cos\gamma} + \frac{d\frac{\partial_r}{\delta_r}}{d\cos\gamma} = 0.$$

Die Gleichung (110) gibt aber

$$\cos\alpha\,\frac{d\cos\alpha}{d\cos\beta}+\cos\beta=0,\qquad \cos\alpha\,\frac{d\cos\alpha}{d\cos\gamma}+\cos\gamma=0,$$

und somit erhält man durch Elimination der Verhältnisse $\frac{d\cos\alpha}{d\cos\beta}$ und $\frac{d\cos\alpha}{d\cos\gamma}$ aus den vorhergehenden Gleichungen

$$\frac{1}{\cos\alpha}\,\frac{d\,\frac{\partial_r}{\delta_r}}{d\cos\alpha}=\frac{1}{\cos\beta}\,\frac{d\,\frac{\partial_r}{\delta_r}}{d\cos\beta}=\frac{1}{\cos\gamma}\,\frac{d\,\frac{\partial_r}{\delta_r}}{d\cos\gamma}.$$

Wenn man den gemeinsamen Werth aller drei Ausdrücke k nennt, so erhält man

$$\frac{d\,\frac{\partial_r}{\delta_r}}{d\cos\alpha}=k\cos\alpha,\qquad \frac{d\,\frac{\partial_r}{\delta_r}}{d\cos\beta}=k\cos\beta,\qquad \frac{d\,\frac{\partial_r}{\delta_r}}{d\cos\gamma}=k\cos\gamma;\quad (111)$$

multiplicirt man die drei Gleichungen der Reihe nach mit $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ und addirt sie sodann, so findet man unter Berücksichtigung der Gleichung (110)

$$\cos\alpha\,\frac{d\,\frac{\partial_r}{\delta_r}}{d\cos\alpha}+\cos\beta\,\frac{d\,\frac{\partial_r}{\delta_r}}{d\cos\beta}+\cos\gamma\,\frac{d\,\frac{\partial_r}{\delta_r}}{d\cos\gamma}=k.$$

Da $\frac{\partial_r}{\delta_r}$ mit Bezug auf $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ eine homogene Function ist, so ist, wie man weiss, die linke Seite der letzten Gleichung gleich der Function $\frac{\partial_r}{\delta_r}$ selbst, multiplicirt mit ihrem Exponenten; nachdem aber dieser Exponent Null ist, hat man

$$k=0.$$

Aus den Gleichungen (111) ergibt sich durch Differentiation und nachherige Multiplication mit ∂_r

$$\frac{d\partial_r}{d\cos\alpha}-\frac{\partial_r}{\delta_r}\frac{d\delta_r}{d\cos\alpha}=0,\quad \frac{d\partial_r}{d\cos\beta}-\frac{\partial_r}{\delta_r}\frac{d\delta_r}{d\cos\beta}=0,\quad \frac{d\partial_r}{d\cos\gamma}-\frac{\partial_r}{\delta_r}\frac{d\delta_r}{d\cos\gamma}=0,$$

oder wenn man für die Differentialquotienten von ∂_r und δ_r deren Werthe aus den Ausdrücken (8) und (109) einsetzt,

$$\left.\begin{aligned}
2\left(\partial_x - \delta_x \frac{\partial_r}{\delta_r}\right)\cos\alpha + g_{xy}\cos\beta + g_{zx}\cos\gamma = 0,\\
g_{xy}\cos\alpha + 2\left(\partial_y - \delta_y \frac{\partial_r}{\delta_r}\right)\cos\beta + g_{yz}\cos\gamma = 0,\\
g_{zx}\cos\alpha + g_{yz}\cos\beta + 2\left(\partial_z - \delta_z \frac{\partial_r}{\delta_r}\right)\cos\gamma = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (112)$$

Durch Elimination der Verhältnisse $\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$ und $\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha}$ aus diesen drei Gleichungen erhält man

$$\left.\begin{aligned}
8\left(\partial_x - \delta_x \frac{\partial_r}{\delta_r}\right)\left(\partial_y - \delta_y \frac{\partial_r}{\delta_r}\right)\left(\partial_z - \delta_z \frac{\partial_r}{\delta_r}\right) - 2\,g^2_{yz}\left(\partial_x - \delta_x \frac{\partial_r}{\delta_r}\right)\\
- 2\,g^2_{zx}\left(\partial_y - \delta_y \frac{\partial_r}{\delta_r}\right) - 2\,g^2_{xy}\left(\partial_z - \delta_z \frac{\partial_r}{\delta_r}\right) + 2\,g_{yz}\,g_{zx}\,g_{xy} = 0,
\end{aligned}\right\} \quad (113)$$

d. i. eine Gleichung dritten Grades in Bezug auf $\frac{\partial_r}{\delta_r}$, deren grösste Wurzel zugleich den grössten Werth dieses Verhältnisses gibt.

Sobald man diese Wurzel gefunden hat, erhält man auch mit Hilfe der Gleichungen (112) im Verein mit der Gleichung (110) die correspondirenden Werthe von α, β, γ.

Da die Gleichung (113) von ungerader Ordnung ist, muss sie nothwendiger Weise wenigstens eine reale Wurzel haben; es lässt sich sogar beweisen, dass alle drei Wurzeln real sind. In der That kann man leicht ersehen, dass, wenn man dieselbe in der Form

$$\left.\begin{aligned}
\left(\frac{\partial_x}{\delta_x} - \frac{\partial_r}{\delta_r}\right)\left[4\left(\frac{\partial_y}{\delta_y} - \frac{\partial_r}{\delta_r}\right)\left(\frac{\partial_z}{\delta_z} - \frac{\partial_r}{\delta_r}\right) - \frac{g^2_{yz}}{\delta_y\delta_z}\right] - \frac{g^2_{zx}}{\delta_z\delta_x}\left(\frac{\partial_y}{\delta_y} - \frac{\partial_r}{\delta_r}\right)\\
- \frac{g^2_{xy}}{\delta_x\delta_y}\left(\frac{\partial_z}{\delta_z} - \frac{\partial_r}{\delta_r}\right) + \frac{g_{yz}\,g_{zx}\,g_{xy}}{\delta_x\,\delta_y\,\delta_z} = 0,
\end{aligned}\right\} \quad (114)$$

schreibt und a und b jene Werthe von $\frac{\partial_r}{\delta_r}$ nennt, welche die Grösse in der Klammer [] gleich Null machen, a und b reale Grössen sind, und dass eine derselben, z. B. a, grösser, die andere aber kleiner als jedes der Verhältnisse $\frac{\partial_y}{\delta_y}$ und $\frac{\partial_z}{\delta_z}$ ist.

Substituirt man auf der linken Seite der Gleichung (114) a für $\frac{\partial_r}{\delta_r}$, so erhält man

$$-\frac{g^2_{zx}}{\delta_z\,\delta_x}\left(\frac{\partial_y}{\delta_y}-a\right)-\frac{g^2_{xy}}{\delta_x\,\delta_y}\left(\frac{\partial_z}{\delta_z}-a\right)+\frac{g_{yz}\,g_{zx}\,g_{xy}}{\delta_x\,\delta_y\,\delta_z},$$

welcher Ausdruck stets positiv ist, nachdem

$$\left(\frac{\partial_y}{\delta_y}-a\right) \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial_z}{\delta_z}-a\right)$$

nach obiger Annahme stets negativ sind.

In gleicher Weise sieht man, dass, wenn man b für $\frac{\partial_r}{\delta_r}$ substituirt, die linke Seite der Gleichung (114) stets eine negative Grösse darstellt. Gibt man also dem Ausdrucke $\frac{\partial_r}{\delta_r}$ die Werthe $+\infty$, a, b, $-\infty$, so erhält man Werthe mit den Zeichen $-+-+$, wodurch bewiesen wird, dass die drei Wurzeln der Gleichung (113) reell sind.

Wir wollen nun diese Gleichung auf den in den vorhergehenden Nummern betrachteten Fall anwenden, dass das Prisma in jedem Punkte drei Symmetrieebenen habe, welche senkrecht sind auf die Coordinatenachsen.

Es wurde schon früher gesehen, dass, wenn selbst das Prisma durch die verschiedenen Systeme von Kräften, welche in Nummer 28 betrachtet wurden, gleichzeitig beansprucht wird, man

$$g_{yz}=0, \qquad \partial_y=-\eta\,\partial_x, \qquad \partial_z=-\eta'\,\partial_x$$

erhält, so dass die Gleichung (113) folgende Form annimmt:

$$4\left(\partial_x-\delta_x\frac{\partial_r}{\delta_r}\right)\left(\eta\,\partial_x+\delta_y\frac{\partial_r}{\delta_r}\right)\left(\eta'\partial_x+\delta_z\frac{\partial_r}{\delta_r}\right)+g^2_{zx}\left(\eta\,\partial_x+\delta_y\frac{\partial_r}{\delta_r}\right)+g^2_{xy}\left(\eta'\partial_x+\delta_z\frac{\partial_r}{\delta_r}\right)=0.$$

Wenn ausserdem die Elasticität parallel zur y- und z-Achse dieselbe ist, hat man

$$\eta=\eta' \quad \text{und} \quad \delta_y=\delta_z,$$

wodurch man in der Lage ist, obige Gleichung durch den Factor $\eta\,\partial_x+\delta_y\frac{\partial_r}{\delta_r}$ zu dividiren; hiedurch erhält man eine Gleichung zweiten Grades

$$4\left(\partial_x - \delta_x \frac{\partial_r}{\delta_r}\right)\left(\eta\,\partial_x + \delta_y \frac{\partial_r}{\delta_r}\right) + g^2_{zx} + g^2_{xy} = 0,$$

und sind deren Wurzeln

$$\frac{\partial_r}{\delta_r} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial_x}{\delta_x} - \frac{\eta\,\partial_x}{\delta_y}\right) \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{\partial_x}{\delta_x} + \frac{\eta\,\partial_x}{\delta_y}\right)^2 + \frac{g^2_{zx} + g^2_{xy}}{4\,\delta_x\,\delta_y}}. \tag{115}$$

Damit aber die Elasticitätsgrenzen nicht überschritten werden, muss bei Annahme des Princips von Barré de Saint-Venant das Verhältniss $\frac{\partial_r}{\delta_r}$ stets kleiner als Eins sein, d. h. es muss die grössere der oben gefundenen Wurzeln kleiner sein als Eins; man erhält also die Bedingung

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial_x}{\delta_x} - \frac{\eta\,\partial_x}{\delta_y}\right) + \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{\partial_x}{\delta_x} + \frac{\eta\,\partial_x}{\delta_y}\right)^2 + \frac{g^2_{zx} + g^2_{xy}}{4\,\delta_x\,\delta_y}} < 1. \tag{116}$$

Um diese Formel leichter anwenden zu können, ist es nützlich, dieselbe zu transformiren, indem man statt den Dehnungen und Verschiebungen die Kräfte einführt. Wenn wir nun folgende Benennungen einführen:

E_x und E_y für die normalen Elasticitätscoëfficienten in der Richtung der x und in den beiden Richtungen der y und z;

F für die tangentialen Elasticitätscoëfficienten in den beiden Richtungen der y und z, d. h. für den gemeinsamen Werth der Coëfficienten F_2 und F_3 der Gleichungen (18);

R_x und R_y für die Normalkräfte in zwei auf die x- und y-Achse senkrecht stehenden Elementen, welche mit den Grenzen δ_x und δ_y der specifischen elastischen Dehnung correspondiren;

so haben wir

$$\partial_x = \frac{p_{xx}}{E_x}, \qquad g_{zx} = \frac{p_{zx}}{F}, \qquad g_{xy} = \frac{p_{xy}}{F},$$

$$\delta_x = \frac{R_x}{E_x}, \qquad \delta_y = \frac{R_y}{E_y},$$

und aus der Formel (116) wird sodann

$$\frac{p_{xx}}{2R_x}\left(1 - \eta\frac{R_x}{R_y}\frac{E_y}{E_x}\right) + \sqrt{\frac{p^2_{xx}}{4R^2_x}\left(1 + \eta\frac{R_x}{R_y}\frac{E_y}{E_x}\right)^2 + \frac{E_x E_y}{4F^2}\frac{p^2_{zx} + p^2_{xy}}{R_x R_y}} < 1. \tag{117}$$

Macht man zur Vereinfachung

$$\eta \frac{R_x}{R_y} \frac{E_y}{E_x} = \chi, \qquad \frac{4F^2}{E_x E_y} R_x R_y = R^2_t, \tag{118}$$

so erhält man

$$\frac{1-\chi}{2} \frac{p_{xx}}{R_x} + \sqrt{\left(\frac{1+\chi}{2}\right)^2 \frac{p^2_{xx}}{R^2_x} + \frac{p^2_{zx} + p^2_{xy}}{R^2_t}} < 1. \tag{119}$$

Ist die Normalkraft p_{xx} gleich Null, so ergibt diese Gleichung

$$\frac{\sqrt{p^2_{zx} + p^2_{xy}}}{R_t} < 1,$$

woraus folgt, dass R_t jener Werth der Tangentialkraft $\sqrt{p^2_{zx} + p^2_{xy}}$ ist, welchen dieselbe niemals überschreiten darf; oder in anderen Worten, R_t ist der *tangentiale Widerstandscoëfficient.*

Wenn für einen Körper mit drei Symmetrieebenen in jedem Punkte der Versuch gezeigt hätte, dass

$$\chi = \frac{1}{3} \quad \text{und} \quad \frac{R_t}{R_x} = \frac{3}{4} \quad \text{ist,}$$

so würde man für die Formel (119) bei gleichzeitiger Multiplication mit R_x folgende Formel erhalten:

$$\frac{1}{3} p_{xx} + \frac{2}{3} \sqrt{p^2_{xx} + 4(p^2_{zx} + p^2_{xy})} < R_x. \tag{120}$$

Für einen isotropen Körper hat man

$$\eta = \frac{1}{4}, \qquad R_x = R_y = R, \qquad E_x = E_y = E, \qquad F = \frac{2}{5} E,$$

und daher

$$\chi = \frac{1}{4}, \qquad R_t = \frac{4}{5} R,$$

so dass die Formel (119) unter gleichzeitiger Multiplication mit R sich folgendermassen darstellt:

$$\frac{3}{8} p_{xx} + \frac{5}{8} \sqrt{p^2_{xx} + 4(p^2_{zx} + p^2_{xy})} < R. \tag{121}$$

Das Resultat $R_t = \frac{4}{5} R$ zeigt, dass für die isotropen Körper der tangentiale Widerstandscoëfficient gleich ist $\frac{4}{5}$ des normalen Widerstandscoëfficienten.

31. Ableitung der Cohäsionsgleichungen aus den grössten elastischen Kräften. — In Nummer 7 wurde gefunden, dass die zu den Achsen parallelen Componenten der in einem ebenen Elemente, dessen Normale mit den Achsen die drei Winkel α, β, γ bildet, thätigen elastischen Kraft durch folgende Formeln ausgedrückt werden:

$$\left.\begin{aligned} X &= p_{xx}\cos\alpha + p_{xy}\cos\beta + p_{zx}\cos\gamma, \\ Y &= p_{xy}\cos\alpha + p_{yy}\cos\beta + p_{yz}\cos\gamma, \\ Z &= p_{zx}\cos\alpha + p_{yz}\cos\beta + p_{zz}\cos\gamma. \end{aligned}\right\} \tag{122}$$

Suchen wir nun, ob es ein ebenes Element gibt, in welchem sich eine nach dessen Normale gerichtete elastische Kraft F kund gibt. Ist dies der Fall und nennt man α, β, γ die Winkel, welche diese Normale mit den Achsen bildet, so sind die Componenten der Kraft F durch folgende Ausdrücke gegeben:

$$X = F\cos\alpha, \qquad Y = F\cos\beta, \qquad Z = F\cos\gamma,$$

und obige Gleichungen ergeben die folgenden:

$$\left.\begin{aligned} (p_{xx} - F)\cos\alpha + p_{xy}\cos\beta + p_{zx}\cos\gamma &= 0, \\ p_{xy}\cos\alpha + (p_{yy} - F)\cos\beta + p_{yz}\cos\gamma &= 0, \\ p_{zx}\cos\alpha + p_{yz}\cos\beta + (p_{zz} - F)\cos\gamma &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{123}$$

Diese drei Gleichungen dienen in Verbindung mit der Gleichung

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

zur Bestimmung der Unbekannten $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ und F.

Wenn man aus den Gleichungen (123) zuerst die Verhältnisse $\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$ und $\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha}$ eliminirt, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} (p_{xx} - F)(p_{yy} - F)(p_{zz} - F) - (p_{xx} - F)p^2_{yz} - (p_{yy} - F)p^2_{zx} \\ - (p_{zz} - F)p^2_{xy} + 2p_{yz}p_{zx}p_{xy} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{124}$$

das ist eine Gleichung vom dritten Grade, deren drei Wurzeln, welche wir F_1, F_2, F_3 nennen wollen, reell sind, was sich auf dieselbe Weise begründen lässt, wie dies bei der Beweisführung über die Realität der drei Wurzeln der Gleichung (113) der vorhergehenden Nummer gethan wurde.

Nimmt man an, dass eine der Wurzeln der Gleichung (124), z. B. F_1 gefunden wäre, und dass sodann die x-Achse die correspondirende

Richtung habe, so wird die elastische Kraft in dem auf die x-Achse senkrechten Elemente normal auf dieses Element sein, und man hat

$$p_{xx} = F_1, \qquad p_{xy} = 0, \qquad p_{zx} = 0;$$

die Gleichungen (123) ergeben somit

$$\begin{aligned} (F_1 - F)\cos\alpha &= 0, \\ (p_{yy} - F)\cos\beta + p_{yz}\cos\gamma &= 0, \\ p_{yz}\cos\beta + (p_{zz} - F)\cos\gamma &= 0; \end{aligned}$$

damit nun die erste dieser Gleichungen für $F = F_2$ oder $F = F_3$ gelte, muss

$$\cos\alpha = 0$$

sein, woraus folgt, dass die beiden Normalen auf die zwei Elemente, in welchen die elastischen Normalkräfte F_2 und F_3 stattfinden, senkrecht sind auf die x-Achse. Da also F_1, F_2, F_3 die drei Wurzeln der Gleichung (124) in beliebiger Reihenfolge darstellen können, folgt daraus, dass die drei Elemente, auf welche die elastischen Normalkräfte thätig sind, aufeinander senkrecht stehen.

Wählt man nun die Coordinatenachsen in der Richtung der drei elastischen Kräfte F_1, F_2, F_3, so ergibt sich

$$p_{yz} = 0, \qquad p_{zx} = 0, \qquad p_{xy} = 0,$$

und aus den Gleichungen (122) wird sodann

$$X = p_{xx}\cos\alpha, \qquad Y = p_{yy}\cos\beta, \qquad Z = p_{zz}\cos\gamma.$$

In diesem Falle wird die elastische Kraft F auf ein Element, dessen Normale mit den Achsen die Winkel α, β, γ bildet, die Resultirende der drei Kräfte X, Y, Z sein, so dass

$$F^2 = p^2_{xx}\cos^2\alpha + p^2_{yy}\cos^2\beta + p^2_{zz}\cos^2\gamma. \tag{125}$$

Trägt man von dem Mittelpunkte dieses Elementes auf dessen Normale eine Länge auf, welche dem positiv genommenen Verhältnisse $\frac{1}{F}$ entspricht, und nennt man x, y, z die Projectionen dieser Länge auf die drei rechtwinkeligen Achsen, welche durch diesen Punkt in der Richtung der drei hauptsächlichen elastischen Kräfte geführt werden, so erhält man

$$x = \frac{1}{F}\cos\alpha, \qquad y = \frac{1}{F}\cos\beta, \qquad z = \frac{1}{F}\cos\gamma,$$

und aus der Gleichung (125) wird sodann

$$1 = p^2_{xx} x^2 + p^2_{yy} y^2 + p^2_{zz} z^2. \tag{126}$$

Dieselbe stellt ein Ellipsoid dar, dessen Hauptachsen parallel sind zu den hauptsächlichen elastischen Kräften F_1, F_2, F_3, und bei welchem die Strahlen vom Mittelpunkte an die Oberfläche numerisch gleich sind der umgekehrten Grösse des Werthes der elastischen Kräfte. Es correspondirt also die grösste und kleinste elastische Kraft mit der kleinsten und grössten Achse des Ellipsoids.

Betrachtet man wieder die Gleichung dritten Grades (124) und nimmt man an, dass, wie für das Prisma, welches successive oder gleichzeitig der Dehnung, Torsion oder Biegung unterworfen wurde, für die drei zu den Achsen senkrechten Elemente

$$p_{yy} = 0, \qquad p_{zz} = 0, \qquad p_{yz} = 0$$

ist, so kann man diese Gleichung durch F dividiren und erhält

$$(p_{xx} - F)\, F + p^2_{zx} + p^2_{xy} = 0;$$

es ist daher

$$F = \frac{p_{xx}}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2_{xx}}{4} + p^2_{zx} + p^2_{xy}}\,.$$

Die grösste Spannung ist somit

$$\frac{p_{xx}}{2} + \sqrt{\frac{p^2_{xx}}{4} + p^2_{zx} + p^2_{xy}}, \tag{127}$$

so dass, wenn R die Grenze der Spannung per Quadratmeter genannt wird, welche der betrachtete feste Körper ertragen kann, man als Festigkeitsbedingung folgende Formel erhält:

$$\frac{p_{xx}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{p^2_{xx} + 4\,(p^2_{zx} + p^2_{xy})} < R. \tag{128}$$

Vergleicht man diese Bedingung mit derjenigen (121), welche für denselben Fall am Ende der vorhergehenden Nummer erhalten wurde, so sieht man, dass, wenn für R in beiden Fällen derselbe Werth genommen wird, sowohl die Bedingung (128) als auch jene (121) erfüllt wird. Denn man hat offenbar

$$\frac{3}{8} p_{xx} + \frac{5}{8} \sqrt{p^2_{xx} + 4(p^2_{zx} + p^2_{xy})} = \frac{p_{xx}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{p^2_{xx} + 4(p^2_{zx} + p^2_{xy})}$$

$$+ \frac{1}{8} \left[\sqrt{p^2_{xx} + 4(p^2_{zx} + p^2_{xy})} - p_{xx} \right]$$

und folglich

$$\frac{p_{xx}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{p^2_{xx} + 4(p^2_{zx} + p^2_{xy})} < \frac{3}{8} p_{xx} + \frac{5}{8} \sqrt{p^2_{xx} + 4(p^2_{zx} + p^2_{xy})} < R.$$

Man sieht also, dass für die in der angenommenen Weise beanspruchten Prismen es immer sicherer ist, jene Festigkeitsbedingung anzunehmen, welche wir mit Bestimmung einer Grenze für die grösste specifische Dehnung abgeleitet haben, als diejenige zu wählen, auf Grund welcher man die Grenzen für die grösste elastische Kraft feststellt; umsomehr, als die erstere in der Weise verallgemeinert werden kann, dass sie für Körper mit einer Elasticitätsachse oder auch für solche mit drei Symmetrieebenen anwendbar wird, während die zweite Bedingung nur auf isotrope Körper anwendbar ist.

4. Capitel.

Annäherungsweise Anwendungen.

1. Erfahrungsresultate. — Aus den im vorhergehenden Capitel gelösten Problemen ersehen wir, dass man die elastischen Kräfte bestimmen kann, welche in einem der Dehnung, Biegung oder Torsion unterworfenen Prisma zur Geltung kommen, sobald dasselbe nur von solchen Kräften beansprucht wird, welche auf dessen Grundflächen wirken und nach einem gegebenen Gesetze vertheilt sind.

In der Praxis ist aber das Gesetz fast niemals bekannt, nach welchem die auf die Grundflächen eines Prismas wirkenden Kräfte vertheilt sind, so dass, streng genommen, die im vorhergehenden Capitel gefundenen Lösungen ohne Werth wären, wenn die Kenntniss dieses Gesetzes zur, *wenigstens annäherungsweisen*, Bestimmung der im Inneren stattfindenden elastischen Kräfte absolut nothwendig wäre. Glücklicherweise kann man derselben entbehren, und zwar auf Grund von nachfolgenden Resultaten, welche die Erfahrung bewiesen hat, und welche von den grössten Wichtigkeiten sind.

Sobald ein in Bezug auf die Querdimensionen sehr langes Prisma Kräften unterworfen ist, welche auf dessen Grundflächen wirken, bleiben die in einem nicht zu nahe an einem Ende befindlichen Querschnitte statthabenden elastischen Kräfte beinahe dieselben, wenn auch die Vertheilung der äusseren Kräfte sich in beliebiger Weise ändert, wohl vorausgesetzt, dass die resultirenden Kräfte und Momente aller auf die Grundfläche wirkenden Kräfte in Bezug auf drei fixe, rechtwinkelige Achsen immer dieselben bleiben. Der Einfluss der Vertheilung der äusseren Kräfte macht sich nur in den sehr nahe bei den Grundflächen befindlichen Querschnitten geltend, aber derselbe nimmt sehr schnell ab und wird in einer noch sehr kleinen und mit den Querdimensionen des Prismas zu vergleichenden Entfernung gänzlich bedeutungslos.

Es folgt daraus, dass, mit Ausnahme zweier kurzer Prismen an den Grundflächen, die Vertheilung der elastischen Kräfte im Inneren des Prismas nach den Gesetzen stattfindet, welche wir in den Problemen über die einfache Dehnung, über die Torsion und die Biegung angeführt und bewiesen haben.

Dieses Resultat kann auch noch für die in der Praxis am häufigsten zur Betrachtung kommenden Fälle verallgemeinert werden.

Nehmen wir an, dass das Prisma $ABDC$, welches im Verhältnisse zu dessen Querdimensionen als sehr lang anzusehen ist, nicht nur durch die auf die beiden Grundflächen wirkenden Kräfte, welche nach einem

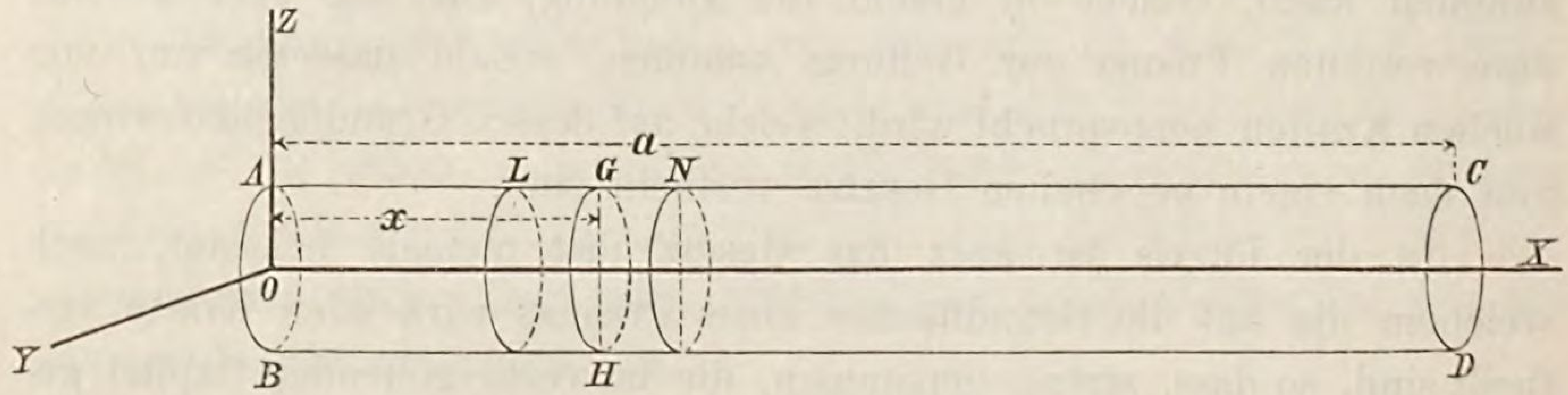


Fig. 9.

beliebigen Gesetze vertheilt sind, sondern auch durch die Schwere und durch Kräfte beansprucht werde, welche nach einem stetigen Gesetze über die ganze seitliche Oberfläche vertheilt sind, und betrachten wir einen Querschnitt GH, welcher nicht sehr nahe an einer Grundfläche liegt, so können wir P_x, S_y, S_z die Summen der Componenten aller rechts von diesem Querschnitte auf das Prisma wirkenden Kräfte in der Richtung der Achse des Prismas und in der Richtung der Trägheitshauptachsen des Querschnittes GH nennen, und M_x, M_y, M_z die Summen der Momente dieser Kräfte in Bezug auf dieselben Achsen.

Ferner denken wir uns rechts und links von diesem Querschnitte zwei niedrige Prismen GN und GL, deren Länge mit den Querdimensionen des ganzen Prismas vergleichbar ist, so dass dieselbe im Verhältnisse zur Gesammtlänge des Prismas sehr klein ist. Wenn der Querschnitt GH von den beiden Grundflächen genügend weit entfernt ist, so kann offenbar die Schwere der beiden sehr kleinen Stücke GL und GN, sowie die auf deren Oberfläche wirkenden Kräfte im Vergleiche zur Schwere des Stückes GC und der auf die Oberfläche desselben und

die Grundfläche CD wirkenden Kräfte vernachlässigt werden. Unter der Voraussetzung, dass man die Wirkung der Schwere auf das Stück LN, sowie die auf die Oberfläche wirkenden äusseren Kräfte behoben hätte, und dass man in den Querschnitten L und N äussere Kräfte wirken liesse, welche in Bezug auf den Querschnitt GH wieder die Summe der Componenten P_x, S_y, S_z und die Summe der Momente M_x, M_y, M_z geben, werden die Bedingungen des Elasticitätsgleichgewichtes des kleinen Prismas LN sehr wenig geändert werden, und die elastischen Kräfte in dem Querschnitte GH bleiben ungefähr dieselben, wie sie früher waren.

Wenn aber das flache Prisma LN kein Gewicht hätte, und wenn auf dessen Oberfläche keine Kraft wirken würde, so könnte man dasselbe als ein Prisma betrachten, welches durch Kräfte beansprucht wird, welche nur über dessen Grundflächen vertheilt sind; denn die auf die Stücke AL und NC wirkenden Kräfte machen ihren Einfluss auf das Stück LN nur durch die in den Querschnitten L und N thätigen elastischen Kräfte geltend. Es folgt daher aus dem oben angeführten Erfahrungssatze, dass die in dem Querschnitte GH, dessen Entfernungen von den Querschnitten in L und N mit den Querdimensionen des Prismas vergleichbar sind, wirkenden elastischen Kräfte ungefähr nach dem Gesetze der einfachen Dehnung, der Torsion und der Biegung vertheilt sind, wie sie Barré de Saint-Venant gefunden hat; d. h. dass man für einen beliebigen Punkt des Querschnittes GH

$$p_{yy} = 0, \qquad p_{zz} = 0, \qquad p_{yz} = 0$$

hat, und für einen Punkt, für welchen y und z die Transversalcoordinaten, d. h. die Entfernungen von den Trägheitshauptachsen sind, folgende Formeln:

$$\left.\begin{aligned} p_{xx} &= \frac{P_x}{\Omega} + \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y, \\ p_{xy} &= A_1 \frac{S_z}{\Omega} + B_1 \frac{S_y}{\Omega} + C_1 \frac{M_x}{J}, \\ p_{zx} &= A_2 \frac{S_z}{\Omega} + B_2 \frac{S_y}{\Omega} + C_2 \frac{M_x}{J}, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

wobei A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2 Functionen von y und z sind, welche von der Form des Querschnittes, nicht aber von den äusseren Kräften abhängig

sind. Diese Functionen lassen sich nach dem, was in den Problemen über die Torsion und über die Biegung gesagt wurde, für jeden Fall bestimmen.

Dies sind also die Formeln, welche für einen beliebigen Querschnitt eines Prismas annäherungsweise die Art der Vertheilung der elastischen Kräfte geben, sobald dasselbe durch die Schwere und durch Kräfte beansprucht wird, welche sowohl über die Grundflächen, als auch über die seitliche Oberfläche nach einem beliebigen, aber stetigen Gesetze vertheilt sind.

Diese Formeln sind sogar auch dann noch anwendbar, wenn das Prisma in unterbrochener Weise belastet wäre, z. B. durch Gewichte, welche in verschiedenen Punkten auf das Prisma wirken, vorausgesetzt, dass man in diesem Falle nicht solche Querschnitte betrachtet, welche den Angriffspunkten der Gewichte sehr nahe sind.

2. Lange und dünne Körper, welche eine beliebige Curve zur Achse haben. — Nun betrachten wir einen langen und dünnen Körper, dessen Achse, d. h. der geometrische Ort der Schwerpunkte der Querschnitte eine beliebige, gerade oder krumme Linie sei, welche aber, im Falle sie gekrümmt ist, in jedem Punkte einen im Verhältnisse zu den Querdimensionen sehr grossen Krümmungshalbmesser hat.

Es sei vorausgesetzt, dass der geometrische Ort der Trägheitshauptachsen der Querschnitte des festen Körpers, d. h. der senkrecht auf die Achse stehenden Schnitte, zwei continuirliche Flächen bilde, welche senkrecht aufeinander stehen, und welche so beschaffen sind, dass der Winkel zweier geradliniger Erzeugenden in Bezug auf deren Entfernung auf der Körperachse gemessen ein sehr kleiner sei.

Ferner wird vorausgesetzt, dass zwei unendlich nahe Querschnitte nur solche Differenzen in den Dimensionen zeigen, welche im Verhältnisse zur Entfernung der Querschnitte sehr klein sind.

Es ist nun klar, dass, wenn in einem solchen festen Körper ein Stück betrachtet wird, dessen Länge zwar sehr klein, aber immerhin mit den Dimensionen des Querschnittes noch vergleichbar ist, man dieses Stück annäherungsweise als ein Prisma oder einen Cylinder betrachten und daher zur Bestimmung der elastischen Kräfte in einem beliebigen Querschnitte die Formeln (1) der vorhergehenden Nummer anwenden kann.

Diese Formeln geben also nicht nur für die prismatischen oder cylindrischen Körper, sondern auch für feste Körper von der oben definirten Beschaffenheit annäherungsweise die Vertheilung der elastischen Kräfte.

Es ist selbstverständlich, dass für diese festen Körper dieselben Beschränkungen eintreten wie für die Prismen oder Cylinder, d. h. dass, sobald die auf die Enden eines festen Körpers wirkenden äusseren Kräfte nicht nach dem durch die Formeln (1) gegebenen Gesetze vertheilt sind oder sobald die auf die seitliche Oberfläche wirkenden Kräfte nicht in steter Weise thätig sind, sondern als isolirte, in verschiedenen Punkten wirkende Kräfte auftreten, die Formeln (1) annäherungsweise die wahre Vertheilung der elastischen Kräfte nur für jene Querschnitte geben, welche sich nicht sehr nahe bei den Enden des festen Körpers oder bei den Angriffspunkten der isolirten äusseren Kräfte befinden.

3. Beziehung zwischen den Resultirenden P_y, P_z und den resultirenden Momenten M_y, M_z. — Denken wir uns in einem festen Körper, welcher den in vorhergehender Nummer ausgesprochenen Bedingungen entspricht, zwei unendlich nahe Querschnitte, deren einer die auf der Achse des Körpers gemessene krummlinige Abscisse s, der andere die Abscisse $s + ds$ hat, so können wir für den ersten Querschnitt folgende Benennungen einführen:

M_y, M_z für die auf dessen Trägheitshauptachsen bezogenen Biegungsmomente;

S_y, S_z für die Schubkräfte parallel zu diesen Achsen.

Ferner nennen wir $p\,ds$ die auf diesen Querschnitt senkrechte Componente der Schwerkraft des unendlich kleinen, zwischen den beiden Querschnitten enthaltenen Elementes des festen Körpers und der äusseren Kräfte, welche auf die seitliche Oberfläche dieses Elementes wirken, und y, z die Coordinaten des Angriffspunktes dieser Componente in Bezug auf die Trägheitshauptachsen des Querschnittes.

Nachdem man auf Grund der Annahme die Trägheitshauptachsen des ersten Querschnittes mit denen des zweiten parallel laufend betrachten kann, werden bei Vernachlässigung der unendlich kleinen Grössen zweiter Ordnung die Biegungsmomente in Bezug auf die genannten Achsen folgende sein:

$$M'_y = M_y - S_z\, ds - p\, ds\,.\, z,$$
$$M'_z = M_z + S_y\, ds + p\, ds\,.\, y.$$

Wenn zwischen den beiden betrachteten Querschnitten keine begrenzte Kraft wirkend ist, und wenn daher für die benachbarten Querschnitte die Biegungsmomente continuirliche Functionen der krummlinigen Abscisse s sind, so haben wir nach den Principien der Differentialrechnung

$$M'_y = M_y + \frac{d\, M_y}{d\, s}\, d\, s \quad \text{und} \quad M'_z = M_z + \frac{d\, M_z}{d\, s}\, d\, s.$$

Der Vergleich dieser Formeln mit den vorhergehenden ergibt bei gleichzeitiger Division durch $d\, s$

$$\frac{d\, M_y}{d\, s} = - S_z - p\, z,$$
$$\frac{d\, M_z}{d\, s} = S_y + p\, y.$$

Die beiden Ausdrücke $p\, z$ und $p\, y$ sind aber in folgenden beiden Fällen gleich Null:

1. Wenn die auf das betrachtete Element des Körpers wirkende Kraft senkrecht ist auf die Achse desselben, denn dann ist die auf den Querschnitt senkrechte Componente $p\, d\, s$ gleich Null;

2. wenn die Coordinaten y und z Null sind, d. h. wenn die auf das betrachtete Element wirkende Kraft über den ganzen Querschnitt gleichmässig vertheilt ist.

Die vorhergehenden Gleichungen erhalten sodann die Form

$$\frac{d\, M_y}{d\, s} = - S_z \quad \text{und} \quad \frac{d\, M_z}{d\, s} = S_y,$$

so dass *die Differentialquotienten der Biegungsmomente* M_y und M_z *gleich sind den Schubkräften* $- S_z$ *und* S_y.

Ausser in den beiden angeführten Fällen findet diese Beziehung sonst nicht statt; nachdem aber bei den im Verhältnisse zur Länge sehr dünnen, festen Körpern die Coordinaten y und z nothwendigerweise sehr klein sein müssen, können im Allgemeinen die Producte $p\, z$ und $p\, y$ im Vergleiche zu S_z und S_y vernachlässigt werden, woraus folgt, dass für diese festen Körper die obgenannte Beziehung wenigstens annäherungsweise stets Geltung hat.

4. Formel für die Deformationsarbeit. — Wir wollen nun eine Formel aufstellen, um die Deformationsarbeit eines den in beiden vorhergehenden Nummern angenommenen Bedingungen entsprechenden festen Körpers zu bestimmen, und erinnern zu diesem Behufe an die in Nummer 5 des 3. Kapitels gefundene Formel, um die Deformationsarbeit des Volumenelementes $\overline{\omega} = \Delta x \; \Delta y \; \Delta z$ auszudrücken, d. i. an die Formel

$$\frac{1}{2}(p_{xx}\,\partial_x + p_{yy}\,\partial_y + p_{zz}\,\partial_z + p_{yz}\,g_{yz} + p_{zx}\,g_{zx} + p_{xy}\,g_{xy})\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z.$$

Nimmt man als Anfangspunkt der Coordinaten einen Punkt der Achse des festen Körpers, als y- und z-Achse die Trägheitshauptachsen des durch diesen Punkt gehenden Querschnittes und betrachtet man jenes Volumenelement, welches zwischen dem durch den Anfangspunkt gehenden und dem die Abscisse Δx habenden Querschnitte liegt, so hat man, wie in Nummer 2 gesehen wurde, für alle Punkte dieses Elementes

$$p_{yy} = 0, \qquad p_{zz} = 0, \qquad p_{yz} = 0,$$

woraus folgt, dass der Ausdruck für die Deformationsarbeit des ganzen betrachteten Volumens $\Delta x \; \Delta y \; \Delta z$

$$\frac{1}{2}(p_{xx}\,\partial_x + p_{xy}\,g_{xy} + p_{zx}\,g_{zx})\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$$

ist. Die Deformationsarbeit des ganzen zwischen den beiden Querschnitten genommenen Volumenelementes wird also ausgedrückt durch die Formel

$$\frac{1}{2}\,\Delta x \int\!\!\int (p_{xx}\,\partial_x + p_{xy}\,g_{xy} + p_{zx}\,g_{zx})\,\Delta y\,\Delta z,$$

indem man das Doppelintegral auf den ganzen Querschnitt ausdehnt. Um die Benennungen der Differentialrechnung einzuführen, kann man Δ in d und Δx in $d\,s$ verwandeln, da Δx das Element der Achse des festen Körpers darstellt; man erhält also folgende Formel:

$$\frac{1}{2}\,d\,s \int\!\!\int (p_{xx}\,\partial_x + p_{xy}\,g_{xy} + p_{zx}\,g_{zx})\,d\,y\,d\,z. \tag{2}$$

Wird angenommen, dass der Körper in jedem Punkte drei Symmetrieebenen habe, welche senkrecht auf die Coordinatenachsen sind, so erhält man auf Grund der Gleichungen (18) des vorhergehenden Kapitels

$$p_{xx} = a_1 \partial_x + F_3 \partial_y + F_2 \partial_z, \qquad 0 = F_1 g_{yz},$$
$$0 = F_3 \partial_x + a_2 \partial_y + F_1 \partial_z, \qquad p_{zx} = F_2 g_{zx},$$
$$0 = F_2 \partial_x + F_1 \partial_y + a_3 \partial_z, \qquad p_{xy} = F_3 g_{xy};$$

nennt man E den longitudinalen Elasticitätscoëfficienten der Materie des festen Körpers zwischen den beiden betrachteten Querschnitten, so kann man hieraus

$$\partial_x = \frac{p_{xx}}{E}, \qquad g_{zx} = \frac{p_{zx}}{F_2}, \qquad g_{xy} = \frac{p_{xy}}{F_3}$$

ableiten und aus Formel (2) wird sodann

$$\frac{1}{2} d s \int\!\!\int \left(\frac{p^2_{xx}}{E} + \frac{p^2_{zx}}{F_2} + \frac{p^2_{xy}}{F_3} \right) d y\, d z. \tag{3}$$

In diese Formel kann man für p_{xx}, p_{xy}, p_{zx} deren Ausdrücke (1) setzen. Bedenkt man nun, dass die transversalen Coordinaten y und z auf die durch den Mittelpunkt des betrachteten Querschnittes gehenden Trägheitshauptachsen bezogen wurden, und dass somit

$$\int\!\!\int y\, d y\, d z = 0, \qquad \int\!\!\int z\, d y\, d z = 0, \qquad \int\!\!\int y z\, d y\, d z = 0,$$
$$\int\!\!\int d y\, d z = \Omega, \qquad \int\!\!\int z^2 d y\, d z = I_y, \qquad \int\!\!\int y^2 d y\, d z = I_z,$$

ist, so erhält man sogleich

$$\frac{1}{2} d s \int\!\!\int p^2_{xx}\, d y\, d z = \frac{d s}{2 E} \left(\frac{P^2_x}{\Omega} + \frac{M^2_z}{I_z} + \frac{M^2_y}{I_y} \right); \tag{4}$$

macht man ferner

$$\int\!\!\int \left(\frac{A^2_1}{F_3} + \frac{A^2_2}{F_2} \right) d y\, d z = \frac{A\, \Omega}{F_2}, \qquad \int\!\!\int \left(\frac{B_1 C_1}{F_3} + \frac{B_2 C_2}{F_2} \right) d y\, d z = \frac{H}{F_2},$$
$$\int\!\!\int \left(\frac{B^2_1}{F_3} + \frac{B^2_2}{F_2} \right) d y\, d z = \frac{B\, \Omega}{F_2}, \qquad \int\!\!\int \left(\frac{C_1 A_1}{F_3} + \frac{C_2 A_2}{F_2} \right) d y\, d z = \frac{K}{F_2},$$
$$\int\!\!\int \left(\frac{C^2_1}{F_3} + \frac{C^2_2}{F_2} \right) d y\, d z = \frac{C\, J}{F_2}, \qquad \int\!\!\int \left(\frac{A_1 B_1}{F_3} + \frac{A_2 B_2}{F_2} \right) d y\, d z = \frac{L}{F_2},$$

so ergibt sich

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{2}\,d\,s\int\!\!\int\left(\frac{p^2_{xy}}{F_3}+\frac{p^2_{zx}}{F_2}\right)d\,y\,d\,z=\frac{d\,s}{2\,F_2}\Bigl(A\,\frac{S^2_z}{\Omega}+B\,\frac{S^2_y}{\Omega}+C\,\frac{M^2_x}{J}\\ +H\,\frac{S_y M_x}{\Omega\,J}+K\,\frac{S_z M_x}{\Omega\,J}+L\,\frac{S_y S_z}{\Omega^2}\Bigr).\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

Die Coëfficienten A, B, C, H, K, L sind nur von der Form des Querschnittes und von der Beziehung zwischen den tangentialen Elasticitätscoëfficienten abhängig und bleiben daher für einen gegebenen Querschnitt und eine bekannte Materie immer dieselben, welches auch die auf die Körper wirkenden Kräfte seien, und welche Curve auch von der Achse desselben gebildet würde.

Um die totale Deformationsarbeit der betrachteten unendlich kleinen Schichte zu erhalten, hat man nur nothwendig, die Formeln (4) und (5) zu vereinigen, da die erstere die Deformationsarbeit in Folge der elastischen Normalkräfte und die zweite diejenige der elastischen Tangentialkräfte gibt.

5. Vereinfachung der Formel (5) auf Grund der Vertheilung der äusseren Kräfte. — In den gewöhnlichen Constructionen kommt es selten vor, dass Theile derselben der Torsion unterworfen sind, d. h. es ist fast immer das Moment M_x gleich Null. In diesem Falle erhält die Formel (5) folgende Gestalt:

$$\frac{1}{2}\,d\,s\int\!\!\int\left(\frac{p^2_{xy}}{F_3}+\frac{p^2_{zx}}{F_2}\right)d\,y\,d\,z=\frac{d\,s}{2\,F_2}\left(A\,\frac{S^2_z}{\Omega}+B\,\frac{S^2_y}{\Omega}+L\,\frac{S_y S_z}{\Omega^2}\right).\quad(6)$$

Ferner trifft es fast immer zu, dass bei festen Körpern, deren Achse eine ebene Curve ist, die als y-Achse genommene Trägheitshauptachse der Querschnitte senkrecht auf die Ebene der Curve ist, und dass die äusseren Kräfte in Bezug auf diese Ebene symmetrisch vertheilt sind. In diesem Falle, dem einzigen, welcher in den rückwärts angeführten Anwendungen erscheint, hat man für alle Querschnitte nicht nur $M_x = 0$, sondern auch

$$M_y = 0,\qquad S_y = 0,$$

so dass die rechten Seiten der Gleichungen (4) und (5) bedeutend vereinfacht werden, und zwar:

$$\frac{d\,s}{2\,E}\left(\frac{P^2_x}{\Omega}+\frac{M^2_z}{I_z}\right),$$

$$\frac{ds}{2F_2} A \frac{S^2_z}{\Omega};$$

die ganze Deformationsarbeit der unendlich kleinen Schichte wird somit

$$\frac{ds}{2E}\left(\frac{P^2_x}{\Omega} + \frac{M^2_z}{I_z}\right) + \frac{ds}{2F_2} A \frac{S^2_z}{\Omega}. \tag{7}$$

Dies ist auch die Formel, von welcher wir bei allen Anwendungen Gebrauch machen werden.

6. Vereinfachung der Formel (5) auf Grund der Querschnittsformen. — Die Formel (5) wird auch dann vereinfacht, wenn zwar von den Grössen S_y, S_z, M_x keine gleich Null ist, wenn aber der Querschnitt des festen Körpers in Bezug auf eine der Trägheitshauptachsen symmetrisch ist.

Nachdem es aber im Verlaufe des vorliegenden Werkes nicht nothwendig ist, auf diese Vereinfachungen zurückzukommen, da die Coëfficienten H, K, L so wie so in der Formel (7) nicht enthalten sind, führen wir die wichtigsten Resultate nur an, ohne dieselben zu beweisen.

Man nehme zuerst an, dass der Querschnitt zur z-Achse symmetrisch sei, und dass

$$A_1, \quad B_1, \quad C_1, \quad A_2, \quad B_2, \quad C_2$$

die Werthe der für einen Punkt des Querschnitttes in die Ausdrücke von p_{xy} und p_{zx} eintretenden Coëfficienten seien. Es lässt sich leicht nachweisen, dass für den zu dem angenommenen Punkte in Bezug auf die z-Achse symmetrischen Punkt die analogen Coëfficienten folgende sind:

$$-A_1, \quad B_1, \quad C_1, \quad A_2, \quad -B_2, \quad -C_2.$$

Es folgt daraus, dass die Grössen

$$\frac{C_1 A_1}{F_3} + \frac{C_2 A_2}{F_2}, \qquad \frac{A_1 B_1}{F_3} + \frac{A_2 B_2}{F_2}$$

für die beiden betrachteten Punkte des Querschnittes dieselben Werthe mit entgegengesetzten Zeichen haben, und dass daher die Coëfficienten K und L gleich Null sind.

Wenn also der Querschnitt in Bezug auf die als z-Achse genommene Trägheitshauptachse symmetrisch ist, so ergibt die rechte Seite der Formel (5)

$$\frac{ds}{2F_2}\left(A\frac{S^2_z}{\Omega} + B\frac{S^2_y}{\Omega} + C\frac{M^2_x}{J} + H\frac{S_y M_x}{\Omega J}\right). \tag{8}$$

Wenn hingegen der Querschnitt in Bezug auf die als y-Achse genommene Trägheitshauptachse symmetrisch ist, so werden die Coëfficienten H und L gleich Null, und die Formel (5) nimmt folgende Form an:

$$\frac{ds}{2F_2}\left(A\frac{S^2_z}{\Omega}+B\frac{S^2_y}{\Omega}+C\frac{M^2_x}{J}+K\frac{S_zM_x}{\Omega J}\right). \tag{9}$$

Man sieht daraus, dass der Coëfficient L in beiden Fällen gleich Null ist, d. h. dass er Null ist für alle jene Querschnitte, welche eine Symmetrieachse haben, denn es ist bekannt, dass jede Symmetrieachse eines Querschnittes zugleich eine Trägheitshauptachse ist.

Wenn also ein Querschnitt in Bezug auf eine Achse symmetrisch ist, und wenn ferner das Torsionsmoment M_x gleich Null ist, so wird die rechte Seite der Gleichung (5)

$$\frac{ds}{2F_2}\left(A\frac{S^2_z}{\Omega}+B\frac{S^2_y}{\Omega}\right). \tag{10}$$

Ist das Moment M_x nicht gleich Null, sind aber die beiden Trägheitshauptachsen eines Querschnittes gleichzeitig Symmetrieachsen, so sind dem oben Gesagten zufolge die drei Coëfficienten H, K, L alle Null, und die rechte Seite der Gleichung (5) nimmt daher nachfolgende Form an:

$$\frac{ds}{2F_2}\left(A\frac{S^2_z}{\Omega}+B\frac{S^2_y}{\Omega}+C\frac{M^2_x}{J}\right). \tag{11}$$

Es ist noch zu beachten, dass in der Formel (5), sowie in allen von derselben abgeleiteten Formeln die Coëfficienten A, B, C, H, K, L nicht nur von der Querschnittsform, sondern auch von dem Verhältnisse F_3 zu F_2 abhängen.

Wenn die Elasticität in der Richtung der beiden Trägheitshauptachsen eines Querschnittes gleich ist, hat man $F_2 = F_3 = F$, und die Coëfficienten $A, B, \ldots$ sind nur noch von der Form des Querschnittes abhängig.

Dies ist der einzige Fall, welchen wir in den Anwendungen betrachten werden.

Wenn der Körper isotrop ist, hat man, wie oben bewiesen wurde,

$$F=\frac{2}{5}E.$$

7. Deformation langer und dünner fester Körper. — Wir betrachten nun einen festen Körper $A\,A'B'B$, welcher den in Nummer 2

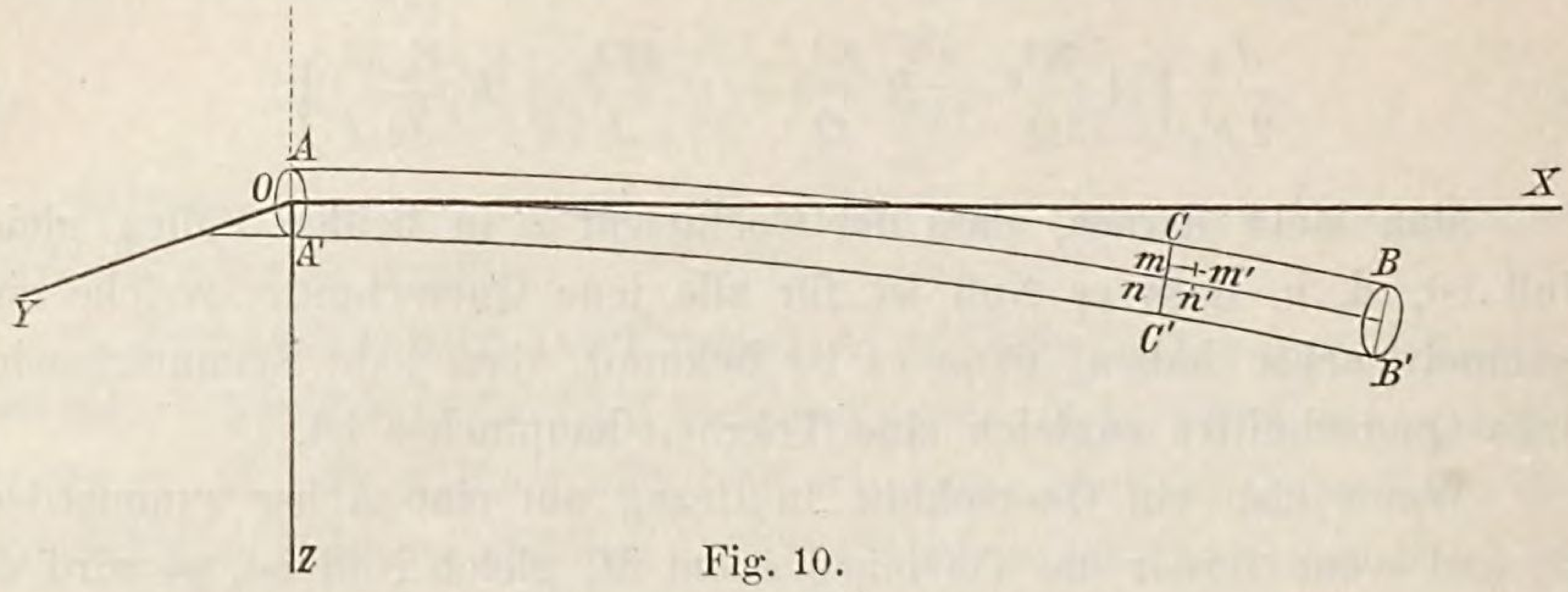


Fig. 10.

ausgesprochenen Bedingungen entspricht, und bestimmen die relativen Verrückungen seiner Punkte, d. h. die Deformationen des Körpers in Folge der äusseren Kräfte.

Diesen Körper beziehen wir auf drei rechtwinkelige Achsen in der Weise, dass vor der Deformation die x-Achse senkrecht auf den Querschnitt $A\,A'$ ist, und die y- und die z-Achse mit den Trägheitshauptachsen dieses Querschnittes zusammenfallen; ferner nehmen wir an, dass nach der Deformation die x-Achse senkrecht ist auf das centrale Element des Querschnittes $A\,A'$, und dass die y-Achse tangirend ist zu jener Trägheitsachse, mit welcher sie vor der Deformation zusammengefallen ist.

Könnte man die Deformationsarbeit des festen Körpers in einer Function aller auf dessen Punkte wirkenden elementaren Kräfte ausdrücken, ausgenommen derjenigen, welche auf das centrale Element des Querschnittes $A\,A'$ wirken (denn dieses Element muss als während der Deformation fix bleibend betrachtet werden), so findet man offenbar nach dem, was im Vorhergehenden gezeigt wurde, die Werthe der Verrückungen dieser Punkte in der Richtung der Achsen, indem man die Differentialquotienten der Deformationsarbeit des ganzen festen Körpers mit Bezug auf die zu den Achsen parallelen Componenten der in einem Punkte wirkenden elementaren Kraft nimmt.

Um die Verrückungen eines Punktes zu finden, auf welchen keine Kraft wirkt, kann man annehmen, dass in diesem Punkte drei beliebige Kräfte $\overline{\omega}_x$, $\overline{\omega}_y$, $\overline{\omega}_z$ parallel zu den Achsen wirken, womit sodann die De-

formationsarbeit des ganzen festen Körpers in einer Function der effectiv auf ihn wirkenden Kräfte, sowie von $\overline{\omega}_x$, $\overline{\omega}_y$, $\overline{\omega}_z$ ausgedrückt wird, und nimmt schliesslich den Differentialquotienten der Deformationsarbeit mit Bezug auf diese drei beliebigen Kräfte, welche nach beendeter Berechnung gleich Null gesetzt werden.

Für die strenge Anwendung dieses Vorganges müsste man aber in der Lage sein, das Problem aufzulösen, jene elastischen Kräfte genau zu bestimmen, welche sich in dem festen Körper $A\,A'\,B'\,B$ unter der Einwirkung beliebiger äusserer Kräfte entwickeln; dies übersteigt aber die Kräfte der bekannten analytischen Mechanik, denn wie aus dem vorhergehenden Capitel zu ersehen ist, wurde dieses Problem bis jetzt nur für Prismen oder Cylinder gelöst, deren seitliche Oberfläche frei ist, und deren Grundflächen durch Kräfte beansprucht werden, welche nach einem ganz speciellen Gesetze vertheilt sind.

Glücklicherweise kann man in der Praxis diese strenge Auflösung entbehren, sobald man feste Körper betrachtet, welche im Verhältnisse zu deren Länge sehr dünn sind; denn in diesen Fällen kann man in folgender Weise vorgehen und erhält Resultate, welche zwar nur annähernd, aber immerhin genügend sind.

Zu diesem Behufe nimmt man an, dass auf den Querschnitt $C\,C'$ äussere Kräfte wirken, deren Componentensummen in der Richtung der Normale auf den Querschnitt und in den Richtungen der Trägheitshauptachsen gleich $\overline{\omega}_1$, $\overline{\omega}_2$, $\overline{\omega}_3$ sind; die Summe der Momente in Bezug auf diese Normale und diese Achsen seien μ_1, μ_2, μ_3. Die in vorhergehender Nummer gegebenen Formeln lassen ersehen, dass, wenn man die Deformationsarbeit des ganzen festen Körpers in einer Function der äusseren Kräfte ausdrückt, man eine Formel zweiter Ordnung in Bezug auf $\overline{\omega}_1$, $\overline{\omega}_2$, $\overline{\omega}_3$, μ_1, μ_2, μ_3 erhält. Von dieser Formel lässt sich aber sagen, *dass die Differentialquotienten derselben nach* $\overline{\omega}_1$, $\overline{\omega}_2$, $\overline{\omega}_3$ *— mit einem genügenden Grade von Genauigkeit — die Verrückungen des Querschnittsmittelpunktes in der Richtung der Normale und der Trägheitshauptachsen gibt, während die Differentialquotienten derselben Formel nach* μ_1, μ_2, μ_3 *die Drehung des Querschnittes um diese drei Linien gibt.*

In der That resultirt aus dem Lehrsatze von den Differentialquotienten der Arbeit, dass, sobald die auf den Querschnitt $C\,C'$ wirkenden

Kräfte derartig vertheilt sind, dass während der Deformation dieser Querschnitt eben bleibt und dass dessen Contour sich nicht ändert, die oben angeführte Beziehung auch streng genommen stattfindet.

Uebrigens enthält die Formel, mittelst welcher die Deformationsarbeit ausgedrückt wurde, die drei Resultirenden $\overline{\omega}_1$, $\overline{\omega}_2$, $\overline{\omega}_3$ und die drei Momente μ_1, μ_2, μ_3, ist aber von dem Gesetz der Vertheilung der auf den Querschnitt CC' wirkenden äusseren Kräfte nicht abhängig, woraus folgt, dass die Differentialquotienten dieser Formel nach $\overline{\omega}_1$, $\overline{\omega}_2$, $\overline{\omega}_3$, μ_1, μ_2, μ_3 die Verrückungen des Mittelpunktes und die Drehungen dieses Querschnittes geben, als ob die auf denselben wirkenden äusseren Kräfte in der Weise vertheilt wären, dass der Querschnitt auch nach der Deformation des festen Körpers eben wäre.

Aus Obigem ist zu ersehen, dass, wie auch das Gesetz der Vertheilung der auf den Querschnitt CC' wirkenden äusseren Kräfte sei, wohl vorausgesetzt, dass dieselben die Componentensummen $\overline{\omega}_1$, $\overline{\omega}_2$, $\overline{\omega}_3$ und die Momentensummen μ_1, μ_2, μ_3 geben, die elastischen Kräfte im Innern des festen Körpers und somit auch die relativen Verrückungen seiner Punkte für die ganze Ausdehnung des festen Körpers annäherungsweise dieselben bleiben, ausgenommen einer sehr dünnen Schichte, welche den Querschnitt CC' zur Grundfläche hat. Wenn die Dicke dieser Schichte in Bezug auf die Länge der Stücke $AA'C'C$ und $CC'B'B$ vernachlässigt werden kann, so werden die absoluten Verrückungen der Punkte des Querschnittes CC' nicht merklich geändert werden, wie auch die relativen Verrückungen der Punkte dieser sehr dünnen Schichte seien, d. h. sie werden annähernd dieselben sein, wie auch das Gesetz sei, nach welchem die Vertheilung der äusseren Kräfte auf den Querschnitt CC' stattfindet.

Was oben für einen beliebigen Querschnitt bewiesen wurde, lässt sich offenbar auch für die äussersten Enden AA' und BB' anwenden.

8. Kleinheit der Deformationsarbeit, welche den Tangentialkräften entspricht, sobald keine Torsion vorhanden ist. — Wir haben gesehen, dass, wenn keine Torsion vorhanden ist und wenn alle Querschnitte des festen Körpers eine Symmetrieachse haben, die Deformationsarbeit einer unendlich dünnen Schichte durch die Formel

$$\frac{ds}{2E}\left(\frac{P^2_x}{\Omega}+\frac{M^2_z}{I_z}+\frac{M^2_y}{I_y}\right)+\frac{ds}{2F_2}\left(A\frac{S^2_z}{\Omega}+B\frac{S^2_y}{\Omega}\right) \tag{12}$$

ausgedrückt wird, wobei die in Betracht gezogene Schichte zwischen den auf der Körperachse gemessenen Abscissen s und ds liegt.

Es lässt sich aber zeigen, dass die drei Ausdrücke

$$\frac{ds}{2E}\frac{P^2_x}{\Omega}, \qquad \frac{ds}{2F_2}A\frac{S^2_z}{\Omega}, \qquad \frac{ds}{2F_2}B\frac{S^2_y}{\Omega}$$

im Allgemeinen sehr klein sind im Verhältnisse zu den zwei anderen, welche die Biegungsmomente enthalten.

Macht man in der That

$$\frac{I_z}{\Omega}=\varrho^2_y, \qquad \frac{I_y}{\Omega}=\varrho^2_z,$$

d. h. nennt man ϱ_y und ϱ_z die *Drehungshalbmesser* des Querschnittes in Bezug auf die Trägheitshauptachsen, und nimmt man an, dass der Körper isotrop sei, so dass $F_2=\frac{2}{5}E$ ist, so wird aus Formel (12) die folgende:

$$\frac{ds}{2E\Omega}\left(P^2_x+\frac{M^2_y}{\varrho^2_z}+\frac{M^2_z}{\varrho^2_y}\right)+\frac{ds}{2E\Omega}\left(\frac{5A}{2}S^2_z+\frac{5B}{2}S^2_y\right).$$

Alle rechts von der betrachteten Schichte auf den festen Körper wirkenden äusseren Kräfte geben in der Richtung senkrecht auf den Querschnitt eine Resultirende gleich P_x, deren Richtung den Querschnitt in einem Punkte trifft, dessen Coordinaten in Bezug auf die Trägheitshauptachsen y und z sind. Die Resultirende aller Componenten, welche parallel zu der als y-Achse angenommenen Trägheitshauptachse sind, ist S_y und deren Entfernung von dem Querschnitte wird D_2 genannt. Schliesslich ist die Resultirende aller zu der als z-Achse angenommenen Trägheitshauptachse parallelen Componenten gleich S_z und deren Entfernung von dem Querschnitte gleich D_1.

Unter der Voraussetzung, dass P_x eine Zugkraft sei, und dass die Richtung der S_y und der S_z mit der Richtung der negativen Coordinaten y und z zusammenfallen, hat man offenbar

$$M_y=P_x z_1+S_z D_1 \quad \text{und} \quad M_z=-P_x y_1-S_y D_2.$$

Durch Substitution dieser Werthe in obige Formel erhält man

$$\frac{d\,s}{2\,E\,\Omega}\Big[P^2_x\Big(1+\frac{y^2_1}{\varrho^2_y}+\frac{z^2_1}{\varrho^2_z}\Big)+2\,P_x\,S_y\,\frac{y_1\,D_2}{\varrho^2_y}+2\,P_x\,S_z\,\frac{z_1\,D_1}{\varrho^2_z}$$
$$+\,S^2_z\Big(\frac{5\,A}{2}+\frac{D^2_1}{\varrho^2_z}\Big)+S^2_y\Big(\frac{5\,B}{2}+\frac{D^2_2}{\varrho^2_y}\Big)\Big].$$

Wenn der Körper lang und dünn ist, werden im Allgemeinen die Hebelsarme y_1, z_1, D_1, D_2 sehr gross sein im Verhältnisse zu dessen Querdimensionen; und nachdem die Drehungshalbmesser ϱ_y und ϱ_z immer kleiner sind als die Breiten der Querschnitte, auf welche sie bezogen werden, so folgt daraus, dass die Quotienten

$$\frac{y_1}{\varrho_y},\qquad \frac{z_1}{\varrho_z},\qquad \frac{D_1}{\varrho_z},\qquad \frac{D_2}{\varrho_y}$$

sehr grosse Zahlen sind. Man kann also in Bezug auf deren Quadrate sowohl die Einheit, als auch die Grössen $\frac{5\,A}{2}$ und $\frac{5\,B}{2}$ vernachlässigen, vorausgesetzt, dass diese letzteren im Allgemeinen eine sehr kleine Zahl von Einheiten enthalten, wie wir dies später sehen werden.

Die letzte Formel wird somit

$$\frac{d\,s}{2\,E\,\Omega}\Big[P^2_x\Big(\frac{y^2_1}{\varrho^2_y}+\frac{z^2_1}{\varrho^2_z}\Big)+2P_x\,S_y\frac{y_1\,D_2}{\varrho^2_y}+2P_x\,S_z\frac{z_1\,D_1}{\varrho^2_z}+S^2_y\frac{D^2_2}{\varrho^2_y}+S^2_z\frac{D^2_1}{\varrho^2_z}\Big].$$

oder bei Berücksichtigung der oben gegebenen Ausdrücke für M_y und M_z und der Beziehungen $\Omega\,\varrho^2_z = I_y$ und $\Omega\,\varrho^2_y = I_z$

$$\frac{d\,s}{2\,E}\Big(\frac{M^2_z}{I_z}+\frac{M^2_y}{I_y}\Big). \tag{13}$$

Man sieht also, wie dies der Zweck der Beweisführung war, dass man im Allgemeinen in der Formel, welche die Deformationsarbeit einer unendlich dünnen Schichte gibt, die drei Ausdrücke, welche P_x, S_y und S_z enthalten, im Verhältnisse zu den anderen, welche die Biegungsmomente enthalten, vernachlässigen kann.

Die Betrachtungen, welche uns zu diesem Resultat geführt haben, sind für Querschnitte, welche sehr nahe an den Enden des festen Körpers sich befinden, nicht anwendbar. Uebrigens muss man bedenken, dass in den praktischen Anwendungen nicht die Deformationsarbeit isolirter Schichten, sondern jene des ganzen Körpers zu betrachten ist; so dass

der Irrthum, welcher für zwei kleine Stücke an den Enden stattfinden kann, unbedeutend ist in Bezug auf die Deformationsarbeit des ganzen festen Körpers, und man kann daher statt der genaueren, aber nicht so einfachen Formel (12) jene (13) nehmen.

Es kann geschehen und geschieht thatsächlich sehr oft, dass die Hebelarme der Resultirenden P_x in Bezug auf die Trägheitshauptachsen des betrachteten Querschnittes Null oder doch sehr klein sind. In diesem Falle sind die Verhältnisse $\frac{y^2_1}{\varrho^2_y}$ und $\frac{z^2_1}{\varrho^2_z}$ nicht mehr sehr gross, und man kann daher in Bezug auf dieselben die Einheit nicht mehr vernachlässigen; aber wenn die Hebelarme D_1 und D_2 im Verhältnisse zu den Drehungshalbmessern ϱ_y und ϱ_z sehr gross sind, erkennt man nach Obigem leicht, dass die Ausdrücke $\frac{5A}{2}S^2_z$ und $\frac{5B}{2}S^2_y$ mit Rücksicht auf die Ausdrücke $\frac{M^2_y}{\varrho^2_z}$ und $\frac{M^2_z}{\varrho^2_y}$ vernachlässigt werden können. Nun ist aber der Ausdruck P_x vom selben Grade wie die beiden Grössen $\frac{5A}{2}S^2_z$ und $\frac{5B}{2}S^2_y$ und kann daher zugleich mit diesen vernachlässigt werden, so dass selbst in dem Falle, als die Hebelarme y_1 und z_1 Null oder sehr klein sind, die Formel (12) auf die viel einfachere Formel (13) gebracht werden kann.

9. Betrachtungen über die krumme Fläche, welche von den Querschnitten nach der Deformation bei Berücksichtigung der alleinigen elastischen Normalkräfte gebildet wird. — Wir wollen nunmehr zeigen, dass, wenn die Tangentialkräfte p_{xy} und p_{zx} Null sind, die Querschnitte auch nach der Deformation eben bleiben.

Wenn man in der That zwei unendlich nahe Molecüle m und m' (s. Fig. 10, S. 146) betrachtet, deren Verbindungslinie $m\,m'$ vor der Deformation senkrecht ist auf den Querschnitt $C\,C'$, d. h. parallel zu dem Elemente $n\,n'$ der Achse des festen Körpers, so ist offenbar diese Linie auch nach der Deformation parallel zu demselben Achsenelemente; wenn ferner die Tangentialkräfte Null sind, werden es die Verschiebungen g_{xy} und g_{zx} auch sein, und die Linie $m\,m'$ wird nach der Deformation normal auf den Querschnitt $C\,C'$ sein, d. h. senkrecht auf das mit dem Punkte m correspondirende Element des Querschnittes.

Da nun nach der Deformation des festen Körpers die Strecken $m\,m'$ und $n\,n'$ zu einander parallel sind, so ist es klar, dass alle Elemente des Querschnittes senkrecht sein werden auf die Strecke $n\,n'$, und dass daher der Querschnitt eben und senkrecht auf die Körperachse sein wird.

Dasselbe Resultat kann auch aus der Gleichung

$$p_{xx} = \frac{P_x}{\Omega} + \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y$$

abgeleitet werden, denn substituirt man für p_{xx} dessen Werth $E\,\partial_x = E\,\dfrac{d\,u}{d\,x}$, so erhält man

$$d\,u = \frac{d\,x}{E}\left(\frac{P_x}{\Omega} + \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y\right);$$

bezieht man nun den Körper auf drei rechtwinkelige Achsen, deren Anfangspunkt im Mittelpunkte des Querschnittes $C\,C'$ sich befindet, und welche mit der Normale auf das centrale Element dieses Querschnittes, respective mit den Tangenten zu den Trägheitshauptachsen zusammenfallen, so ergibt die obige Formel die Grösse, um welche ein in der Entfernung $d\,x$ von dem Querschnitte $C\,C'$ sich befindlicher Punkt, welcher die Coordinaten y und z hat, sich von der $y\,z$-Ebene entfernt; $d\,x + d\,u$ gibt sodann die Schlussentfernung des betrachteten Punktes von dieser Ebene. Wenn man diese Formel auf alle Punkte eines unendlich nahe an $C\,C'$ sich befindlichen Querschnittes anwendet, so werden die Grössen $\dfrac{P_x}{\Omega}, \dfrac{M_z}{I_z}, \dfrac{M_y}{I_y}$ constant sein und die Grösse $d\,x$ muss auch als constant betrachtet werden, sobald die Querdimensionen des festen Körpers sehr klein sind im Verhältnisse zum Durchmesser der Biegungscurve.

In diesem Falle wird $d\,x + d\,u$ eine lineare Function von y und z sein; was uns zeigt, dass, wenn die aus der seitlichen Contraction entstehenden sehr kleinen Aenderungen der Coordinaten y und z vernachlässigt werden, der Querschnitt auch nach der Deformation eben bleibt.

10. Folgesatz. — Wir haben gesehen, dass der in Nummer 4 bewiesene Lehrsatz von den Differentialquotienten der Deformationsarbeit mit voller Genauigkeit besteht, sobald die Querschnitte nach der Deformation eben bleiben; in Nummer 5 wurde gesehen, dass für lange und dünne, feste Körper die Deformationsarbeit der elastischen Tangential-

kräfte im Verhältnisse zu derjenigen der elastischen Normalkräfte im Allgemeinen vernachlässigt werden kann; endlich wurde in der letzten Nummer gezeigt, dass mit Rücksicht auf die alleinigen Normalkräfte die Querschnitte nach der Deformation auch eben bleiben. Es folgt daraus, dass der in Nummer 4 gegebene Lehrsatz strenge anwendbar ist, sobald man die Deformationsarbeit in Folge der elastischen Tangentialkräfte gegenüber derjenigen der elastischen Normalkräfte vernachlässigt.

11. Definition und Bezeichnungen für diejenigen Systeme, welche man in der Praxis gewöhnlich zu betrachten hat. — Im Allgemeinen entsprechen die elastischen Systeme, welche man in der Praxis zu betrachten hat, folgenden Bedingungen:

1. Alle festen Körper haben, im Verhältnisse zu deren Länge, sehr kleine Querdimensionen;

2. die Achsen aller Körper sind in ein und derselben Ebene enthalten und nennt man diese *die Ebene des Systems;*

3. alle Querschnitte der verschiedenen festen Körper haben in dieser Ebene eine Trägheitshauptachse;

4. alle auf das System wirkenden elastischen Kräfte sind in dieser Ebene enthalten oder sind zu beiden Seiten derselben derartig vertheilt, dass für alle Querschnitte das Torsionsmoment M_x, das Biegungsmoment M_z in Bezug auf die in der Ebene des Systems befindliche Trägheitshauptachse, sowie die auf diese Ebene senkrechte Schubkraft S_y gleich Null sind.

Für diese Gattung von Systemen gibt es in einem beliebigen Querschnitte nur die Normalpressung (Normaldruck) P_x, das Biegungsmoment M_y in Bezug auf die senkrecht zur Ebene des Systems stehende Trägheitshauptachse und die zu dieser Ebene parallele Schubkraft S_z. Nachdem wir in der Folge nur Systeme zu betrachten haben werden, welche den oben angeführten Bedingungen entsprechen, können wir, zur Vereinfachung, die Zeiger der bisher angewendeten Bezeichnungen weglassen und nennen somit für einen beliebigen Querschnitt

P die Normalpressung,

S die Schubkraft parallel zur Ebene des Systems,

M das Biegungsmoment in Bezug auf die zu dieser Ebene senkrecht stehende Trägheitshauptachse,

I das Trägheitsmoment des Querschnittes in Bezug auf dieselbe Achse,

Ω die Fläche des Querschnittes.

Ferner nennen wir *Biegungsachse* eines Querschnittes die zur Ebene des Systems senkrecht stehende Trägheitshauptachse desselben.

Um die Deformationsarbeit einer unendlich kleinen Parallelschichte, deren Dicke ds ist, auszudrücken, kann man die Formel (7) benützen; dieselbe ergibt nach Einführung der oben gewählten Bezeichnungen

$$\frac{ds}{2E}\left(\frac{P^2}{\Omega}+\frac{M^2}{I}\right)+\frac{ds}{2F_2}A\frac{S^2}{\Omega}. \tag{14}$$

Nach dem in Nummer 5 Gesagten werden die beiden Ausdrücke

$$\frac{ds}{2E}\frac{P^2}{\Omega} \quad \text{und} \quad \frac{ds}{2F_2}A\frac{S^2}{\Omega}$$

im Verhältnisse zu

$$\frac{ds}{2E}\frac{M^2}{I}$$

gewöhnlich sehr klein sein.

Künftig nennen wir

den Ausdruck $\frac{ds}{2E}\frac{P^2}{\Omega}$ *Deformationsarbeit in Folge der Compression,*

den Ausdruck $\frac{ds}{2E}\frac{M^2}{I}$ *Deformationsarbeit in Folge der Biegung,*

den Ausdruck $\frac{ds}{2F_2}A\frac{S^2}{\Omega}$ *Deformationsarbeit in Folge der Verschiebung;*

für die langen und dünnen, festen Körper sind daher im Allgemeinen die Deformationsarbeiten in Folge der Compression und der Verschiebung im Verhältnisse zur Deformationsarbeit in Folge der Biegung sehr klein.

12. Transformation einer der Differentialgleichungen des Elasticitätsgleichgewichtes fester Körper. — Wir betrachten nun ein Prisma (oder einen Cylinder) gleich demjenigen, welches wir im vorhergehenden Capitel im Problem über die Biegung behandelt haben und welches wir als von nur auf dessen Grundflächen wirkende Normal- und Tangentialkräfte beansprucht ansehen.

Nach Obigem besteht für dieses Prisma in allen Punkten der Umfangslinie eines Querschnittes die folgende Beziehung:

$$p_{xy}\,dz - p_{zx}\,dy = 0. \tag{15}$$

Ferner muss für einen beliebigen inneren Punkt eines im Elasticitätsgleichgewichte sich befindlichen festen Körpers die Gleichung

$$\frac{d\,p_{xx}}{d\,x} + \frac{d\,p_{xy}}{d\,y} + \frac{d\,p_{zx}}{d\,z} = 0 \tag{16}$$

bestehen, sofern man von dem Einflusse der Schwere absieht.

Für das Prisma oder den Cylinder kann man diese Gleichung auch in eine solche Form bringen, dass die Gleichung (15), welche für die Umfangslinie (Contour) stattfinden muss, hierbei berücksichtigt wird. Die Kenntniss dieser Formel ist sehr wichtig.

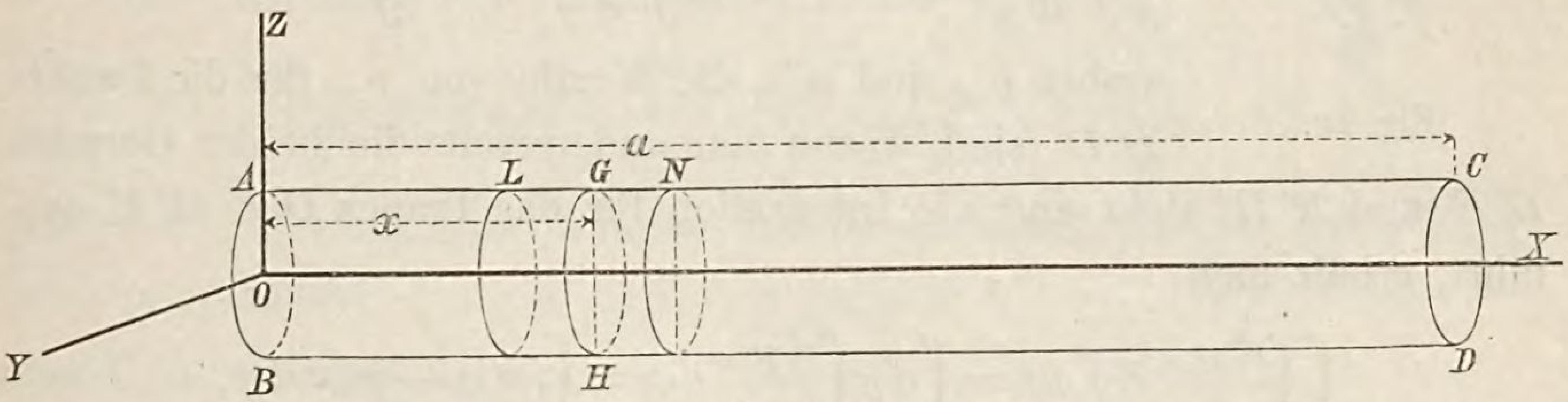


Fig. 11.

Betrachten wir also den Querschnitt GH in der Entfernung x von dem Ende AB und nehmen wir dieselben Bezeichnungen wie in dem Problem über die Biegung, so haben wir

$$p_{xx} = \frac{M_0 + S(a - x)}{I}\,z,$$

wobei M_0 das Biegungsmoment der Grundfläche CD ist und S die Schubkraft in dieser Grundfläche und in allen Querschnitten des Prismas.

Aus dieser Gleichung erhält man

$$\frac{d\,p_{xx}}{d\,x} = -\frac{S}{I}\,z,$$

so dass die Gleichung (16) die folgende ergibt:

$$\frac{S}{I}\,z = \frac{d\,p_{xy}}{d\,y} + \frac{d\,p_{zx}}{d\,z}.$$

Wir nehmen nun an, dass der Querschnitt GH durch nachfolgende Figur dargestellt sei, und integriren die mit $d\,y\;d\,z$ multiplicirte Gleichung,

indem wir die Integration auf die ganze, zwischen der Geraden $C' C''$ und der Curve $C' B C''$ der Umfangslinie enthaltene Fläche ausdehnen. Auf diese Weise erhält man zuerst

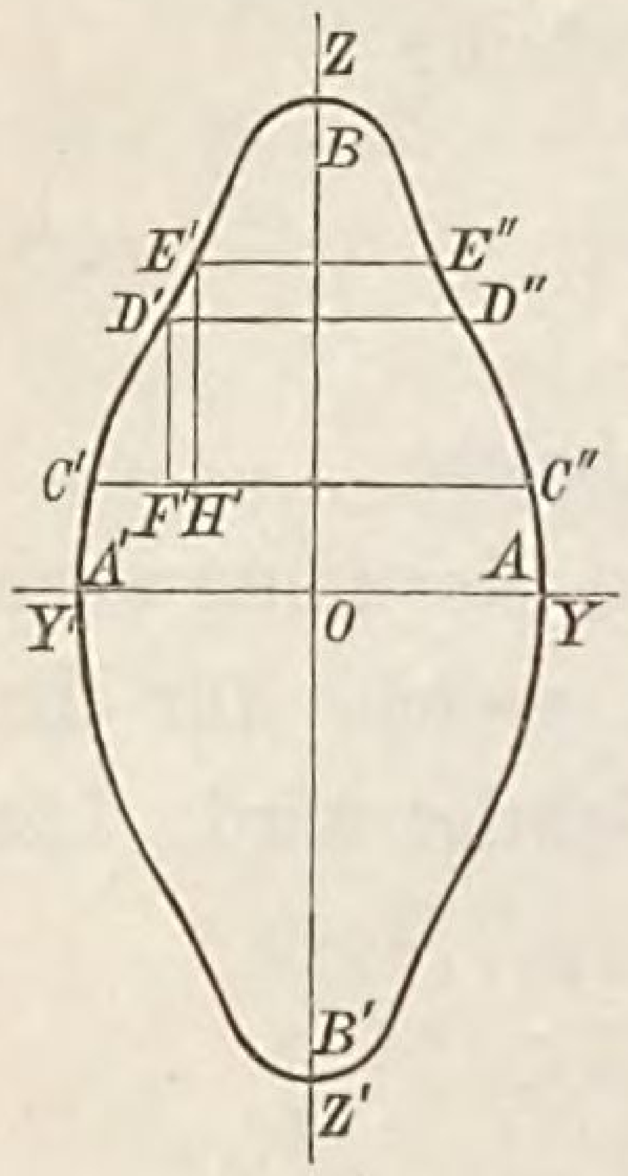


Fig. 12.

$$\frac{S}{I}\int\int z\,dy\,dz = \int\int \frac{d\,p_{xy}}{d\,y}\,dy\,dz + \int\int \frac{d\,p_{zx}}{d\,z}\,dy\,dz;$$

zieht man aber in der Fläche $A B A' B'$ die Gerade $D' D''$ parallel zur y-Achse und ebenso die unendlich nahe Gerade $E' E''$, so hat man bei Ausführung der Integration für das Trapez $D' D'' E'' E'$

$$\int\int \frac{d\,p_{xy}}{d\,y}\,dy\,dz = \int dz \int \frac{d\,p_{xy}}{d\,y}\,dy = \int (p''_{xy} - p'_{xy})\,dz,$$

wobei p'_{xy} und p''_{xy} die Werthe von p_{xy} für die Punkte $D' D''$ sind. Wenn man andererseits die beiden Geraden $D' F'$ und $E' H'$ zieht und die Integration für das Trapez $D' F' H' E'$ ausführt, erhält man

$$\int\int \frac{d\,p_{zx}}{d\,z}\,dy\,dz = \int dy \int \frac{d\,p_{zx}}{d\,z}\,dz = \int (p'_{zx} - p_{zx})\,dy,$$

wobei p_{zx} und p'_{zx} wieder die Werthe von p_{zx} für die Punkte F' und D' sind. Obige Gleichung ergibt somit

$$\frac{S}{I}\int\int z\,dy\,dz = \int (p''_{xy} - p'_{xy})\,dz + \int (p'_{zx} - p_{zx})\,dy. \tag{17}$$

Man kann aber auch schreiben

$$\int (p''_{xy} - p'_{xy})\,dz = \int p''_{xy}\,dz'' - \int p'_{xy}\,dz',$$

indem man die Integrale $\int p''_{xy}\,dz''$ und $\int p'_{xy}\,dz'$ vom Punkte C'', respective von C' bis zum höchsten Punkte der Umfangslinie ausdehnt, so dass die Elemente $d\,z'$ und $d\,z''$ immer im positiven Sinne genommen werden; wenn man hingegen die Curve $C' B C''$ in fortgesetzter Weise von C' ausgehend verfolgen will, so sind die Differentiale $d\,z'$ offenbar negativ, und man muss daher deren Zeichen ändern, d. h. es ist

$$\int (p''_{xy} - p'_{xy})\,dz = -\left(\int p''_{xy}\,dz'' + \int p'_{xy}\,dz'\right),$$

oder einfach
$$\int (p''_{xy} - p'_{xy})\, dz = -\int p'_{xy}\, dz',$$
indem man das Integral der rechten Seite auf die ganze Curve $C'BC''$ ausdehnt.

Ferner kann man schreiben
$$\int (p'_{zx} - p_{zx})\, dy = \int p'_{zx}\, dy' - \int p_{zx}\, dy,$$
indem man das erste Integral der rechten Seite auf die ganze Curve $C'BC''$ ausdehnt und das zweite auf die ganze Gerade $C'C''$, welche parallel zur y-Achse ist.

Die Gleichung (17) kann daher in der Form
$$\frac{S}{I}\int\int z\, dy\, dz = -\int (p'_{xy}\, dz' - p'_{zx}\, dy') - \int p_{zx}\, dy$$
geschrieben werden, und nachdem uns die Gleichung (15) für jeden Punkt der Umfangslinie
$$p'_{xy}\, dz' - p'_{zx}\, dy' = 0$$
ergibt, folgt daraus, dass
$$\frac{S}{I}\int\int z\, dy\, dz = -\int p_{zx}\, dy, \tag{18}$$
wobei nochmals zu beachten ist, dass das Integrale der linken Seite für den ganzen Theil des zwischen der Curve $C'BC''$ und der Strecke CC'' gelegenen Querschnittes genommen, das Integral der rechten Seite hingegen auf die ganze Gerade CC'' ausgedehnt werden muss.

Man kann das Doppelintegrale auf ein einfaches reduciren, da die Integration nach y ausgeführt werden kann; nennt man λ die Länge der Geraden DD', d. h. die Breite des Querschnittes in der Höhe z von der Biegungsachse, so erhält man
$$\int\int z\, dy\, dz = \int \lambda z\, dz.$$

Die Grösse λ kann als eine Function von z angesehen werden, und die Integration der linken Seite muss von dem mit der Geraden $C'C''$ correspondirenden Werthe z_1 von z bis zu dem grössten Werthe von z, welchen wir Z nennen wollen, ausgedehnt werden. Die Gleichung (18) wird somit

$$\int p_{zx}\, d y = -\frac{S}{I}\int_{z_1}^{Z} \lambda\, z\, d z. \tag{19}$$

13. Andere Ableitung der Formel (19). — In der vorhergehenden Nummer haben wir die Formel (19) gefunden, indem wir von den allgemeinen Elasticitätsgleichungen ausgegangen sind; seitens der Autoren, welche diese Formel gefunden haben, wurde für dieselbe eine andere Ableitung gegeben, welche wir hier anführen wollen.

Denken wir uns dasjenige Körperelement isolirt, welches von der mit der Curve $C' B C''$ correspondirenden seitlichen Oberfläche, von der durch die Strecke $C' C''$ parallel zur Achse des Prismas gehenden Ebene und schliesslich von jenen Querschnitten eingeschlossen ist, welche den Abscissen x und $x + d x$ entsprechen.

Eine der für das Gleichgewicht dieses Körperelementes nothwendigen Bedingungen ist die, dass die Summe der zur x-Achse parallelen Componenten aller auf dasselbe wirkenden Kräfte gleich Null ist.

Nun hat man für die Fläche, welche dem die Abscisse x habenden Querschnitte angehört, die Normalkräfte p_{xx}, deren auf die ganze Fläche ausgedehnte Summe

$$\int_{z_1}^{Z} p_{xx}\, \lambda\, d z$$

ist; auf die entgegengesetzte Fläche hat man die Normalkräfte $-\left(p_{xx} + \frac{d\, p_{xx}}{d x}\, d x\right)$ oder $-\left(p_{xx} - \frac{S}{I}\, z\, d x\right)$, deren Summe

$$-\int_{z^1}^{Z}\left(p_{xx} - \frac{S}{I}\, z\, d x\right)\lambda\, d z = -\int_{z_1}^{Z} p_{xx}\, \lambda\, d z + d x\, \frac{S}{I}\int_{z_1}^{Z} \lambda\, z\, d z$$

ist; auf die krumme Fläche des betrachteten Körperelementes darf laut Annahme keine äussere Kraft wirken; endlich hat man für die rechteckige Fläche, deren Seiten die Strecke $C' C''$ und $d x$ sind, die Kräfte p_{zx} parallel zur x-Achse, und ist deren Summe für die ganze betrachtete Fläche

$$p_{zx}\, d y\, d x = d x \int p_{zx}\, d y.$$

Addirt man diese drei Summen und setzt das durch $d x$ dividirte Resultat gleich Null, so erhält man die Gleichung

$$\frac{S}{I}\int_{z_1}^{Z} z\lambda\, dz + \int p_{zx}\, dy = 0,$$

welche mit der Formel (19) übereinstimmt.

14. Anwendung der Formel (19) auf beliebige feste Körper, deren Querschnitte eine im Verhältnisse zu deren Höhe sehr kleine Breite haben. — Die Formel (19) wurde für Prismen abgeleitet, welche durch nur auf deren Grundfläche wirkende Kräfte beansprucht werden; dieselbe lässt sich aber, wie alle anderen Formeln, welche für diese Prismen entwickelt wurden, annäherungsweise auch auf die in Nummer 8 definirten langen und dünnen festen Körper anwenden.

Der Querschnitt dieser Körper kann zwar beliebige Formen haben, aber wir werden nur jenen Fall betrachten, welcher in der Praxis am häufigsten vorkommt, dass nämlich die Querschnitte in der Richtung der Biegungsachse sehr schmal sind im Verhältnisse zur Höhe, welche senkrecht auf diese Achse gemessen wird.

Ist die in dem Querschnitte parallel zur Biegungsachse gezogene Gerade $C' C''$ (s. Fig. 12, S. 156) sehr kurz im Verhältnisse zur Höhe BB', so ist klar, dass die nach der Trägheitshauptachse BB' gerichtete Tangentialkraft p_{zx} auf der ganzen Länge der Geraden $C' C''$ sehr wenig variirt, und dass dieselbe daher annäherungsweise als constant angenommen werden kann. Nennt man λ_1 die Länge der Geraden $C' C''$, d. h. die Breite des Querschnittes in der Entfernung z_1 von der Biegungsachse, so hat man

$$\int p_{zx}\, dy = p_{zx}\lambda_1,$$

und die Gleichung (19) ergibt nach Division durch λ_1

$$p_{zx} = -\frac{S}{\lambda_1 I}\int_{z_1}^{Z} \lambda z\, dz,$$

oder

$$p_{zx} = \frac{S}{\lambda I}\int_{z}^{Z} \lambda z\, dz, \tag{20}$$

indem man die Indices von λ_1 und z_1 weglässt, was der Deutlichkeit keinen Abbruch macht, und indem man die Tangentialkraft p_{zx} positiv nimmt.

Da der grösste numerische Werth des Integrales $\int_z^Z \lambda z\, dz$ mit dem Werthe $z = 0$ correspondirt, folgt daraus, dass die Tangentialkraft p_{zx} ihren grössten Werth für die Biegungsachse erreicht; nennt man denselben p^0_{zx}, so ist

$$p^0_{zx} = \frac{S}{\lambda I} \int_0^Z \lambda z\, dz.$$

Der Ausdruck $\int_0^Z \lambda z\, dz$ repräsentirt aber das statische Moment jeder der beiden durch die Biegungsachse getrennten Flächen in Bezug auf diese Achse; nennt man dieses statische Moment G, so wird der grösste Werth der elastischen Tangentialkraft ausgedrückt durch die Formel

$$p^0_{zx} = \frac{S\, G}{\lambda I}. \tag{21}$$

Der Ausdruck für die Tangentialkraft p_{zx} in einem beliebigen Punkte des Querschnittes kann auch in eine andere Form gebracht werden, denn man hat

$$\int_z^Z \lambda z\, dz = \int_0^Z \lambda z\, dz - \int_0^z \lambda z\, dz = G - \int_0^z \lambda z\, dz$$

und folglich

$$p_{zx} = \frac{S}{\lambda I}\left(G - \int_0^z \lambda z\, dz \right).$$

Ferner lässt sich erkennen, dass für Querschnitte, welche in Bezug auf deren Höhe sehr schmal sind, die Tangentialkraft p_{xy} immer sehr klein ist, und dass dieselbe daher gleich Null betrachtet werden kann. In der That erreicht im Allgemeinen diese Kraft ihren grössten Werth in den Punkten C' und C'' der Umfangslinie. Die Gleichung (15) gibt für diese Punkte

$$p_{xy} = p_{zx} \frac{dy}{dz},$$

und da für die Querschnitte von der angenommenen Form das Verhältniss $\frac{dy}{dz}$ sehr klein ist, so folgt daraus, dass die Tangentialkraft p_{xy} im Verhältnisse zu p_{zx} auch sehr klein ist.

Dieser Schluss ist für die höchsten Punkte der Umfangslinie, für welche das Verhältniss $\frac{dy}{dz}$ nicht sehr klein ist, nicht vollkommen genau; aber für diese Punkte ist die Kraft p_{zx}, wie aus Formel (20) folgt, selbst sehr klein, so dass dies auch bei der Kraft p_{xy} der Fall sein wird.

15. Krumme Fläche der Querschnitte nach der Biegung, wenn dieselben im Verhältnisse zu deren Höhe eine sehr geringe Breite haben. — Die Gleichung (20) führt uns unmittelbar zur Gleichung für die krumme Fläche, welche nach der Biegung von den Querschnitten gebildet wird, wenn diese im Verhältnisse zu deren Höhe eine sehr geringe Breite haben. Denn, wenn wir g_{zx} die der Tangentialkraft p_{zx} entsprechende Verschiebung nennen, und wenn wir annehmen, dass der Körper drei Symmetrieebenen hat, welche senkrecht stehen auf der Normale des Querschnittes und auf dessen Trägheitshauptachsen, so ist auf Grund der Formeln (19) des 3. Capitels

$$p_{zx} = F_2\, g_{zx},$$

und da

$$g_{zx} = \frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}$$

ist, so erhält man aus der Gleichung (20), indem man wieder das negative Zeichen einsetzt,

$$\frac{du}{dz} = -\frac{dw}{dx} - \frac{S}{F_2 \lambda I}\int_z^Z \lambda z\, dz. \tag{22}$$

w ist die Verrückung eines Querschnittspunktes parallel zur z-Achse; da für einen solchen Punkt mit der Ordinate y die Normalkraft

$$p_{xx} = \frac{P}{\Omega} + \frac{M_0 + S(a-x)}{I} z$$

ist, so erhält man in diesem Punkte für die seitliche Contraction

$$\frac{\eta' p_{xx}}{E} = \frac{\eta'}{E}\left(\frac{P}{\Omega} + \frac{M_0 + S(a-x)}{I} z\right),$$

so dass die Contraction der Ordinate z, d. h. die Verrückung w, mit dem negativen Zeichen genommen, durch

$$-w = \frac{\eta'}{E}\left(\frac{P}{\Omega}\int_0^z dz + \frac{M_0 + S(a-x)}{I}\int_0^z z\, dz\right)$$

gegeben ist.

Indem man die Integrationen mit Bezug auf z ausführt und das Resultat sodann nach x differentiirt, erhält man

$$\frac{d w}{d x} = \frac{\eta' S}{E I} \frac{z^2}{2},$$

so dass man aus der Gleichung (22) die folgende ableiten kann:

$$\frac{d u}{d z} = - \frac{\eta' S}{E I} \frac{z^2}{2} - \frac{S}{F_2 \lambda I} \int_z^Z \lambda z \, d z. \tag{23}$$

Dies ist die Differentialgleichung der von dem Querschnitte nach der Biegung gebildeten cylindrischen Fläche.

Es ist zu beachten, dass für $z = 0$

$$\left(\frac{d u}{d z}\right)_0 = - \frac{S}{F_2 \lambda_0 I} \int_0^Z \lambda z \, d z,$$

d. h. dass zufolge der Formel (21)

$$\left(\frac{d u}{d z}\right)_0 = - \frac{p^0_{zx}}{F_2};$$

nun ist aber $\frac{p^0_{zx}}{F_2}$ der Werth der centralen Verschiebung g^0_{zx} oder des Cosinus des beinahe rechten Winkels, welchen das centrale Element des Querschnittes nach der Biegung mit der Achse des festen Körpers bildet; hieraus folgt, dass die $y\,z$-Ebene, auf welche die Gleichung (23) bezogen wurde, senkrecht auf diese Achse ist.

16. Deformationsarbeit für die in Nummer 8 definirten festen Körper. — Formel für den Coëfficienten A. — Wir haben gesehen, dass für die in Nummer 8 definirten festen Körper die Deformationsarbeit einer zwischen zwei unendlich nahen Querschnitten befindlichen Schichte durch die Formel (14) ausgedrückt wird, worin A einen geometrischen Coëfficienten darstellt, welcher nur von der Form dieses Querschnittes und von dem Verhältnisse der beiden tangentialen Elasticitätscoëfficienten F_2 und F_3 abhängt. Dieser Coëfficient wird durch die Formel

$$\frac{A \Omega}{F_2} = \int\int \left(\frac{A^2_1}{F_3} + \frac{A^2_2}{F_2}\right) d y \, d z$$

ausgedrückt.

Aus dem in Nummer 5 Gesagten geht hervor, dass, wenn die Schubkraft S_y und das Torsionsmoment M_x gleich Null sind,

$$p_{xy} = A_1 \frac{S_z}{\Omega} \quad \text{und} \quad p_{zx} = A_2 \frac{S_z}{\Omega}$$

ist, wobei A_1 und A_2 Functionen von y und z sind, welche von der Form des Querschnittes und von dem Verhältnisse der tangentialen Elasticitätscoëfficienten F_2 und F_3 abhängen.

Für die in der Richtung der Biegungsachse sehr schmalen Querschnitte hat man annäherungsweise

$$p_{xy} = 0, \qquad p_{zx} = -\frac{S}{\lambda I}\int_z^Z \lambda z\, dz,$$

und folglich

$$A_1 = 0, \qquad A_2 = -\frac{\Omega}{\lambda I}\int_z^Z \lambda z\, dz;$$

durch Substitution in obige Formel erhält man

$$\frac{A\Omega}{F_2} = \frac{\Omega^2}{F_2 I^2}\int\int\left(\int_z^Z \lambda z\, dz\right)^2 \frac{dy\, dz}{\lambda^2}.$$

Die erste Integration mit Bezug auf y kann man ausführen, indem man dieselbe auf die ganze Linie $C'C'' = \lambda$ ausdehnt; die zweite Integration muss sodann auf den ganzen Querschnitt ausgedehnt werden, d. h. von $-Z_0$ bis Z genommen werden, indem man Z_0 und Z die numerischen Werthe der grössten negativen und der grössten positiven Ordinate nennt. Auf diese Weise erhält man aus der letzten Gleichung, indem man dieselbe gleichzeitig durch $\frac{\Omega}{F_2}$ dividirt und sodann F_2 in F verwandelt, folgenden Werth:

$$A = \frac{\Omega}{I^2}\int_{-Z_0}^{Z}\left(\int_z^Z \lambda z\, dz\right)^2 \frac{dz}{\lambda}. \qquad (24)$$

Dies ist also die allgemeine Formel, deren man sich zur Bestimmung des Coëfficienten A bedient.

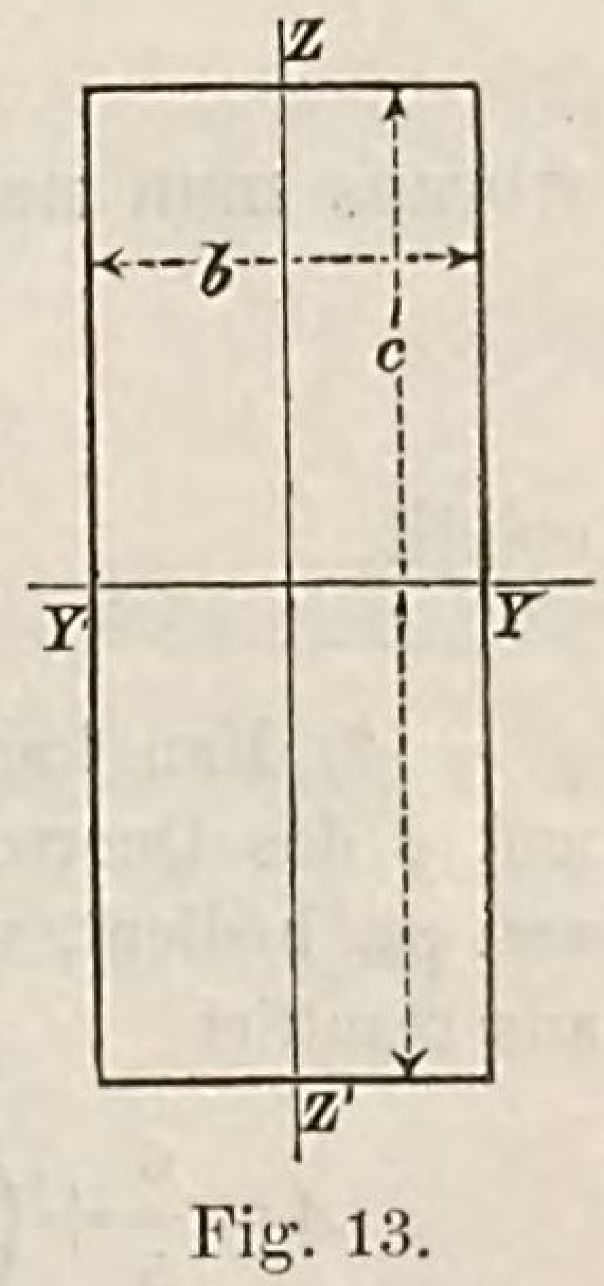


Fig. 13.

17. Anwendung der Formeln (20), (21), (23) und (24) auf die einfachsten und gebräuchlichsten Querschnitte. 1. Rechteckiger Querschnitt. — Betrachtet man einen rechteckigen Querschnitt, dessen Biegungsachse parallel zur Seite b ist, welche ihrerseits im Verhältniss zur Seite c als sehr klein zu betrachten ist, so hat man

$\lambda = b$ für alle Werthe von z

$$Z_0 = Z = \frac{c}{2}, \qquad \Omega = b\,c, \qquad G = \frac{1}{8}\,b\,c^2, \qquad I = \frac{1}{12}\,b\,c^3.$$

Die Formel (20) ergibt also

$$p_{zx} = \frac{1}{2}\frac{S}{I}\left(\frac{c^2}{4} - z^2\right) = \frac{3}{2}\frac{S}{\Omega}\left(1 - \frac{4z^2}{c^2}\right); \tag{25}$$

die Formel (21)

$$p^0_{zx} = \frac{3}{2}\frac{S}{\Omega}; \tag{26}$$

die Formel (23)

$$\frac{d\,u}{d\,z} = -\frac{\eta' S}{EI}\frac{z^2}{2} - \frac{S}{2F_2 I}\left(\frac{c^2}{4} - z^2\right),$$

woraus durch Integration und bei Beachtung, dass für $z = 0$ auch $u = 0$ sein muss, folgt, dass

$$u = -\frac{\eta' S}{EI}\frac{z^3}{6} - \frac{S}{2F_2 I}\left(\frac{c^2 z}{4} - \frac{z^3}{3}\right),$$

d. h.

$$u = \frac{3S}{2F_2\,b}\left[\frac{z}{c} - \frac{4}{3}\left(1 - \frac{\eta' F_2}{E}\right)\frac{z^3}{c^3}\right]; \tag{27}$$

die Formel (24) gibt schliesslich

$$A = \frac{\Omega\,b}{I^2}\int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}}\left(\int_z^{\frac{b}{2}} z\,d\,z\right)^2 d\,z,$$

woraus man nach Ausführung der Integrationen

$$A = \frac{6}{5}\,{}^{*}) \tag{28}$$

erhält.

*) Man kann den genauen Werth von A für jedes Verhältniss der Seiten b und c des Querschnittes finden, wenn man sich der rigorosen Ausdrücke für p_{xy} und p_{zx} bedient, welche in dem Problem über die Biegung gefunden wurden. Hieraus resultirt

$$A = \frac{6}{5} + \left(\frac{\eta F}{E}\right)^2 \frac{b^4}{c^4}\left(\frac{4}{5} - \frac{144}{\pi^5}\frac{b}{c}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\operatorname{tah}\frac{n\pi c}{b}}{n^3} - \frac{72}{\pi^5}\frac{b}{c}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\operatorname{tah}\frac{n\pi c}{b}}{n^5}\right),$$

indem man die tangentiale Elasticität für die beiden Richtungen der y und z als gleich annimmt, d. h. indem man $F_2 = F_3 = F$ macht.

II. Elliptischer Querschnitt. — Sind b und c die Halbachsen des in nebenstehender Figur dargestellten elliptischen Querschnittes, wobei die erstere als Biegungsachse genommen wird, und wobei deren Länge kleiner ist als jene der zweiten, so ist die Gleichung der Umfangslinie

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

und man hat

$$\lambda = 2\,y = 2\,b\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}},$$

$$Z_0 = Z = c, \quad \Omega = \pi\,b\,c, \quad G = \frac{2}{3}\,b\,c^2, \quad I = \frac{\pi}{4}\,b\,c^3.$$

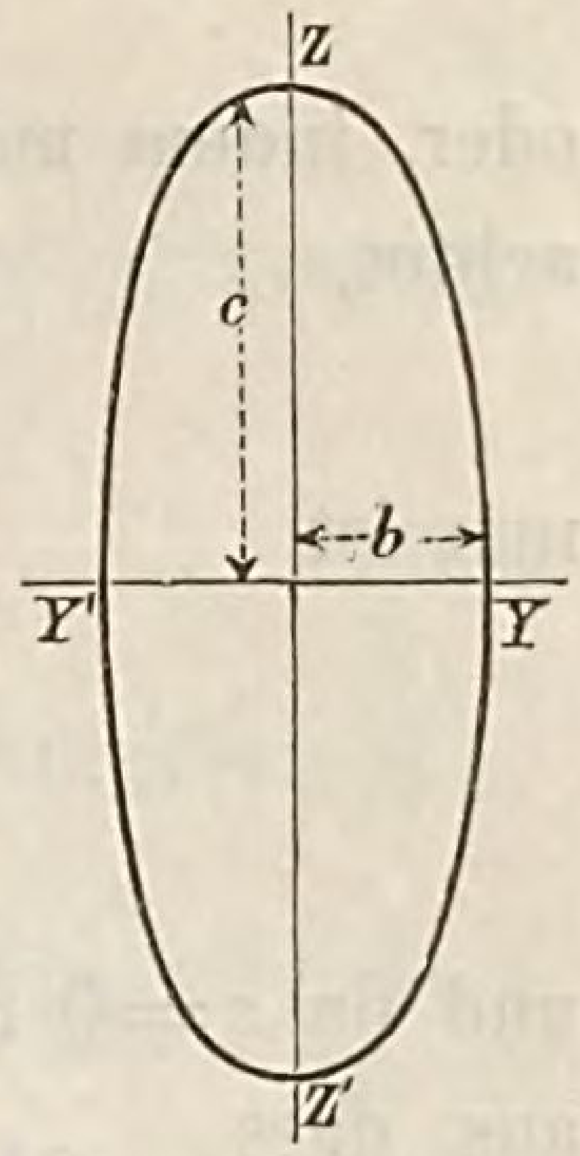


Fig. 14.

Es ist daher

$$\int_z^Z \lambda z\,dz = 2\,b\int_z^c \sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}\,z\,dz = \frac{2}{3}\,b\,c^2\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{2\,c^2}{3\,b^2}\,y^3 \quad (29)$$

und folglich

$$p_{zx} = \frac{4}{3}\cdot\frac{y^2}{b^2}\cdot\frac{S}{\Omega}, \qquad p^0{}_{zx} = \frac{4}{3}\,\frac{S}{\Omega}. \quad (30)$$

Die Formel (23) ergibt

$$\frac{d\,u}{d\,z} = -\frac{\eta' S}{EI}\,\frac{z^2}{2} - \frac{S}{F_2 I}\,\frac{c^2}{3}\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right);$$

durch eine derartige Integration, dass für $z = 0$ auch $u = 0$ ist, erhält man

$$u = -\frac{4\,S}{3\,F_2\,\Omega}\left[z - \left(1 - \frac{3\,\eta' F_2}{2\,E}\right)\frac{z^3}{3\,c^2}\right]. \quad (31)$$

Da das Verhältniss $\left(\frac{\eta F}{E}\right)^2$ im Allgemeinen sehr klein ist, so sieht man, dass der Coëfficient A als annäherungsweisen Werth $\frac{6}{5}$ hat, selbst wenn die Seite b im Verhältnisse zu c nicht sehr klein ist. Wenn der Körper z. B. isotrop ist, hat man

$$\eta = \frac{1}{4}, \quad F = \frac{2}{5}\,E, \quad \frac{\eta F}{E} = \frac{1}{10}, \quad \left(\frac{\eta F}{E}\right)^2 = \frac{1}{100},$$

woraus folgt, dass man

$$A = \frac{6}{5}$$

nehmen kann, selbst in dem Falle, als $b = c$ ist.

Die Formel (24) gibt

$$A = \frac{\Omega}{I^2} \frac{2\, c^4}{9\, b^4} \int_{-c}^{c} y^5\, d z,$$

oder, indem man die Symmetrie der Figur in Bezug auf die y-Achse beachtet,

$$A = \frac{\Omega}{I^2} \frac{4\, c^4}{9\, b^4} \int_{0}^{c} y^5\, d z;$$

nun ist

$$d z = -\frac{c}{b^2} \frac{y\, d y}{\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}},$$

und da $z = 0$ mit $y = b$ und $z = c$ mit $y = 0$ correspondirt, so folgt daraus, dass

$$\int_{0}^{c} y^5\, d z = -\frac{c}{b^2} \int_{b}^{0} \frac{y^6\, d y}{\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}} = \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6} \pi\, c\, b^5,$$

und folglich

$$A = \frac{10}{9}.^{*)}$$

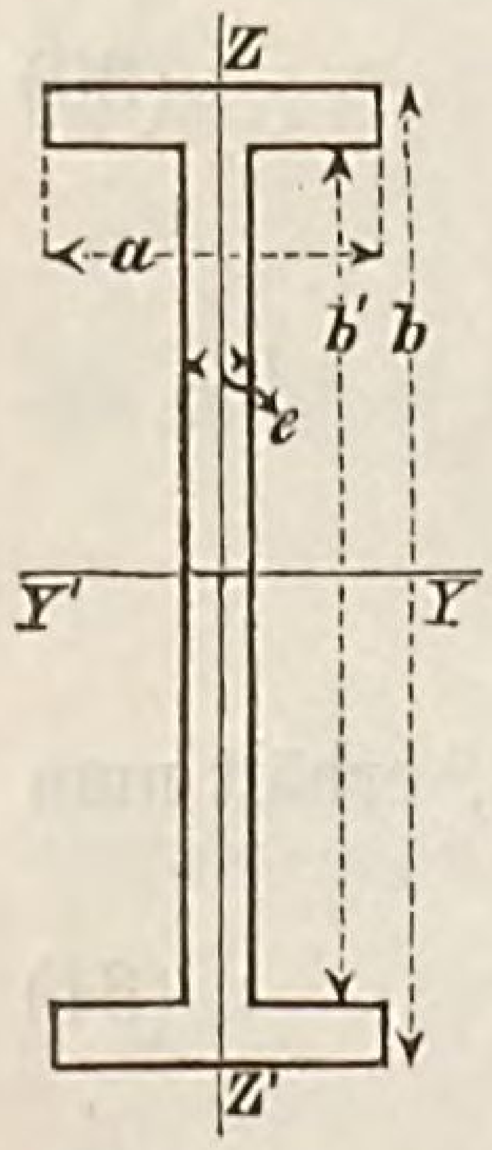


Fig. 15.

III. Doppel-T- und C-förmiger Querschnitt. — Der in nebenstehender Figur dargestellte doppel-**T**-förmige Querschnitt sei bezüglich der Biegungsachse $Y Y'$ symmetrisch. Mit den in der Figur angegebenen Benennungen erhält man alsbald

$$\left.\begin{aligned} \Omega &= a\, b - (a - e)\, b_1, \\ G &= \frac{1}{8} [a\, b^2 - (a - e)\, b_1^2], \\ I &= \frac{1}{12} [a\, b^3 - (a - e)\, b_1^3]. \end{aligned}\right\} \quad (32)$$

*) Auch für den elliptischen Querschnitt erhält man wie für den rechteckigen den Werth von A für jedes Verhältniss zwischen den Halbachsen b und c mit Hilfe der Ausdrücke p_{xy} und p_{zx}, wie sie in dem Problem über die Biegung für Cylinder mit elliptischer Grundfläche gegeben wurden; die Formel, welche man findet, und welche hier anzuführen nicht nothwendig ist, gibt annäherungsweise $A = \frac{10}{9}$, wie dies im Texte unter Berücksichtigung, dass das Verhältniss $\frac{b}{c}$ der Halbachsen sehr klein ist, erhalten wurde.

Zufolge der Formel (20) wird für die Punkte der im Steg parallel zur Biegungsachse gezogenen Geraden $m\,n$ die Tangentialkraft p_{zx} durch die Formel

$$p_{zx} = \frac{S}{e\,I}\left(G - \frac{1}{2}\,e\,z^2\right) \tag{33}$$

ausgedrückt, und der grösste Werth dieser Kraft, welcher für die Biegungsachse gilt, d. h. für $z = 0$ wird sein

$$p^0_{zx} = \frac{S\,G}{e\,I}. \tag{34}$$

Die Summe der Tangentialkräfte, welche in Steg auftreten, ist

$$\int_{-\frac{b_1}{2}}^{\frac{b_1}{2}} p_{zx}\,e\,d\,z = \frac{S}{I}\int_{-\frac{b_1}{2}}^{\frac{b_1}{2}}\left(G - \frac{1}{2}\,e\,z^2\right)d\,z = \frac{S}{I}\left(G\,b_1 - \frac{1}{24}\,e\,b^3_1\right),$$

oder, wenn man für G dessen Werth substituirt,

$$\frac{S}{I}\left(a\,\frac{b^2\,b_1 - b^3_1}{8} + e\,\frac{b^3_1}{12}\right).$$

Da die Summe aller im gesammten Querschnitte stattfindenden Tangentialkräfte gleich sein muss der Schubkraft S, so wird die Summe der Tangentialkräfte, welche in den beiden Flantschen stattfinden, gleich sein

$$S - \frac{S}{I}\left(a\,\frac{b^2\,b_1 - b^3_1}{8} + e\,\frac{b^3_1}{12}\right) = \frac{S}{I}\left(I - a\,\frac{b^2\,b_1 - b^3_1}{8} - e\,\frac{b^3_1}{12}\right),$$

oder

$$\frac{S}{I}\,\frac{a\,(b - b_1)^2\,(2\,b + b_1)}{24}, \tag{35}$$

indem man für I dessen Werth einsetzt und sodann reducirt.

Das Trägheitsmoment I des ganzen Querschnittes ist jedenfalls grösser als jenes, welches man erhält, wenn man den Steg vernachlässigt, d. h. grösser als

$$I' = \frac{1}{12}\,a\,(b^3 - b^3_1) = \frac{1}{12}\,a\,(b - b_1)\,(b^2 + b b_1 + b^2_1),$$

und da offenbar $\quad b^2 + b\,b_1 + b^2_1 > 2\,b\,b_1 + b^2_1$

ist, folgt daraus, dass, wenn man

$$I'' = \frac{1}{12}\,a\,(b - b_1)\,(2\,b\,b_1 + b^2_1)$$

setzt, $\quad I > I' > I'';$

die Formel (35) hat folglich einen gewiss kleineren Werth als

$$\frac{S}{I''} \frac{a(b-b_1)^2(2b+b_1)}{24} = S\frac{b-b_1}{2b_1}.$$

Wenn die Flantschen eine im Verhältnisse zur ganzen Höhe des Querschnittes sehr geringe Höhe haben, was in der Praxis fast immer eintritt, so ist das Verhältniss $\frac{b-b_1}{2b_1}$ ein sehr kleiner Bruch, d. h. die Summe der Tangentialkräfte, welche in den Flantschen stattfinden, ist sehr klein und kann daher im Vergleiche zur Summe jener Tangentialkräfte, welche im Steg auftreten, vernachlässigt werden.

Die Formel (23) ergibt zwischen $z=-\frac{b_1}{2}$ und $z=\frac{b_1}{2}$

$$\frac{du}{dz} = -\frac{\eta' S}{EI}\frac{z^2}{2} - \frac{S}{F_2 e I}\left(G - \frac{1}{2}e z^2\right);$$

indem man nun in der Weise integrirt, dass für $z=0$ auch $u=0$ wird, erhält man

$$u = -\frac{S}{F_2 I}\left[\frac{G}{e}z - \left(1 - \frac{\eta' F_2}{E}\right)\frac{z^3}{6}\right]. \tag{36}$$

Anstatt nun die Formel (24) auf den doppel-**T**-förmigen Querschnitt anzuwenden, suchen wir der grösseren Deutlichkeit halber den Ausdruck für die den Tangentialkräften entsprechende Deformationsarbeit auf directe Weise. Wie oben gesehen wurde, ist bei jeder beliebigen Form des Querschnittes für eine zwischen zwei unendlich nahen Querschnitten gelegene Schichte dieser Ausdruck der folgende:

$$\frac{ds}{2}\int\int\left(\frac{p^2_{xy}}{F_3} + \frac{p^2_{zx}}{F_2}\right)dy\,dz.$$

Für den doppel-**T**-förmigen Querschnitt kann man nicht nur für alle Querschnittspunkte $p_{zy}=0$ nehmen, sondern auch nach Obigem für alle Punkte der Flantschen $p_{xy}=0$ setzen; vorstehende Formel kann daher auf

$$\frac{ds}{2F_2}\int\int p^2_{zx}\,dy\,dz$$

reducirt werden, indem man die Integration nur auf den Steg ausdehnt. Führt man die Integration mit Bezug auf y aus und substituirt für p_{zx} dessen Werth (33), so erhält man

$$\frac{ds}{2F_2}\frac{S^2}{e I^2}\int_{-\frac{b_1}{2}}^{\frac{b_1}{2}}\left(G-\frac{1}{2}e z^2\right)^2 dz,$$

oder

$$\frac{ds}{2F_2}\frac{S^2 b_1}{I^2 e}\left(G^2-\frac{1}{12}G e b_1^2+\frac{1}{320}e^2 b_1^4\right),$$

indem man auch die Integration mit Bezug auf z ausführt.

Dieser Ausdruck kann auch in der Form

$$\frac{A S^2}{2 F_2 \Omega} ds$$

geschrieben werden, vorausgesetzt, dass

$$A=\frac{\Omega b_1}{I^2 e}\left(G^2-\frac{1}{12}G e b_1^2+\frac{1}{320}e^2 b_1^4\right). \qquad (37)$$

Nun ist

$$G^2-\frac{1}{12}G e b_1^2+\frac{1}{320}e^2 b_1^4=\left(G-\frac{1}{24}e b_1^2\right)^2+\frac{1}{720}e^2 b_1^4,$$

und da in den praktischen Anwendungen der Ausdruck $\frac{1}{720}e^2 b_1^4$ im Allgemeinen gegenüber dem Ausdrucke

$$\left(G-\frac{1}{24}e b_1^2\right)^2$$

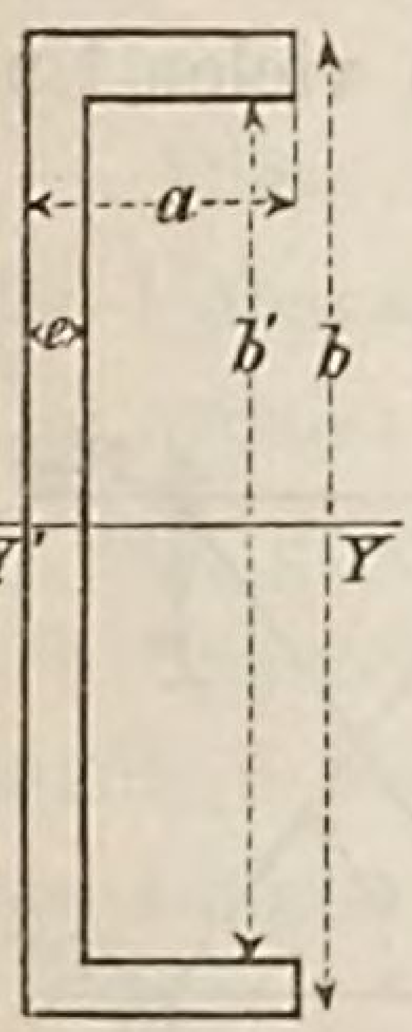


Fig. 16.

sehr klein ist, kann man denselben vernachlässigen, indem man einfach nimmt

$$A=\frac{\Omega b_1}{I^2 e}\left(G-\frac{1}{24}e b_1^2\right)^2. \qquad (38)$$

Es ist zu beachten, dass bei Ableitung obiger Formeln nicht die Bedingung aufgestellt wurde, dass der Steg jede Flantsche in zwei gleiche Hälften theile, so dass diese Formeln für jede Lage des Steges dieselben bleiben, folglich auch, wenn sich der Steg an einem Ende der Flantsche befindet, wie in nebenstehender Figur, welche den **C**-förmigen Querschnitt darstellt.

5. Capitel.

Theorie der Gitterträger.

1. Definition. — *Gitterträger* nennt man diejenigen Träger, deren obere und untere Gurten (auch Gurtungen), welche **T**-förmige Querschnitte haben, mit einander durch geneigte Stäbe verbunden sind (s. Fig. 20, S. 179).

Diese Stäbe sind gewöhnlich mit den beiden Gurten, ebenso wie untereinander an den Kreuzungen durch Nieten verbunden, so dass die Gitterträger *undeformirbare Systeme* bilden, d. h. dass sie nur die der Elasticität der Materialien entsprechenden Deformationen annehmen können.

Die genaue Bestimmung der in den verschiedenen Constructionsgliedern der Gitterträger auftretenden Spannungen und der in den Knotenpunkten thätigen Kräfte könnte mit Hilfe des Lehrsatzes von den Differentialquotienten der Arbeit in vollkommener Weise geschehen, indem man die Gitterträger als zusammengesetzte Systeme betrachtet. Obzwar dieses Problem immer auf Gleichungen ersten Grades führt, so erhält man doch eine so grosse Anzahl von Gleichungen mit ebenso vielen Unbekannten, dass deren Auflösung ungemein schwierig wird.

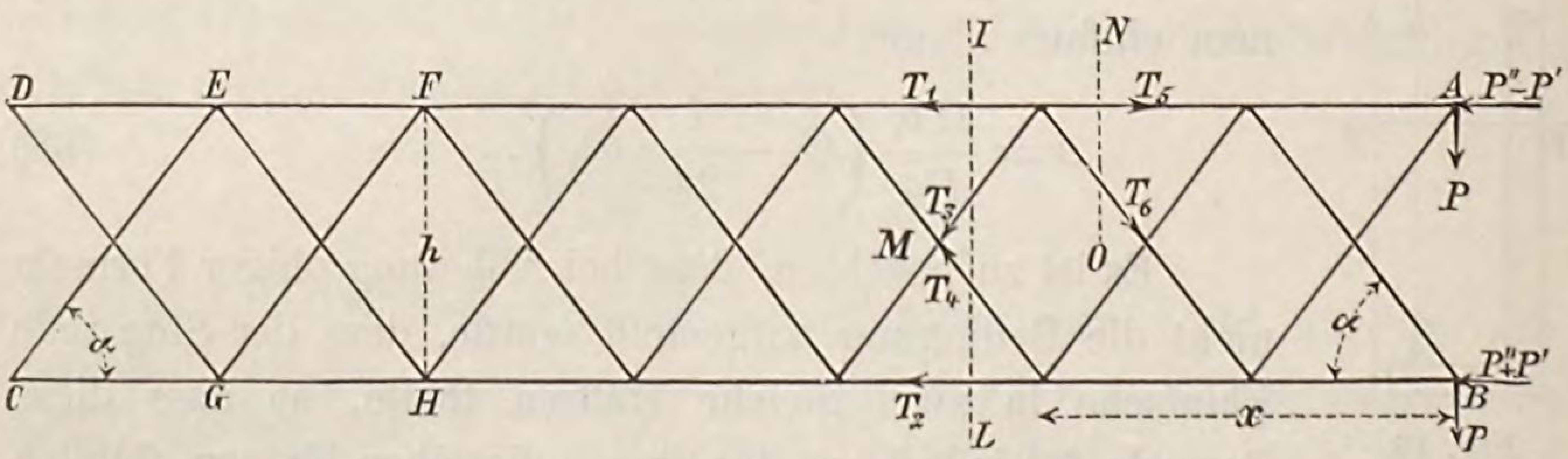


Fig. 17.

Man muss sich daher mit einer annäherungsweisen Lösung begnügen, welche aber für die Praxis im Allgemeinen vollkommen ausreichend ist. Um diese Auflösung in einer rationellen Weise zu geben, wollen wir einige theoretische Fälle betrachten.

2. Erster Fall eines gegliederten Gitterträgers. — Die vorstehende Figur stelle einen aus gegliederten Stäben zusammengesetzten Träger dar, und *DE, EF, CG, GH* etc. seien Stäbe, welche untereinander und mit den Querstäben durch Charniere verbunden sind.

Es werde nun angenommen, dass in dem Punkte *A* zwei Kräfte wirken, deren eine, *P*, vertical, deren andere, $P'' - P'$, von *A* nach *D* gerichtet ist, und in dem Punkte *B* zwei andere Kräfte, deren eine, *P*, vertical und deren andere, $P'' + P'$, von *B* nach *C* gerichtet ist.

Wird der Träger nach der Linie *IL* geschnitten, und werden sodann die in den zerschnittenen Stäben effectiv thätigen Spannungen durch die Kräfte T_1, T_2, T_3, T_4 ersetzt, so hat man für das Gleichgewicht des rechts von dem Schnitte *IL* gelegenen Theiles des Trägers die Bedingungen aufzustellen, dass die beiden Summen der horizontalen und der verticalen Kräfte gleich Null sind, und dass die Summe der Momente in Bezug auf einen beliebigen Punkt, z. B. *M*, auch Null ist. Dies gibt die drei Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} & T_1 + T_2 + (T_3 + T_4)\cos\alpha + 2P'' = 0, \\ & (T_3 - T_4)\sin\alpha + 2P = 0, \\ & (T_1 - T_2)\frac{h}{2} - 2P\left(x + \frac{h}{2\operatorname{tang}\alpha}\right) - P'h = 0. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Diese drei Gleichungen genügen indess nicht zur Bestimmung der vier Unbekannten T_1, T_2, T_3, T_4. Führt man aber den Schnitt *NO* und lässt wieder zwei Kräfte T_5 und T_6 wirken, welche mit den Spannungen in den geschnittenen Stäben gleich sind, so müssen sich offenbar die vier Spannungen T_1, T_3, T_5, T_6 das Gleichgewicht halten, was unter Anderem bedingt, dass die Summe der Verticalcomponenten dieser vier Spannungen gleich Null ist, d. h. dass

$$(T_3 + T_6)\sin\alpha = 0$$

oder

$$T_3 = -T_6 \quad \text{ist.}$$

Indem man diese Untersuchung auf alle Knotenpunkte ausdehnt, erkennt man leicht, dass alle Stäbe des Gitterträgers numerisch gleichen Kräften unterworfen sind, dass aber diese Kräfte für die zu *DG* parallelen Stäbe Spannungen, für die zu *CE* parallelen hingegen Pressungen sind.

Hieraus folgt, dass T_4 eine Spannung ist, wie dies auch angenommen wurde, T_3 hingegen eine Pressung, und dass somit

$$T_3 = -T_4 \quad \text{ist.}$$

Diese Gleichung ergänzt die zur Bestimmung der Unbekannten nothwendige Anzahl von Gleichungen, und man erhält daher

$$\left.\begin{aligned} T_1 &= \frac{2P}{h}\left(x + \frac{h}{2 \operatorname{tang} \alpha}\right) + P' - P'', \\ T_2 &= -\frac{2P}{h}\left(x + \frac{h}{2 \operatorname{tang} \alpha}\right) - P' - P'', \\ T_4 &= \frac{P}{\sin \alpha}, \\ T_3 &= -\frac{P}{\sin \alpha}. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Nennt man M das Biegungsmoment und S die Schubkraft für den durch den Punkt M gehenden Schnitt, so hat man

$$M = 2P\left(x + \frac{h}{2 \operatorname{tang} \alpha}\right) + P'h, \qquad (3)$$
$$S = 2P$$

und folglich

$$\left.\begin{aligned} T_1 &= \frac{M}{h} - P'', \\ T_2 &= -\frac{M}{h} - P'', \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

$$T_3 = -T_4 = -\frac{S}{2 \sin \alpha}. \qquad (5)$$

Wenn man ferner Ω die Querschnittsfläche nennt, welche die Stäbe mit den Spannungen T_1 und T_2 haben, so sind die Spannungen dieser Stäbe per Flächeneinheit durch

$$\frac{T_1}{\Omega} = \frac{M}{\Omega h} - \frac{P''}{\Omega} \quad \text{und}$$
$$\frac{T_2}{\Omega} = -\frac{M}{\Omega h} - \frac{P''}{\Omega}$$

gegeben; da das Trägheitsmoment der aus den beiden Stabquerschnitten zusammengesetzten Figur

$$I = \Omega \frac{h^2}{2}$$

ist, so wird aus obigen Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{T_1}{\Omega} &= \frac{M\frac{h}{2}}{I} - \frac{2P''}{2\Omega}, \\ \frac{T_2}{\Omega} &= \frac{M\frac{h}{2}}{I} - \frac{2P''}{2\Omega}, \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

d. h. diese Gleichungen sind denjenigen vollkommen ähnlich, welche man für die Vertheilung der Normalkräfte in continuirlichen Trägern erhält.

Andererseits ist die Summe der Normalcomponenten der beiden Spannungen T_3 und T_4

$$(T_4 - T_3) \sin\alpha = S.$$

Auf Grund dieser Resultate kann man, wenn auch etwas ungenau, sagen, dass *in den oben betrachteten Gitterträgern die horizontalen Stäbe dem Biegungsmomente und dem Normaldrucke widerstehen, während die Querstäbe die Schubkraft aufnehmen.*

3. Zweiter Fall eines gegliederten Gitterträgers. — Bei dem in Figur 18 dargestellten Träger seien die Stäbe DE, EF, FG etc. CH, HK etc. untereinander und mit den Querstäben mittelst Charnieren

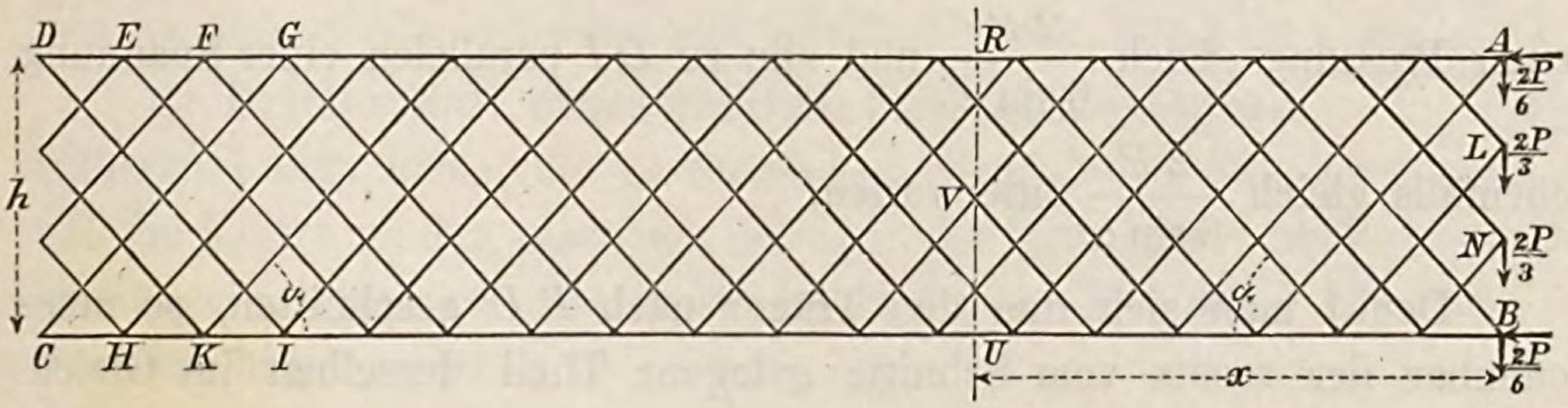


Fig. 18.

verbunden. Denkt man sich in den Punkten A und B die Verticalkräfte $\frac{2P}{6}$ und in den beiden anderen Punkten L und N die Vertical-

kräfte $\frac{2P}{3}$ wirkend, so ist die Summe der am Ende des Trägers wirkenden Verticalkräfte gleich $2P$.

Ferner wird angenommen, dass in den Punkten A und B zwei Horizontalkräfte $P'' - P'$ und $P'' + P'$ in der Richtung von A nach D und von B nach C wirken.

Wenn man jede der vier am Ende des Trägers in den Punkten A, L, N, B wirkenden Kräfte in Componenten zerlegt, und zwar nach den Richtungen der beiden in dem jeweiligen Angriffspunkte zusammenkommenden Stäbe, so sieht man, dass die von den Punkten A, L, N ausgehenden und zu CG parallelen Gitterstäbe einer Pressung gleich $\frac{2P}{6\sin\alpha}$ unterworfen sind, während die von den Punkten L, N, B ausgehenden und zu DI parallelen Gitterstäbe eine Spannung erleiden, welche der Pressung der drei anderen numerisch gleich ist, d. h. $\frac{2P}{6\sin\alpha}$.

Betrachtet man andererseits die zwei in einem beliebigen Punkte, z. B. G, zusammenkommenden Gitterstäbe, so erkennt man auf Grund der gleichen Schlüsse, wie sie in der vorhergehenden Nummer gemacht wurden, dass die Summe der Verticalcomponenten der Spannungen dieser Stäbe gleich Null ist; hieraus folgt, dass einer dieser Stäbe gedrückt, der andere hingegen gezogen wird, dass aber diese beiden Kräfte einander numerisch gleich sind. Es sind also alle zu CG parallelen Stäbe einer Pressung gleich $\frac{2P}{6\sin\alpha}$, und alle zu DI parallelen einer Spannung ebenfalls gleich $\frac{2P}{6\sin\alpha}$ unterworfen.

Denkt man sich nun den Träger nach RU geschnitten, so muss offenbar der rechts vom Schnitte gelegene Theil desselben im Gleichgewichte bleiben, sobald man in den durchschnittenen Stäben Spannungen oder Pressungen wirken lässt, welche den früher im System herrschenden gleich sind. Die Summe der Verticalcomponenten dieser sechs Kräfte ist genau $2P$ und die Summe der Horizontalcomponenten gleich Null. Es wird also der ersten von den drei für das Gleichgewicht des Stückes

$ARUB$ zu erfüllenden Gleichungen, und zwar derjenigen, welche ausdrückt, dass die Summe der Verticalcomponenten aller Kräfte gleich Null ist, vollkommen entsprochen; die zweite, welche ausdrückt, dass die Summe der Horizontalkräfte Null ist, wird einfach

$$T_1 + T_2 + 2P'' = 0;$$

die dritte, als Bedingung, dass die Summe der Momente in Bezug auf einen beliebigen Punkt, z. B. V, gleich Null ist, wird

$$(T_1 - T_2)\frac{h}{2} - 2Px - P'h = 0,$$

oder

$$T_1 - T_2 - \frac{2M}{h} = 0,$$

indem man M das Biegungsmoment $2Px + P'h$ nennt.

Aus diesen zwei Gleichungen erhält man die Formeln

$$T_1 = \frac{M}{h} - P'',$$

$$T_2 = -\frac{M}{h} - P'',$$

welche identisch sind mit den für den zuerst betrachteten Gitterträger gefundenen Formeln, und welche auch zu dem gleichen Schlusse führen, dass *die horizontalen Stäbe dem Biegungsmomente und dem Normaldrucke widerstehen, während die Gitterstäbe die Schubkraft aufnehmen.*

4. Dritter Fall eines gegliederten Gitterträgers. — In beiden früheren Fällen haben die gewöhnlichen Gleichungen der Statik genügt, um die Kräfte in den einzelnen Gliedern der Gitterträger vollkommen zu bestimmen, ohne dass man genöthigt gewesen wäre, deren Elasticität in Berücksichtigung ziehen zu müssen.

Nunmehr ist ein anderer Fall zu betrachten, in welchem die Anzahl der Stäbe grösser ist als diejenige, welche gerade nothwendig wäre, um das System unveränderlich zu machen, d. h. in welchem die Zahl der unbekannten Spannungen grösser ist als die Zahl der durch die Statik starrer Körper gegebenen Gleichungen.

Man denke sich also einen Träger, wie er in Nummer 2 betrachtet wurde, welchem aber noch verticale Stäbe oder kurz Verticale beigefügt wurden, wie dies aus nebenstehender Figur zu ersehen ist.

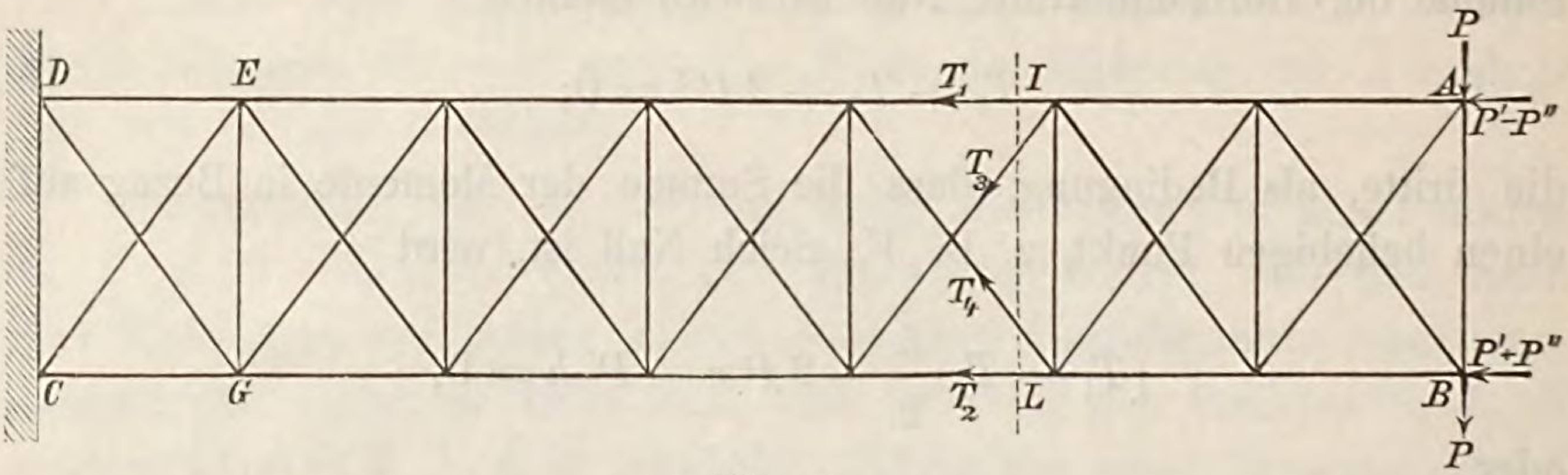


Fig. 19.

Ferner nehme man an, dass am Ende AB dieselben Kräfte wirken wie im ersten Falle, und dass nach dem Durchschneiden des Trägers in der Richtung IL die in den durchschnittenen Stäben effectiv thätigen Spannungen durch die Kräfte T_1, T_2, T_3, T_4 ersetzt worden sind. Für das Gleichgewicht des rechts von IL gelegenen Theiles des Trägers hat man die drei Gleichungen (1) des ersten Falles, aus welchen man bei Berücksichtigung des Werthes (3) für das Biegungsmoment M folgende Gleichungen erhält:

$$\left.\begin{aligned} T_1 &= -T_4 \cos\alpha + \frac{P}{\operatorname{tang}\alpha} + \frac{M}{h} - P'', \\ T_2 &= -T_4 \cos\alpha + \frac{P}{\operatorname{tang}\alpha} - \frac{M}{h} - P'', \\ T_3 &= T_4 - \frac{2P}{\sin\alpha}. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Wenn aber die Verticalen absolut starre Stäbe wären, d. h. wenn dieselben unfähig wären, sich unter der Einwirkung der Kräfte, welchen sie unterworfen sind, zu verlängern oder zu verkürzen, so ist offenbar deren Deformationsarbeit gleich Null. Nennt man

Ω die Querschnittsfläche, l die Länge und E den Elasticitätscoëfficienten der horizontalen Stäbe, welche die Spannungen T_1 und T_2 haben;

Ω_1 die Querschnittsfläche, l_1 die Länge und E_1 den Elasticitätscoëfficienten der Gitterstäbe mit den Spannungen T_3 und T_4;

so hat man als Ausdruck für die Deformationsarbeit des ganzen Trägers die Formel

$$\frac{1}{2}\sum\left(\frac{T^2_1+T^2_2}{\varepsilon}+\frac{T^2_3+T^2_4}{\varepsilon_1}\right),$$

in welcher zur Vereinfachung

$$\frac{\Omega E}{l}=\varepsilon \quad \text{und} \quad \frac{\Omega_1 E_1}{l_1}=\varepsilon_1$$

gesetzt wurde.

Mit Hilfe der drei Gleichungen (7) kann man aus dem Ausdrucke für die Deformationsarbeit die Spannungen T_1, T_2, T_3 eliminiren, so dass dieselbe eine Function der alleinigen Spannungen der zu DG parallelen Stäbe wird. Um diese letzteren Spannungen zu erhalten, muss man, zufolge dem Lehrsatze von den Differentialquotienten der Arbeit, die Differentialquotienten der Deformationsarbeit mit Bezug auf diese Spannungen gleich Null setzen. Der Ausdruck

$$\frac{T^2_1+T^2_2}{2\,\varepsilon}+\frac{T^2_3+T^2_4}{2\,\varepsilon_1}$$

wird nach der Elimination von T_1, T_2, T_3 nur die Unbekannte T_4 enthalten und jedes ähnliche Glied wird sich auf eine Function bringen lassen, welche nur die Spannung eines einzigen der zu DG parallelen Stäbe enthalten wird. Es ergibt dies also die Gleichung

$$\frac{T_1\dfrac{d\,T_1}{d\,T_4}+T_2\dfrac{d\,T_2}{d\,T_4}}{\varepsilon}+\frac{T_3\dfrac{d\,T_3}{d\,T_4}+T_4}{\varepsilon_1}=0\,;$$

und mit Berücksichtigung, dass

$$\frac{d\,T_1}{d\,T_4}=\frac{d\,T_2}{d\,T_4}=-\cos\alpha \quad \text{und} \quad \frac{d\,T_3}{d\,T_4}=1,$$

erhält man

$$-\frac{(T_1+T_2)\cos\alpha}{\varepsilon}+\frac{T_3+T_4}{\varepsilon_1}=0. \tag{8}$$

Diese Gleichung gibt mit den drei oben angeführten die zur Bestimmung der vier Unbekannten nothwendige Anzahl von Gleichungen. Man erhält somit

$$\left.\begin{aligned}
T_1 &= \frac{M}{h} - \frac{P''\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_1}}{\cos^2\alpha + \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_1}}, \\
T_2 &= -\frac{M}{h} - \frac{P''\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_1}}{\cos^2\alpha + \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_1}}, \\
T_3 &= -\frac{P}{\sin\alpha} - \frac{P''\cos\alpha}{\cos^2\alpha + \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_1}}, \\
T_4 &= \frac{P}{\sin\alpha} - \frac{P''\cos\alpha}{\cos^2\alpha + \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_1}}.
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Der Vergleich dieser Formeln mit den für den ersten Fall gefundenen führt zu dem Resultate, dass die Anwesenheit der vollkommen starren Verticalen die Pressung aller horizontalen Stäbe um

$$\frac{P''\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha + \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_1}}$$

und die Spannung aller Gitterstäbe um

$$\frac{P''\cos\alpha}{\cos^2\alpha + \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_1}}$$

verringert.

Wenn man T_5 die Spannung in einer Verticalen nennt, und wenn man das Gleichgewicht zwischen den Spannungen für einen beliebigen Punkt ausdrückt, so hat man unter anderen die Gleichung

$$(T_3 + T_4)\sin\alpha + T_5 = 0,$$

und folglich

$$T_5 = \frac{2\,P''\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha + \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_1}}. \tag{10}$$

Dies ist die Spannung in jeder Verticalen.

Man sieht daraus, dass, wenn das Ende des Trägers nur durch die Kraft $2P$ und das Kräftepaar $(P', -P')$ beansprucht würde, d. h. wenn P'' Null wäre, auch die Spannung der Verticalen Null sein würde, und dass die horizontalen Stäbe eben so wie die Gitterstäbe genau dieselben Spannungen haben würden, als wenn die Verticalen nicht vorhanden wären.

5. Gewöhnliche Gitterträger. — Dies sind Träger mit continuirlichen Gurten, bei welchen die Stäbe mit denselben nicht mittelst Charnieren, sondern mittelst Nieten verbunden sind.

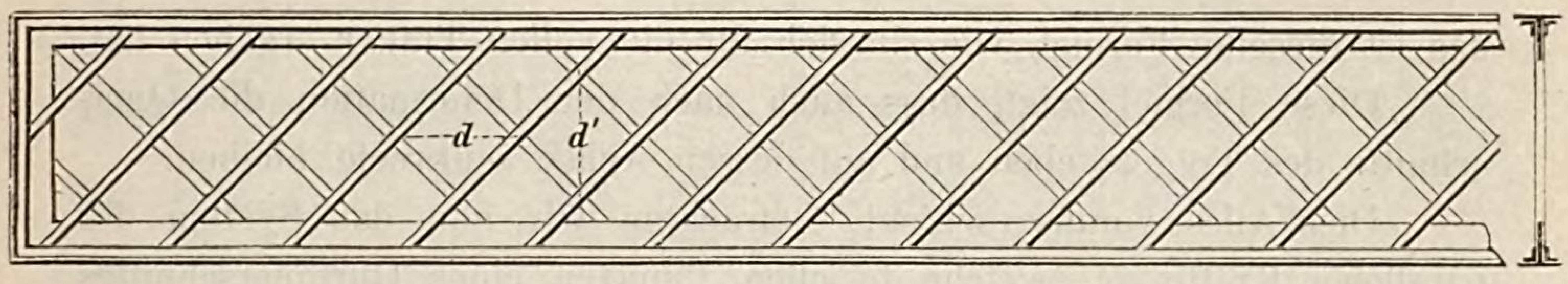


Fig. 20.

Wenn die Gurten und die Stäbe genügend klein sind, wie dies am häufigsten der Fall ist, so werden dieselben auch sehr kleine Trägheitsmomente haben im Verhältnisse zu dem Trägheitsmomente der aus den Querschnittsflächen der beiden Gurten zusammengesetzten Figur, so dass man sich von der Wahrheit sehr wenig entfernen wird, wenn man annimmt, dass das Trägheitsmoment jedes Stabes und jeder Gurte Null sei; man kann also den Träger als einen gegliederten betrachten und kommt hierbei auf die oben betrachteten Fälle zurück.

Man muss also annehmen, dass sich die beiden Gurten auf zwei Serien von Stäben reduciren, welche sich auf zwei horizontalen Linien gruppiren, und muss daher zuerst die Entfernung dieser beiden Linien berechnen, d. h. die Höhe des theoretischen Trägers, welcher an Stelle des gegebenen gedacht wird.

Aus Analogie mit dem für die *vollen Träger* Gefundenen kann man annehmen, dass in den Gurten der Normaldruck p_{xx} von einem Punkte zu dem anderen variabel ist, und zwar variabel nach einer linearen Function der Entfernung des betrachteten Punktes von der Biegungsachse. Nennt man für einen Querschnitt

P die Normalpressung,

M das Biegungsmoment,

S die Schubkraft,

Ω die Fläche und I das Trägheitsmoment der durch die Querschnitte der beiden Gurten gebildeten Figur,

z die Entfernung eines Punktes des Querschnittes von der Biegungsachse,

so kann man annehmen, dass

$$p_{xx} = \frac{P}{\Omega} + \frac{M}{I} z, \tag{11}$$

das ist dieselbe Formel, wie sie sich für die vollen Träger ergeben hat.

Diese Formel zeigt, dass auch nach der Deformation die Querschnitte des Trägers eben und auf dessen Achse senkrecht bleiben.

Dies Alles vorausgeschickt, betrachten wir nun das System der parallelen Kräfte p_{xx}, welche in allen Punkten eines Gurtquerschnittes wirken; der Mittelpunkt dieses Systems wird in der Entfernung

$$\frac{\sum \left(\frac{P}{\Omega} + \frac{M}{I} z\right) z \, d\omega}{\sum \left(\frac{P}{\Omega} + \frac{M}{I} z\right) d\omega}$$

von der Biegungsachse sein, wobei die Summen $\sum$ auf den ganzen Querschnitt einer Gurte auszudehnen sind.

Man hat aber

$$\sum d\omega = \frac{\Omega}{2}, \qquad \sum z^2 \, d\omega = \frac{I}{2};$$

macht man nun

$$\sum z \, d\omega = G \tag{12}$$

und multiplicirt die vorhergehende Formel mit 2, so erhält man als Ausdruck für die Entfernung der Mittelpunkte die Formel

$$h = 2 \, \frac{\frac{P}{\Omega} G + \frac{M}{2}}{\frac{P}{2} + \frac{M}{I} G}. \tag{13}$$

Wenn keine Normalpressung vorhanden ist, gibt diese Formel

$$h = \frac{I}{G}; \tag{14}$$

wenn hingegen das Biegungsmoment gleich Null ist, erhält man

$$h = \frac{4\,G}{\Omega}. \tag{15}$$

Das letzte Resultat gibt die Entfernung der Schwerpunkte der Querschnitte der beiden Gurtungen.

Andererseits lässt sich erkennen, dass das erste Resultat $\frac{I}{G}$ immer grösser sein muss als $\frac{4\,G}{\Omega}$, dass es aber kleiner ist als die effective Höhe des Trägers. Da die Gurten einen **T**-förmigen Querschnitt haben, differirt die Entfernung der beiden Schwerpunkte sehr wenig von der ganzen Höhe des Trägers, woraus folgt, dass die oben erhaltenen Werthe für h annäherungsweise als gleich betrachtet werden können, und dass man

$$h = \frac{I}{G}$$

nehmen kann, wie auch der Werth des Verhältnisses $\frac{M}{P}$ sein mag.

Nachdem die Gitterstäbe im Allgemeinen mit einander Rhomben bilden, nennen wir

d die auf die Achse des Trägers senkrechte Diagonale,

d' die zu dieser Achse parallele Diagonale,

α den Winkel, welchen die Stäbe mit der Achse des Trägers einschliessen.

Man sieht wohl leicht ein, dass die Bedingungen des Widerstandes des Trägers sehr wenig geändert werden, wenn man auch für dieses System von Gitterstäben ein anderes setzt, dessen Stäbe zu den ersteren parallel sind, aber untereinander eine grössere oder kleinere Entfernung haben; vorausgesetzt, dass deren Querschnittsfläche im Verhältnisse zu derjenigen des ersten Systems umgekehrt proportional ist zu der Entfernung der Stäbe, so dass das Volumen aller Gitterstäbe constant bleibt.

Unter dieser Voraussetzung kann man die theoretische Höhe des Trägers durch die Diagonale d dividiren und erhält als Quotient eine ganze

Zahl n und einen Bruch i. Substituirt man nun für dieses System von Gitterstäben ein anderes, dessen Diagonalen

$$d\frac{n+i}{n} \quad \text{und} \quad d'\frac{n+i}{n}$$

sind, so ist offenbar die neue Diagonale $d\frac{n+i}{n}$ genau n-mal in der theoretischen Höhe h enthalten, so dass in dem zweiten System die Stäbe je zwei und zwei im selben Punkte mit den die Gurten darstellenden geraden Linien verbunden werden können. Man gelangt auf diese Weise zu einem gegliederten Gitterträger, ähnlich jenem, welcher in Nummer 3 betrachtet wurde. Die Spannung der Stäbe des zweiten Systems beträgt

$$\frac{S}{2\,n\sin\alpha}.$$

Da die für den Träger wirklich verwendeten Stäbe näher an einander stehen als diejenigen des angenommenen Systems, und zwar im Verhältnisse von $\frac{n}{n+i}$, so folgt daraus, dass deren Spannung

$$\frac{S}{2\,n\sin\alpha} \times \frac{n}{n+i} = \frac{S}{2\,(n+i)\sin\alpha}$$

ist; nun ist aber

$$n+i = \frac{h}{d} = \frac{I}{d\,G} \quad \text{und}$$

$$\sin\alpha = \frac{d}{\sqrt{d^2+d'^2}},$$

weshalb die Spannung in den Gitterstäben des betrachteten Trägers schliesslich durch die Formel

$$\frac{G}{I} \times \frac{S\sqrt{d^2+d'^2}}{2}. \tag{16}$$

gegeben ist.

Nennt man ω die Querschnittsfläche der Stäbe, so ist deren Spannung per Quadratmeter gegeben durch

$$\frac{G}{I} \times \frac{S\sqrt{d^2+d'^2}}{2\,\omega}. \tag{17}$$

6. Deformationsarbeit der Gitterträger. — Die Deformationsarbeit der Gitterträger setzt sich aus zwei Theilen zusammen, und zwar aus derjenigen der Gurten und derjenigen der Stäbe.

Für eine unendlich kleine Schichte mit der Dicke ds wird erstere durch die Formel

$$\frac{ds}{2E}\int\int p_{xx}^2\,dy\,dz$$

ausgedrückt, wobei das Doppelintegral für die ganze Fläche der beiden Gurten genommen werden muss. Setzt man für p_{xx} dessen Werth

$$\frac{P}{\Omega}+\frac{M}{I}z,$$

so erhält man wie für den vollen Träger

$$\frac{ds}{2E}\left(\frac{P^2}{\Omega}+\frac{M^2}{I}\right).$$

Um die Deformationsarbeit der Gitterstäbe in einer allgemeinen Weise auszudrücken, nimmt man für deren Länge die theoretische Länge

$$\frac{h}{\sin\alpha};$$

nennt man sodann T die Spannung eines Stabes, ω dessen Querschnittsfläche, E' dessen Elasticitätscoëfficienten, so wird offenbar dessen Deformationsarbeit ausgedrückt werden durch die Formel

$$\frac{T^2\dfrac{h}{\sin\alpha}}{2E'\omega};$$

und nachdem in jeder Länge des Trägers, welche gleich ist der horizontalen Diagonale d', es zwei Stablängen gibt, so folgt daraus, dass für jede Längeneinheit des Trägers die Deformationsarbeit der Gitterstäbe gegeben ist durch

$$\frac{2}{d'}\times\frac{T^2\dfrac{h}{\sin\alpha}}{2E'\omega}=\frac{1}{2E'\omega}\cdot\frac{2T^2h}{d'\sin\alpha}.$$

Früher wurde gefunden, dass

$$T=\frac{G}{I}\times\frac{S\sqrt{d^2+d'^2}}{2},\qquad h=\frac{I}{G},\qquad \sin\alpha=\frac{d}{\sqrt{d^2+d'^2}};$$

es erhält somit obiger Ausdruck folgende Form:

$$\frac{S^2}{2E'\omega} \times \frac{G}{I} \frac{(d^2 + d'^2)^{\frac{3}{2}}}{2dd'}.$$

Macht man

$$\frac{G}{I} \frac{(d^2 + d'^2)^{\frac{3}{2}}}{2dd'} = A,$$

so hat man, um die Deformationsarbeit der Gitterstäbe in der Länge ds des Trägers auszudrücken, die Formel

$$\frac{ds}{2E'} \cdot A \cdot \frac{S^2}{\omega},$$

und die Deformationsarbeit der unendlich kleinen Schichte des Trägers von der Dicke ds wird ausgedrückt durch die Formel

$$\frac{ds}{2E}\left(\frac{P^2}{\Omega} + \frac{M^2}{I}\right) + \frac{ds}{2E'} \cdot A \cdot \frac{S^2}{\omega}. \tag{18}$$

Sind die Gitterstäbe im Winkel von 45° gegen die Achse des Trägers geneigt, so werden die beiden Diagonalen d und d' einander gleich, und es wird der Coëfficient

$$A = \frac{G}{I} d\sqrt{2}.$$

Die Formeln für die Gitterträger wurden unter der Voraussetzung entwickelt, dass ein derartiger Träger nur durch Kräfte, welche an seinem Ende wirken, beansprucht werde, und dass alle Gitterstäbe derselben Spannung unterworfen sind. Aber ebenso wie für die vollen Träger können die in diesem speciellen Falle erhaltenen Formeln auf alle Gitterträger angewendet werden, in welcher Weise die Kräfte auf dieselben auch wirken mögen.

Man kann annehmen, dass sich die Spannung eines Gitterstabes zwischen zwei Punkten nur dann ändert, wenn derselbe in diesem Intervalle mit einem anderen Stabe vernietet ist; in gleicher Weise muss die Grösse und Vertheilung der Normalkräfte p_{xx} für alle Querschnitte einer Gurte zwischen zwei aufeinander folgenden Verbindungspunkten mit den Stäben als gleichbleibend betrachtet werden. Indess kann man die Normalkräfte in den Gurten als in continuirlicher Weise veränderlich ansehen, wenn die Diagonalen der Gitterfelder nur ein kleiner Theil der Höhe

des Trägers sind und diese Höhe wieder sehr klein ist im Verhältnisse zur Länge. Bezüglich der Gitterstäbe denke man sich den Träger derart getheilt, dass jeder Theil die Länge der horizontalen Diagonalen der Rhomben hat, und zwar mit Hilfe von senkrechten Schnitten, welche durch die Verbindungspunkte der Stäbe mit den Gurten gehen, und betrachte die Spannung aller in jedem dieser Abschnitte liegenden Stabstücke als constant. Bei Anwendung der Formel

$$\frac{d\,s}{2\,E'} \cdot A \cdot \frac{S^2}{\omega}$$

findet man, sobald man dieselbe für die ganze Länge des Trägers integrirt, beinahe dasselbe Resultat, indem die Schubkraft S als in continuirlicher Weise variabel angenommen wird.

Es bleibt noch zu erwähnen, dass die Formel (18) von derjenigen (14) des vorhergehenden Capitels, welche sich auf volle Träger bezieht, nur dadurch unterschieden ist, dass der Coëfficient F der tangentialen Elasticität mit dem Coëfficienten E' der normalen Elasticität der Gitterstäbe vertauscht wurde, und dass die Querschnittsfläche des einen Stabes für die Querschnittsfläche des Trägers gesetzt wurde. In den folgenden Capiteln werden wir immer von den Formeln, welche sich auf die vollen Träger beziehen, Gebrauch machen, wohl mit der Ueberzeugung, dass alle noch zu findenden Resultate auch auf die Gitterträger anwendbar sind, sobald man die oben angegebenen Verwechslungen vornimmt.

6. Capitel.

Formeln für die Deformationsarbeit fester Körper.

1. Deformationsarbeit eines Fadens oder eines an seinen Enden gegliederten prismatischen Stabes. — Nennt man

l die Länge eines Fadens oder Stabes,

ω die Querschnittsfläche,

E den Elasticitätscoëfficienten in der Längsrichtung,

T die Spannung,

so erhält man als Ausdruck für die Deformationsarbeit die Formel

$$\frac{1}{2}\frac{T^2 l}{E\omega}. \tag{1}$$

2. Deformationsarbeit eines Stabes, welcher seiner ganzen Länge nach gleichmässig belastet wird, und dessen Enden in beliebiger Weise befestigt sind. — Es sei ABC die Achse des Prismas, welches durch folgende Kräfte beansprucht wird:

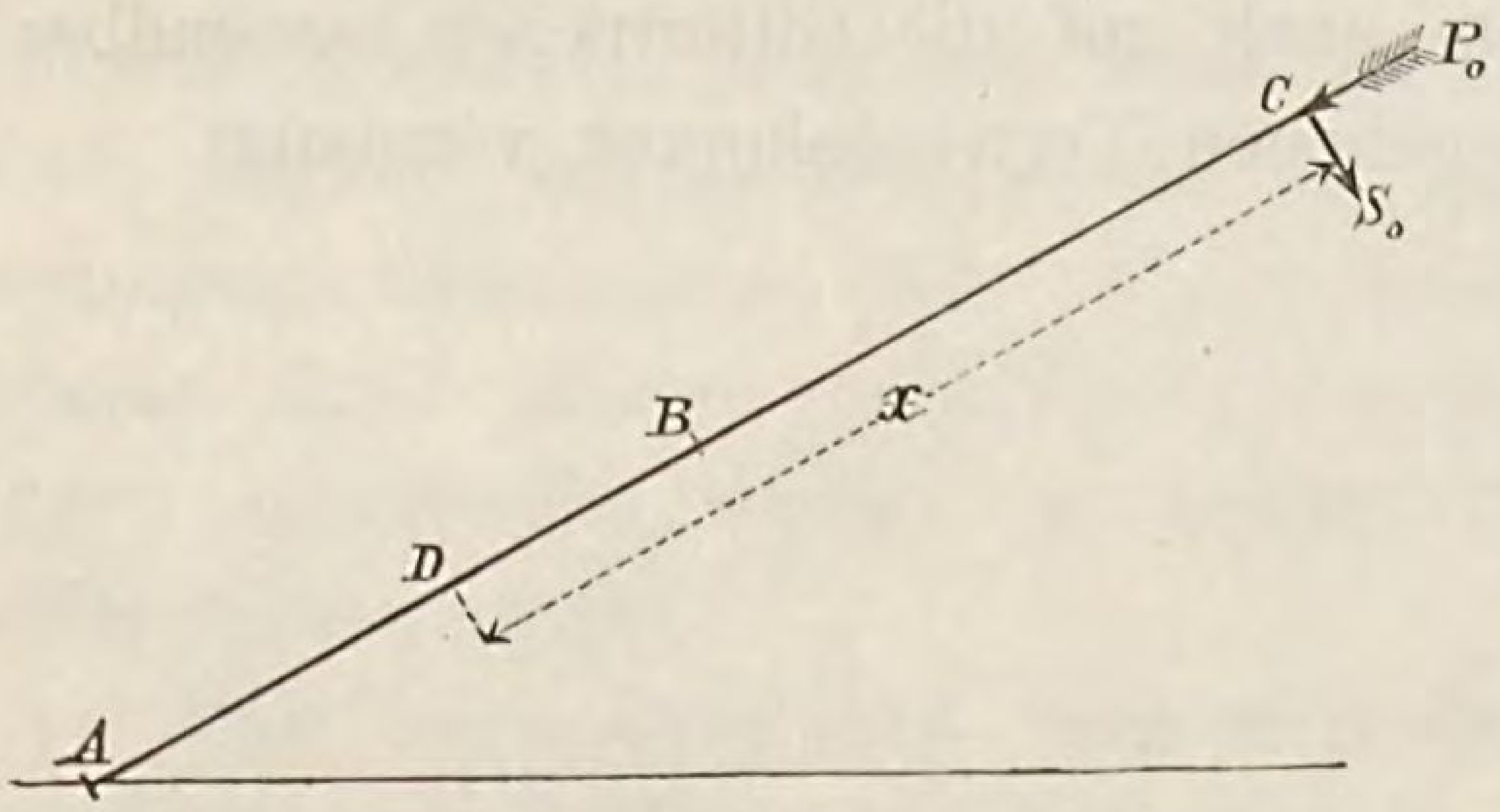


Fig. 21.

In dem Querschnitte C durch Normal- und durch Tangentialkräfte, welche eine Normalpressung P_0, eine Schubkraft S_0 in der Richtung einer Trägheitshauptachse des Querschnittes und ein Biegungsmoment M_0 in Bezug auf die andere Hauptachse geben;

in der ganzen Länge durch eine in der durch die Achse des Prismas und durch die Richtung der Kraft S_0 bestimmten Ebene liegende, gleichmässig vertheilte Kraft, von welcher der auf eine Längeneinheit

wirkende Theil eine zur Achse des Prismas senkrechte Componente p_1 und eine von C nach A in der Richtung dieser Achse thätige Componente p_2 gibt;

in dem Querschnitte A durch Normal- und Tangentialkräfte, welche eine Normalpressung P_2, eine Schubkraft S_2 und ein Moment M_2 geben.

Für einen Querschnitt im Punkte D in der Entfernung x von dem Ende C drückt man das Biegungsmoment, die Normalpressung und die Schubkraft mit Hilfe der folgenden Formeln aus:

$$M = M_0 + S_0\, x + \frac{1}{2} p_1\, x^2,$$
$$P = P_0 + p_2\, x,$$
$$S = S_0 + p_1\, x.$$

Nennt man nun

$2\,l$ die Länge des Prismas,

Ω und I die Fläche und das Trägheitsmoment des Querschnittes,

E den Elasticitätscoëfficienten in der Längsrichtung,

F den Elasticitätscoëfficienten in der Querrichtung,

so erhält man als Ausdruck für die Deformationsarbeit des ganzen Prismas die Formel

$$\frac{1}{2\,E\,I}\int_0^{2\,l} M^2\, d\,x + \frac{1}{2\,E\,\Omega}\int_0^{2\,l} P^2\, d\,x + \frac{A}{2\,F\,\Omega}\int_0^{2\,l} S^2\, d\,x.$$

Man könnte nun für M, P, S jene Werthe in Functionen von x, welche oben gegeben wurden, einsetzen und die Integrationen ausführen. Es ist aber vortheilhafter, zuerst zu beachten, dass, wenn man in dem Ausdrucke für M $x = 2\,l$ setzt, man M_2 erhält, d. h.

$$M_2 = M_0 + 2\,l\,S_0 + 2\,p_1\, l^2;$$

aus dem Ausdrucke für M_2 und demjenigen von M kann man S_0 eliminiren und erhält

$$M = M_0 + \left(\frac{M_2 - M_0}{2\,l} - p_1\, l\right) x + \frac{1}{2} p_1\, x^2. \tag{2}$$

Beachtet man ferner, dass

$$P_2 = P_0 + 2\,p_2\, l,$$
$$S_2 = S_0 + 2\,p_1\, l,$$

so erhält man zur Berechnung der Deformationsarbeit des Stabes bei Anwendung der Gleichung (2) nach durchgeführter Integration die Formel

$$\left.\begin{aligned} &\frac{2\,l}{2\,E\,I}\left(\frac{M^2_0 + M_0\,M_2 + M^2_2}{3} - \frac{M_0 + M_2}{3}\,p_1\,l^2 + \frac{2}{15}\,p^2_1\,l^4\right) \\ &+ \frac{2\,l}{2\,E\,\Omega}\left(\frac{P^2_0 + P^2_2}{2} - \frac{2}{3}\,p^2_2\,l^2\right) + \frac{2\,A\,l}{2\,F\,\Omega}\left(\frac{S^2_0 + S^2_2}{2} - \frac{2}{3}\,p^2_1\,l^2\right). \end{aligned}\right\}\ (3)$$

Dieser Formel kann man auch eine andere Form geben, wenn man das Biegungsmoment M_1, die Normalpressung P_1 und die Schubkraft S_1 bezüglich des mittleren Querschnittes des Stabes in dieselbe einführt; denn, wenn man in den allgemeinen Ausdrücken für M, P, S $x = l$ macht, so erhält man

$$M_1 = \frac{M_0 + M_2}{2} - \frac{1}{2}\,p_1\,l^2,$$

$$P_1 = P_0 + p_2\,l,$$

$$S_1 = S_0 + p_1\,l.$$

Aus der ersten dieser Formeln ergibt sich

$$M^2_0 + 2\,M_0\,M_2 + M^2_2 - 2\,(M_0 + M_2)\,p_1\,l^2 + p^2_1\,l^4 = 4\,M^2_1$$

oder, indem man $M^2_0 + M^2_2 - \frac{1}{5}\,p^2_1\,l^4$ hinzu addirt und sodann durch 3 dividirt,

$$2\left(\frac{M^2_0 + M_0\,M_2 + M^2_2}{3} - \frac{M_0 + M_2}{3}\,p_1\,l^2 + \frac{2}{15}\,p^2_1\,l^4\right) = \frac{M^2_0 + 4\,M^2_1 + M^2_2}{3} - \frac{1}{15}\,p^2_1\,l^4.$$

Aus der zweiten Formel erhält man

$$P^2_1 = P^2_0 + 2\,P_0\,p_2\,l + p^2_2\,l^2,$$

und da der Ausdruck $P_2 = P_0 + 2\,p_2\,l$

$$P^2_2 = P^2_0 + 4\,P_0\,p_2\,l + 4\,p^2_2\,l^2$$

ergibt, so folgt daraus

$$P^2_2 - 2\,P^2_1 = -\,P^2_0 + 2\,p^2_2\,l^2,$$

oder

$$2\,(P^2_0 + P^2_2) - 4\,p^2_2\,l^2 = 4\,P^2_1\,;$$

durch Hinzufügen von $P^2_0 + P^2_2$ beiderseits der Gleichung und nachherige Division durch 3 findet man

$$2\left(\frac{P^2_0 + P^2_2}{2} - \frac{2}{3}\,p^2_2\,l^2\right) = \frac{P^2_0 + 4\,P^2_1 + P^2_2}{3}.$$

Aus der dritten Formel erhält man in gleicher Weise

$$2\left(\frac{S^2_0 + S^2_2}{2} - \frac{2}{3}p^2_1\, l^2\right) = \frac{S^2_0 + 4\,S^2_1 + S^2_2}{3}.$$

Auf Grund dieser Transformationen kann die Formel (3) in nachfolgender Form gegeben werden:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{l}{2\,E\,I}\left(\frac{M^2_0 + 4\,M^2_1 + M^2_2}{3} - \frac{1}{15}p^2_1\, l^4\right)\\ &+ \frac{l}{2\,E\,\Omega}\cdot\frac{P^2_0 + 4\,P^2_1 + P^2_2}{3} + \frac{A\,l}{2\,F\,\Omega}\,\frac{S^2_0 + 4\,S^2_1 + S^2_2}{3}.\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

3. Allgemeine Betrachtung. — Nachdem man bei Anwendung der Formeln, welche die Deformationsarbeit fester Körper ausdrücken, jederzeit die Differentialquotienten dieser Ausdrücke mit Bezug auf die in gegebenen Punkten wirkenden Kräfte oder die in gegebenen Querschnitten statthabenden Biegungsmomente zu nehmen hat, so kommen diese unbekannten Kräfte und Momente offenbar nur in den Ausdrücken für M_0, M_1, M_2; P_0, P_1, P_2; S_0, S_1, S_2 vor; man kann also die in dem Ausdrucke für die Deformationsarbeit enthaltenen Glieder, welche von diesen Grössen unabhängig sind und bei der Differentiation nothwendigerweise verschwinden müssen, aus diesem Ausdrucke weglassen, und die Formeln (3) und (4) können somit in folgender Form geschrieben werden:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{2\,l}{2\,E\,I}\left(\frac{M^2_0 + M_0\,M_2 + M^2_2}{3} - \frac{M_0 + M_2}{3}p_1\, l^2\right)\\ &\quad + \frac{l}{2\,E\,\Omega}(P^2_0 + P^2_2) + \frac{A\,l}{2\,F\,\Omega}(S^2_0 + S^2_2);\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{l}{2\,E\,I}\,\frac{M^2_0 + 4\,M^2_1 + M^2_2}{3} + \frac{l}{2\,E\,\Omega}\,\frac{P^2_0 + 4\,P^2_1 + P^2_2}{3}\\ &\quad + \frac{A\,l}{2\,F\,\Omega}\,\frac{S^2_0 + 4\,S^2_1 + S^2_2}{3}.\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

4. Deformationsarbeit eines festen Körpers mit constantem Querschnitte, welcher an seinen Enden in beliebiger Weise befestigt ist, und welcher durch ein längs seiner Achse gleichmässig vertheiltes Gewicht belastet wird, in dem Falle, als diese Achse ein Bogenstück ist, welches im Verhältnisse zur

Sehne eine sehr kleine Pfeilhöhe hat. — Es sei in nebenstehender Figur $A\,B\,C$ die in einer Verticalebene gelegene Achse des festen Körpers und α der Winkel, welchen die Sehne $A\,C$ mit der Horizontalen einschliesst; ferner denke man sich folgende Kräfte auf den festen Körper wirkend, und zwar:

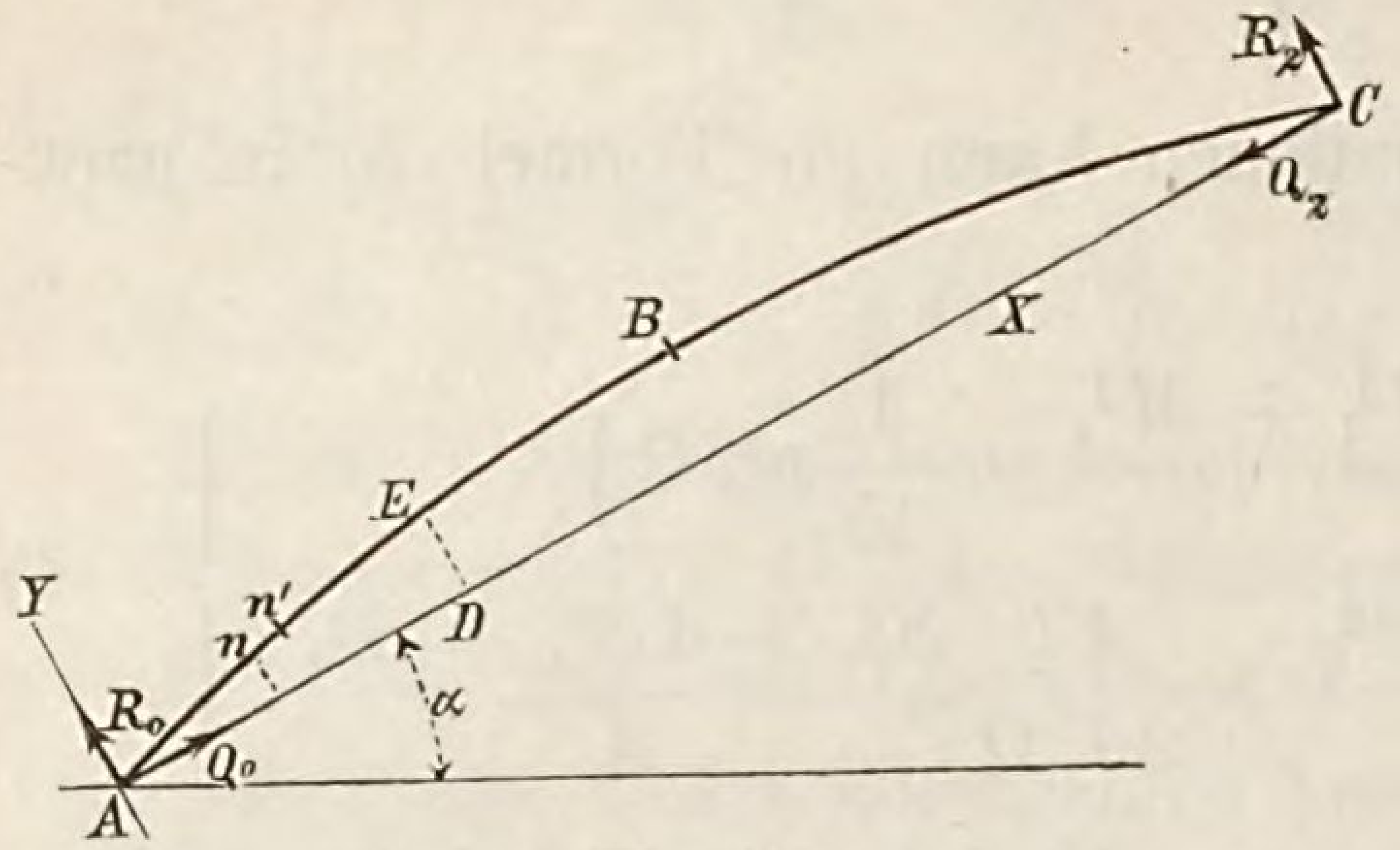


Fig. 22.

1. Im Querschnitte A Kräfte, welche zwei Resultirende Q_0 und R_0 geben, deren eine nach der Sehne und deren andere nach der in der Ebene des Bogens auf die Sehne gezogene Senkrechte gerichtet ist; diese Kräfte geben ausserdem noch ein in derselben Ebene gelegenes Kräftepaar, dessen Moment M_0 ist;

2. auf die ganze Länge der Achse ein gleichmässig vertheiltes Gewicht, und zwar in der Grösse von p Kilogramm per Längeneinheit;

3. schliesslich in dem Querschnitte C Kräfte, welche zwei im Mittelpunkte wirkende Resultirende Q_2 und R_2, sowie ein Kräftepaar geben, dessen Moment M_2 ist.

Man hat nun das Biegungsmoment, die Normalpressung und die Schubkraft, welche in einem beliebigen Querschnitte des festen Körpers stattfinden, auszudrücken.

Nimmt man A als Anfangspunkt der Coordinaten, die Sehne $A\,C$ als x-Achse und deren Senkrechte als y-Achse, so erhält man, indem man R den Halbmesser nennt,

$$R-(f-y)=\sqrt{R^2-(l-x)^2}$$

als Gleichung der Curve; da aber die Pfeilhöhe im Verhältnisse zur Sehne sehr klein ist, so wird diese auch im Verhältnisse zum Halbmesser sehr klein sein; man kann also die Wurzel der obigen Gleichung in einer sehr convergirenden Reihe entwickeln und sich mit den ersten zwei Gliedern dieser Reihe begnügen; dies gibt

$$\sqrt{R^2-(l-x)^2}=R-\frac{(l-x)^2}{2R}$$

und folglich

$$y = f - \frac{(l-x)^2}{2R}.$$

Substituirt man für $2R$ dessen Werth $\frac{l^2+f^2}{f}$ und vernachlässigt man f^2 in Berücksichtigung von l^2, so erhält man

$$y = \frac{f}{l^2}(2\,l\,x - x^2). \tag{7}$$

Um das Biegungsmoment, die Normalpressung und die Schubkraft für den Querschnitt in E zu finden, nenne man s die Länge des Bogens AE und β den Winkel, welchen der betrachtete Querschnitt mit dem correspondirenden Querschnitte im Mittelpunkte B bildet.

Das Bogenelement $n\,n' = d\,s'$ ist durch das Gewicht $p\,d\,s'$ belastet, welches man in zwei Componenten zerlegen kann, deren eine $p\,d\,s' \cos\alpha$ senkrecht auf die Sehne $A\,C$, deren andere $p\,d\,s' \sin\alpha$ nach dieser Sehne gerichtet ist. Diese zwei Componenten kann man auch mit $p_1\,d\,s'$ und $p_2\,d\,s'$ bezeichnen, wenn man zur Vereinfachung

$$p\cos\alpha = p_1, \qquad p\sin\alpha = p_2.$$

macht.

Um also für den Querschnitt in E die gesuchten Grössen auszudrücken, hat man, wenn man x' und y' die Coordinaten des Punktes n nennt, folgende Formeln:

$$M = M_0 + Q_0\,y - R_0\,x + \int_0^x p_1\,(x-x')\,d\,s' - \int_0^x p_2\,(y-y')\,d\,s',$$

$$P = Q_0 \cos\beta + R_0 \sin\beta - p\,s\,.\sin(\alpha+\beta),$$

$$S = Q_0 \sin\beta - R_0 \cos\beta + p\,s\,.\cos(\alpha+\beta).$$

Nachdem β der Winkel ist, welchen die Normale auf die Körperachse im Punkte E mit der y-Achse bildet, so hat man

$$\operatorname{tang}\beta = \frac{d\,y}{d\,x} = \frac{2f(l-x)}{l^2},$$

und da die Pfeilhöhe f im Verhältnisse zu l sehr klein ist, wird die Grösse $\operatorname{tang}\beta$ überall sehr klein sein, und man kann daher deren Quadrat in Bezug auf die Einheit vernachlässigen. Statt

$$d\,s = d\,x\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\beta},\quad \sin\beta = \frac{\operatorname{tang}\beta}{\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\beta}},\quad \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\beta}}$$

kann man annäherungsweise

$$d s = d x, \qquad s = x, \qquad \sin\beta = \frac{2 f (l - x)}{l^2}, \qquad \cos\beta = 1$$

nehmen und folglich

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta = \sin\alpha + \frac{2 f (l - x)}{l^2} \cos\alpha,$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta = \cos\alpha - \frac{2 f (l - x)}{l^2} \sin\alpha,$$

$$\int_0^s p_1 (x - x') \, d s' = p_1 \int_0^x (x - x') \, d x' = \frac{p_1 x^2}{2},$$

$$\int_0^s p_2 (y - y') \, d s' = p_2 \int_0^x (y - y') \, d x' = \frac{p_2 f}{l^2} \left(l x^2 - \frac{2 x^3}{3} \right).$$

Die Ausdrücke für M, P, S werden somit

$$\left.\begin{aligned}
M &= M_0 + \left(\frac{2f}{l} Q_0 - R_0 \right) x + \left(- \frac{Q_0 f}{l^2} + \frac{p_1}{2} - \frac{p_2 f}{l} \right) x^2 + \frac{2 p_2 f}{3 l^2} x^3, \\
P &= \left(Q_0 + \frac{2 f R_0}{l} \right) + \left(- \frac{2 f R_0}{l^2} - p_2 - \frac{2 f p_1}{l} \right) x + \frac{2 f p_1}{l^2} x^2, \\
S &= \left(\frac{2 f Q_0}{l} - R_0 \right) + \left(- \frac{2 f Q_0}{l^2} + p_1 - \frac{2 f p_2}{l} \right) x + \frac{2 f p_2}{l^2} x^2.
\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Da sich leicht erkennen lässt, dass für $x = 0$ $P = P_0$ und $S = S_0$ werden muss, so folgt daraus, dass

$$P_0 = Q_0 + \frac{2f}{l} R_0, \qquad S_0 = \frac{2f}{l} Q_0 - R_0.$$

Die drei Formeln (8) können daher auch in folgender Form aufgestellt werden:

$$\left.\begin{aligned}
M - M_0 - \frac{2 p_2 f}{3 l^2} x^3 &= A x + B x^2, \\
P - P_0 &= A_1 x + B_1 x^2, \\
S - S_0 &= A_2 x + B_2 x^2;
\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

hiebei sind durch $A, B;\ A_1, B_1;\ A_2, B_2$ die Coëfficienten von x und von x^2 in den Formeln (8) gegeben. Wenn man nun M_1 das Biegungsmoment, P_1 die Normalpressung und S_1 die Schubkraft für den mittleren Querschnitt nennt, so geben die obigen Gleichungen $M = M_1$, $P = P_1$, $S = S_1$ für $x = l$, aber ebenso $M = M_2$, $P = P_2$, $S = S_2$ für $x = 2l$;

aus den Gleichungen (9) und jenen, welche man aus ihnen ableitet, indem man $x = l$ und $x = 2\,l$ macht, lassen sich die Coëfficienten von x und x^2 eliminiren, und man findet sodann

$$M = M_0 + (M_1 - M_0)\frac{2\,l\,x - x^2}{l^2} - (M_2 - M_0)\frac{l\,x - x^2}{2\,l^2}$$
$$+ \frac{2\,p_2\,f}{3\,l^2}(x^3 - 3\,l\,x^2 + 2\,l^2\,x),$$
$$P = P_0 + (P_1 - P_0)\frac{2\,l\,x - x^2}{l^2} - (P_2 - P_0)\frac{l\,x - x^2}{2\,l^2},$$
$$S = S_0 + (S_1 - S_0)\frac{2\,l\,x - x^2}{l^2} - (S_2 - S_0)\frac{l\,x - x^2}{2\,l^2}.$$

Die Deformationsarbeit des ganzen festen Körpers wird, indem man immer $d\,s = d\,x$ und $s = x$ nimmt, ausgedrückt durch die Formel

$$\frac{1}{2\,E\,I}\int_0^{2\,l} M^2\,d\,x + \frac{1}{2\,E\,\Omega}\int_0^{2\,l} P^2\,d\,x + \frac{A}{2\,F\,\Omega}\int_0^{2\,l} S^2\,d\,x.$$

Substituirt man hierin für M, P, S die oben erhaltenen Werthe und führt die Integration aus, so ergibt sich

$$\left.\begin{aligned}&\frac{l}{2\,E\,I}\left[\frac{M^2_0 + 4\,M^2_1 + M^2_2}{3} - \frac{(M_0 - 2\,M_1 + M_2)^2}{15} - \frac{8}{45}\,p_2 f\,l\,(M_2 - M_0)\right.\\ &\left.+ \frac{64\,p^2_2\,f^2\,l^2}{945}\right] + \frac{l}{2\,E\,\Omega}\left[\frac{P^2_0 + 4\,P^2_1 + P^2_2}{3} - \frac{(P_0 - 2\,P_1 + P_2)^2}{15}\right]\\ &+ \frac{A\,l}{2\,F\,\Omega}\left[\frac{S^2_0 + 4\,S^2_1 + S^2_2}{3} - \frac{(S_0 - 2\,S_1 + S_2)^2}{15}\right].\end{aligned}\right\}\quad(10)$$

Diese Formel lässt sich aber bei Berücksichtigung der in Nummer 3 gemachten allgemeinen Bemerkungen wesentlich vereinfachen; man hat in der That

$$P_1 - P_0 = A_1\,l + B_1\,l^2,$$
$$P_2 - P_0 = 2\,A_1\,l + 4\,B_1\,l^2;$$

wenn man von der zweiten Gleichung die mit 2 multiplicirte erste Gleichung abzieht, so erhält man

$$P_0 - 2\,P_1 + P_2 = 2\,B_1\,l^2,$$

und, bei Beachtung, dass $B_1 = \frac{2\,f}{l^2}\,p_1$,

$$P_0 - 2P_1 + P_2 = 4fp_1;$$

dies zeigt, dass die Grösse $P_0 - 2P_1 + P_2$ nur von der Last p_1 abhängig ist.

In gleicher Weise erhält man

$$S_0 - 2S_1 + S_2 = 4fp_2.$$

Vernachlässigt man also diejenigen Ausdrücke, welche von den Biegungsmomenten M_0, M_1, M_2, von den Normalpressungen P_0, P_1, P_2 und von den Schubkräften S_0, S_1, S_2 unabhängig sind, so ergibt sich für den oben betrachteten Ausdruck für die Deformationsarbeit des festen Körpers folgende Form:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{l}{2EI}\left[\frac{M^2_0 + 4M^2_1 + M^2_2}{3} - \frac{(M_0 - 2M_1 + M_2)^2}{15} - \frac{8p_2 lf(M_2 - M_0)}{45}\right] \\ &\quad + \frac{l}{2E\Omega}\,\frac{P^2_0 + 4P^2_1 + P^2_2}{3} + \frac{Al}{2F\Omega}\,\frac{S^2_0 + 4S^2_1 + S^2_2}{3}. \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Da die Pfeilhöhe im Verhältnisse zur Sehne als sehr klein vorausgesetzt wurde, wird auch der Ausdruck

$$\frac{8p_2 lf(M_2 - M_0)}{45},$$

welcher diese Pfeilhöhe als Factor enthält, sehr klein sein im Verhältnisse zu dem Ausdrucke

$$\frac{M^2_0 + 4M^2_1 + M^2_2}{3},$$

welcher nur Werthe enthält, die von f unabhängig sind, wie dies aus der ersten Formel (8) resultirt.

Dasselbe gilt für den Ausdruck

$$\frac{(M_0 - 2M_1 + M_2)^2}{15},$$

denn man hat

$$M_1 - M_0 - \frac{2}{3}p_2 lf = Al + Bl^2,$$

$$M_2 - M_0 - \frac{16}{3}p_2 lf = 2Al + 4Bl^2,$$

und erhält daraus, indem man die erste Gleichung mit 2 multiplicirt und sodann von der zweiten abzieht,

$$M_0 - 2M_1 + M_2 - 4p_2 l f = 2 B l^2$$

und, wenn man für B dessen Werth $-\frac{f}{l^2} Q_0 + \frac{p_1}{2} - \frac{p_2 f}{l}$ setzt,

$$M_0 - 2M_1 + M_2 = -2Q_0 f + p_1 l^2 + 2 p_2 l f;$$

folglich ist

$$(M_0 - 2M_1 + M_2)^2 = 4 Q^2{}_0 f^2 - 4 Q_0 f (p_1 l^2 + 2 p_2 l f) + (p_1 l^2 + 2 p_2 l f)^2;$$

der letzte Ausdruck der rechten Seite der Gleichung kann vernachlässigt werden, da er von Q_0 unabhängig ist; auch die beiden anderen rechtsseitigen Ausdrücke sind sehr klein, da sie die im Verhältnisse zur Sehne sehr kleine Pfeilhöhe f enthalten.

In der Formel (11) kann man in vielen Fällen das Binom

$$-\frac{(M_0 - 2M_1 + M_2)^2}{15} - \frac{8 p_2 l f (M_2 - M_0)}{45},$$

vernachlässigen, so dass man statt derselben die folgende Formel erhält:

$$\frac{l}{2EI} \frac{M^2{}_0 + 4M^2{}_1 + M^2{}_2}{3} + \frac{l}{2E\Omega} \frac{P^2{}_0 + 4P^2{}_1 + P^2{}_2}{3} + \frac{Al}{2F\Omega} \frac{S^2{}_0 + 4S^2{}_1 + S^2{}_2}{3}. \quad (12)$$

Dies ist jene Gleichung, von welcher wir bei den Anwendungen im Allgemeinen Gebrauch machen werden.

5. Deformationsarbeit eines festen Körpers mit constantem Querschnitte, wenn derselbe in seiner ganzen Länge nach einem continuirlichen Gesetze belastet wird, und wenn dessen Achse eine beliebige ebene Curve ist. — Zuerst theile man die Achse des festen Körpers in eine gerade Anzahl genügend kleiner, gleicher Theile, so dass jedes Stück des Körpers, welches zwei aufeinander folgende Theile der Achse enthält, eine im Verhältnisse zur Länge sehr kleine Pfeilhöhe hat und welches als gleichmässig belastet betrachtet werden kann.

Bezeichnet man nun mit 0, 1, 2, 3, . . ., n die den Theilungspunkten entsprechenden Querschnitte und nennt man

l die Länge der Theile 0, 1; 1, 2; 2, 3; . . . der Achse,

Ω die Querschnittsfläche,

I deren Trägheitsmoment,

E und F die Elasticitätscoëfficienten in der Längs- und in der Querrichtung,

$M_0, M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}, M_n$ die Biegungsmomente, welche den Querschnitten 0, 1, 2, ..., $n-1$, n entsprechen,

$P_0, P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}, P_n$ die Normalpressungen,

$S_0, S_1, S_2, \ldots, S_{n-1}, S_n$ die correspondirenden Schubkräfte,

so erhält man als Ausdruck für die Deformationsarbeit des Körpers folgende Formel, welche sich daraus ergibt, dass die Formel (12) successive auf die Stücke 0, 2; 2, 4; 4, 6; ... angewendet wird.

$$\left.\begin{aligned} &\frac{l}{2EI}\,\frac{M^2_0 + 4M^2_1 + 2M^2_2 + 4M^2_3 + \ldots + 4M^2_{n-1} + M^2_n}{3} \\ &+ \frac{l}{2E\Omega}\,\frac{P^2_0 + 4P^2_1 + 2P^2_2 + 4P^2_3 + \ldots + 4P^2_{n-1} + P^2_n}{3} \\ &+ \frac{Al}{2F\Omega}\,\frac{S^2_0 + 4S^2_1 + 2S^2_2 + 4S^2_3 + \ldots + 4S^2_{n-1} + S^2_n}{3}. \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

6. Deformationsarbeit eines festen Körpers mit variablem Querschnitte, wenn derselbe in seiner ganzen Länge nach einem continuirlichen Gesetze belastet wird, und wenn dessen Achse eine beliebige Curve ist. — Die Deformationsarbeit eines beliebigen festen Körpers, welcher aber den in Nummer 11 des 4. Capitels angeführten Bedingungen entspricht, wird durch die Formel

$$\frac{1}{2E}\int\frac{M^2}{I}\,ds + \frac{1}{2E}\int\frac{P^2}{\Omega}\,ds + \frac{1}{2F}\int\frac{A\,S^2}{\Omega}\,ds$$

ausgedrückt, wobei die Integrale für die ganze Länge des festen Körpers genommen werden müssen.

Beschreibt man eine Curve, welche als Abscissen die Werthe des Bogens s und als Ordinaten die correspondirenden Werthe von $\frac{M^2}{I}$ hat, so wird offenbar die zwischen dieser Curve, der Abscissenachse und den äussersten Ordinaten enthaltene Fläche durch das Integral

$$\int\frac{M^2}{I}\,ds$$

repräsentirt werden.

Zufolge der Simpson'schen Formel kann man diese Fläche annäherungsweise auch in folgender Weise ausdrücken: man theilt den

zwischen den äussersten Ordinaten gelegenen Theil der Abscissenachse in eine gerade Anzahl n Theile, nennt l die Länge jedes Theiles, y_0, y_1, y_2, ..., y_n die den Theilungspunkten entsprechenden Ordinaten und erhält sodann als Ausdruck für die gesuchte Fläche die Formel

$$\frac{l}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \ldots + 4y_{n-1} + y_n).$$

Theilt man die Achse des festen Körpers in n gleiche Theile und nennt für die den Theilungspunkten entsprechenden Querschnitte

$M_0, M_1, M_2, \ldots, M_n$ die Biegungsmomente,
$P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n$ die Normalpressungen,
$S_0, S_1, S_2, \ldots, S_n$ die Schubkräfte,
$I_0, I_1, I_2, \ldots, I_n$ die Trägheitsmomente,
$\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n$ die Flächen,
$A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ die Coëfficienten bezüglich dieser Querschnitte, welche in dem Ausdrucke für die der Verschiebung entsprechenden Arbeit eintreten,

so hat man

$$y_0 = \frac{M^2_0}{I_0}, \qquad y_1 = \frac{M^2_1}{I_1}, \qquad y_2 = \frac{M^2_2}{I_2}, \ldots \qquad y_n = \frac{M^2_n}{I_n},$$

und folglich

$$\int \frac{M^2}{I} d s = \frac{l}{3}\left(\frac{M^2_0}{I_0} + 4\frac{M^2_1}{I_1} + 2\frac{M^2_2}{I_2} + 4\frac{M^2_3}{I_3} + \ldots + 4\frac{M^2_{n-1}}{I_{n-1}} + \frac{M^2_n}{I_n}\right).$$

Denselben Vorgang kann man auch für die zwei anderen Integrale

$$\int \frac{P^2}{\Omega} d s, \qquad \int \frac{A S^2}{\Omega} d s$$

verfolgen und erhält sodann analoge Formeln, so dass man als Ausdruck für die Deformationsarbeit des festen Körpers folgende Formel erhält:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{2E}\cdot\frac{l}{3}\left(\frac{M^2_0}{I_0} + 4\frac{M^2_1}{I_1} + 2\frac{M^2_2}{I_2} + 4\frac{M^2_3}{I_3} + \ldots + 4\frac{M^2_{n-1}}{I_{n-1}} + \frac{M^2_n}{I_n}\right) \\ +&\frac{1}{2E}\cdot\frac{l}{3}\left(\frac{P^2_0}{\Omega_0} + 4\frac{P^2_1}{\Omega_1} + 2\frac{P^2_2}{\Omega_2} + 4\frac{P^2_3}{\Omega_3} + \ldots + 4\frac{P^2_{n-1}}{\Omega_{n-1}} + \frac{P^2_n}{\Omega_n}\right) \\ +&\frac{1}{2F}\cdot\frac{l}{3}\left(\frac{A_0 S^2_0}{\Omega_0} + 4\frac{A_1 S^2_1}{\Omega_1} + 2\frac{A_2 S^2_2}{\Omega_2} + 4\frac{A_3 S^2_3}{\Omega_3} + \ldots + 4\frac{A_{n-1} S^2_{n-1}}{\Omega_{n-1}} + \frac{A_n S^2_n}{\Omega_n}\right). \end{aligned}\right\} (14)$$

Man muss wohl beachten, dass die Anwendung der Simpson'schen Formel zur Bestimmung der zwischen den Curven eingeschlossenen Fläche an die Bedingung geknüpft ist, dass diese Curven *continuirlich* sind. Damit man also obige Formel für die festen Körper anwenden kann, müssen die Grössen M, P, S, I, Q, A continuirliche Functionen des Bogens s sein. Wenn eine dieser Functionen nicht continuirlich ist, d. h. wenn dieselbe plötzliche Aenderungen zeigt, muss man den Körper in mehrere Stücke theilen, und zwar derartig, dass man als Theilungspunkte diejenigen Punkte wählt, in welchen die plötzlichen Aenderungen stattfinden; sodann wendet man die Formel (14) auf jedes dieser Stücke an und summirt alle Resultate.

Wenn der Querschnitt des festen Körpers constant ist, so verwandelt sich die Formel (14) in diejenige (13), was wohl natürlich ist, da in diesem Falle der in gegenwärtiger Nummer behandelte Körper in den in der vorhergehenden Nummer betrachteten Körper übergeht; dieses Resultat ist aber um so beachtenswerther, als die Formel (13) auf Grund eines Vorganges erhalten wurde, welcher von demjenigen sehr verschieden ist, durch welchen wir zu der Formel (14) gelangt sind.

7. Capitel.

Theorie belasteter Träger mit geradliniger Achse.

1. Vorbemerkungen. — Die geraden Träger, welche wir nunmehr betrachten wollen, entsprechen den in Nummer 11 des 4. Capitels ausgedrückten Bedingungen, d. h. es sind:

1. die Dimensionen der Querschnitte des festen Körpers im Verhältnisse zu dessen Länge sehr klein;

2. sind die zwei geometrischen Orte der Trägheitshauptachsen der Querschnitte zwei Ebenen, welche durch die Achse des Körpers gehen und auf einander senkrecht stehen;

3. ist eine dieser beiden Ebenen vertical;

4. gehen alle auf einer Seite eines beliebigen Querschnittes auf den festen Körper wirkenden Belastungen, sowie die Reactionen der Fixpunkte, welche auf dieser Seite sich befinden, durch die Achse des Körpers oder sind doch derartig zu beiden Seiten dieser Achse vertheilt, dass, wenn man alle Belastungen und Reactionen zusammenfasst, dieselben (zufolge der Statik starrer Körper) eine verticale Resultirende und ein Kräftepaar geben, welches als Achse die horizontale Trägheitsachse des in Betracht zu ziehenden Querschnittes hat.

Die Verticalebene, welche durch die Achse des festen Körpers geht, nennt man *Biegungsebene*, die horizontale Trägheitsachse eines beliebigen Querschnittes *Biegungsachse*.

Bei allen den oben ausgesprochenen Bedingungen entsprechenden Trägern wird sich die Achse des Körpers immer nur in der Biegungsebene durchbiegen, und die Biegungsachse eines beliebigen Querschnittes wird auch nach der Deformation horizontal bleiben.

2. Der an einem Ende eingespannte Träger. — Derselbe werde durch folgende Kräfte beansprucht:

1. Seiner Länge nach durch Gewichte, welche nach einem beliebig continuirlichen oder discontinuirlichen Gesetze vertheilt sind;

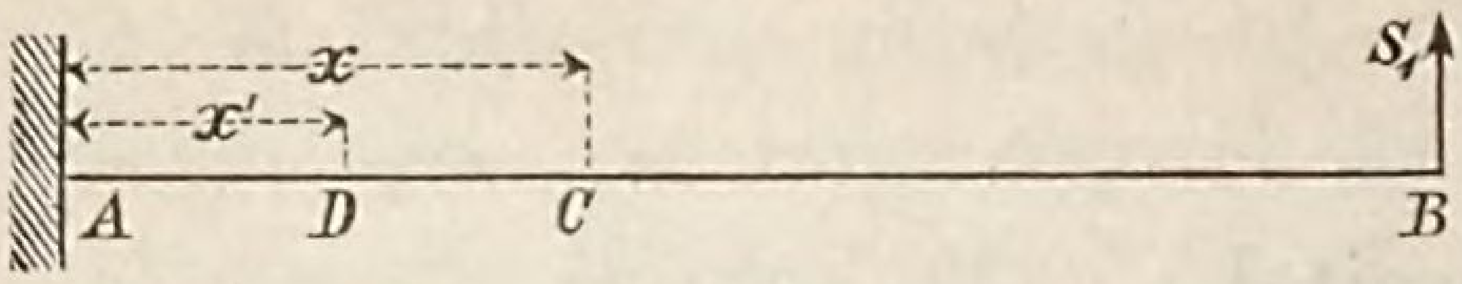


Fig. 23.

2. in dessen Grundfläche B durch Normalkräfte, welche nach einem linearen Gesetze vertheilt sind, und welche in Bezug auf den Mittelpunkt des Querschnittes eine Resultirende gleich Null und bezüglich dessen Biegungsachse ein Biegungsmoment M geben;

3. in derselben Grundfläche B durch verticale Tangentialkräfte, deren Richtung von unten nach oben geht und deren Summe S_1 ist.

Um die Gleichung der *elastischen Linie,* d. h. derjenigen Curve, welche von der Achse des festen Körpers nach der Deformation gebildet wird, sowie die Drehung des äussersten Querschnittes B zu bestimmen, nenne man l die Länge des Trägers und $\varphi\,(x')$ das Moment aller Gewichte, welche das Stück DB belasten, in Bezug auf den in der Entfernung x' vom Querschnitte A gelegenen Querschnitt D. Das Biegungsmoment und die Schubkraft bezüglich dieses Querschnittes werden dann offenbar durch die Formeln

$$\left.\begin{aligned} M &= M_1 - S_1\,(l - x') + \varphi\,(x'), \\ S &= S_1 + \varphi'\,(x') \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

ausgedrückt, wobei zu beachten ist, dass der Differentialquotient $\varphi'\,(x')$ eine continuirliche oder discontinuirliche Function ist, je nachdem dies bei der ursprünglichen Function $\varphi\,(x')$ der Fall war.

Diese beiden Formeln sind für alle Werthe von x' anwendbar; lässt man aber im Punkte C der Achse, in der Entfernung x von der Einmauerung eine neue Last $\overline{\omega}$ wirken, so werden offenbar für das Stück AC, d. h. zwischen $x' = 0$ und $x' = x$, das Biegungsmoment und die Schubkraft durch die Formeln

$$\begin{aligned} M &= M_1 - S_1\,(l - x') + \varphi\,(x') + \overline{\omega}\,(x - x'), \\ S &= S_1 + \varphi'\,(x') - \overline{\omega} \end{aligned}$$

ausgedrückt.

Die Deformationsarbeit des Trägers ist durch die Formel

$$\frac{1}{2}\int_0^l \frac{M^2}{EI}\,dx + \frac{1}{2}\int_0^l \frac{A\,S^2}{F\Omega}\,dx$$

gegeben, deren Differentialquotient nach $\overline{\omega}$ die Senkung des Angriffspunktes dieser Kraft gibt. Jedes dieser Integrale kann aber in zwei Theile zerlegt werden, deren einer zwischen 0 und x, deren anderer zwischen x und l genommen wird; letzterer enthält $\overline{\omega}$ nicht mehr und verschwindet daher, sobald man den Differentialquotienten nimmt. Wenn man η die Senkung (Durchbiegung) des Punktes C der Körperachse nennt, so erhält man hiefür

$$\eta = \int_0^x \frac{M}{EI} \frac{dM}{d\overline{\omega}} dx' + \int_0^x \frac{AS}{F\Omega} \frac{dS}{d\overline{\omega}} dx',$$

oder

$$\eta = \int_0^x \frac{M(x-x')}{EI} dx' - \int_0^x \frac{AS}{F\Omega} dx'$$

bei Berücksichtigung, dass

$$\frac{dM}{d\overline{\omega}} = x - x' \quad \text{und} \quad \frac{dS}{d\overline{\omega}} = -1.$$

Diese Formel muss für alle Werthe von $\overline{\omega}$ gelten, daher auch für $\overline{\omega} = 0$; in diesem Falle sind die Grössen M und S durch die Formeln (1) gegeben, so dass man durch Substitution derselben in den Ausdruck von η folgende Gleichung erhält:

$$\left.\begin{aligned} \eta = M_1 \int_0^x \frac{(x-x')\,dx'}{EI} - S_1 \int_0^x \frac{(l-x')(x-x')}{EI} dx' \\ + \int_0^x \frac{\varphi(x')(x-x')}{EI} dx' - S_1 \int_0^x \frac{A}{F\Omega} dx' - \int_0^x \frac{A\,\varphi'(x')}{F\Omega} dx', \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

welches die Gleichung der *elastischen Linie* ist.

Um die Drehung θ_1 des äussersten Querschnittes B zu erhalten, muss man den Differentialquotienten der Deformationsarbeit des Trägers in Bezug auf M_1 nehmen; diese Arbeit ist ausgedrückt durch

$$\frac{1}{2}\int_0^l \frac{M^2}{EI} dx' + \frac{1}{2}\int_0^l \frac{AS^2}{F\Omega} dx',$$

wobei M und S durch die Formeln (1) gegeben sind. Nachdem der zweite Ausdruck von M_1 unabhängig ist, wird derselbe verschwinden, sobald man den Differentialquotienten nach dieser Grösse nimmt, und man hat einfach

$$\theta_1 = \int_0^l \frac{M}{EI} \frac{dM}{dM_1} dx',$$

oder
$$\theta_1 = \int_0^l \frac{M}{EI}\, d\,x'.$$

Substituirt man für M dessen Werth und verwandelt x in x', so ergibt sich
$$\theta_1 = M_1 \int_0^l \frac{d\,x}{EI} - S_1 \int_0^l \frac{(l-x)\,d\,x}{EI} + \int_0^l \frac{\varphi(x)\,d\,x}{EI}. \tag{3}$$

In dem speciellen Falle, als der Träger an seinem Ende B durch das Gewicht P und seiner ganzen Länge nach durch ein gleichmässig vertheiltes Gewicht von p Kilogramm per Längeneinheit belastet wird, hat man bei Beachtung, dass sowohl die Normalkräfte als auch die Tangentialkräfte, welche auf die Grundfläche B wirken, gleich Null sind,
$$M_1 = 0, \qquad S_1 = 0,$$
$$\varphi(x') = P(l-x') + \frac{1}{2}p(l-x')^2, \qquad \varphi'(x') = -P - p(l-x'),$$
$$\varphi(x) = P(l-x) + \frac{1}{2}p(l-x)^2, \qquad \varphi'(x) = -P - p(l-x),$$
und folglich
$$\left.\begin{aligned} \eta &= P\int_0^x \frac{(l-x')(x-x')}{EI}\,d\,x' + \frac{p}{2}\int_0^x \frac{(l-x')^2(x-x')}{EI}\,d\,x' \\ &\quad + P\int_0^x \frac{A\,d\,x'}{F\Omega} + p\int_0^x \frac{A(l-x')}{F\Omega}\,d\,x', \\ \theta_1 &= P\int_0^l \frac{(l-x)\,d\,x}{EI} + \frac{p}{2}\int_0^l \frac{(l-x)^2\,d\,x}{EI}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Wenn der Träger homogen ist und einen constanten Querschnitt hat, so sind die Producte EI und $F\Omega$ auch constant und können ausserhalb des Integrationszeichens gesetzt werden, so dass
$$\eta = \frac{x^2}{EI}\left[P\left(\frac{l}{2} - \frac{x}{6}\right) + \frac{p}{2}\left(\frac{l^2}{2} - \frac{l\,x}{3} + \frac{x^2}{12}\right)\right] + \frac{A\,x}{F\Omega}\left[P + p\left(l - \frac{x}{2}\right)\right],$$
$$\theta_1 = \frac{l^2}{EI}\left(\frac{P}{2} + \frac{p\,l}{6}\right).$$

Um die Senkung f des einen Endes B des Trägers zu erhalten, muss man in dieser Formel $x = l$ machen, womit

$$f = \frac{l^3}{EI}\left(\frac{P}{3} + \frac{p\,l}{8}\right) + \frac{A\,l}{F\Omega}\left(P + \frac{p\,l}{2}\right). \tag{5}$$

Man kann nun leicht zeigen, dass in dieser Formel der Ausdruck, welcher der Transversalverschiebung entspricht, das ist der Ausdruck, welcher den Factor A enthält, sehr klein ist im Verhältnisse zu dem anderen Ausdrucke, welcher der Biegung entspricht, sobald nur die Querdimensionen des Trägers in Bezug auf dessen Länge sehr klein sind. Denkt man sich, dass der Querschnitt ein Rechteck mit der Breite b und der Höhe c sei, so hat man

$$\Omega = b\,c, \qquad I = \frac{1}{12}\,b\,c^3,$$

und man kann annehmen, dass

$$A = \frac{6}{5}$$

ist, vorausgesetzt, dass die Seite c gleich oder grösser als b ist.

Wenn der Körper ausserdem isotrop ist, so ergibt sich

$$F = \frac{2}{5}\,E,$$

und folglich resultirt aus Formel (5)

$$f = \frac{12\,l^3}{E\,b\,c^3}\left(\frac{P}{3} + \frac{p\,l}{8}\right) + \frac{3\,l}{E\,b\,c}\left(P + \frac{p\,l}{2}\right),$$

oder

$$f = \frac{12\,l^3}{E\,b\,c^3}\left[\left(\frac{P}{3} + \frac{p\,l}{8}\right) + \left(\frac{P}{4} + \frac{p\,l}{8}\right)\frac{c^2}{l^2}\right];$$

es wird also das zweite Glied in der Klammer, d. h. der Ausdruck, welcher von der Verschiebung herrührt, sehr klein werden im Verhältnisse zu dem ersten von der Biegung herstammenden, wenn die Querdimensionen des festen Körpers im Verhältnisse zu dessen Länge sehr klein sind, denn dann wird $\frac{c^2}{l^2}$ ein sehr kleiner Bruch.

3. Träger, welcher an einem Ende eingemauert ist und an dem anderen frei aufliegt. — Man denke sich den horizontalen Träger AB in A eingemauert und in B unterstützt, so dass das Ende B immer im gleichen Niveau mit A bleibt, wie auch der Träger belastet werde.

Unter der Voraussetzung, dass in dem Querschnitte B keine Kraft wirke, wird für diesen Querschnitt das Biegungsmoment gleich Null, und die Schubkraft gleich der Reaction R_1 des Stützpunktes B, welche vertical gedacht wird.

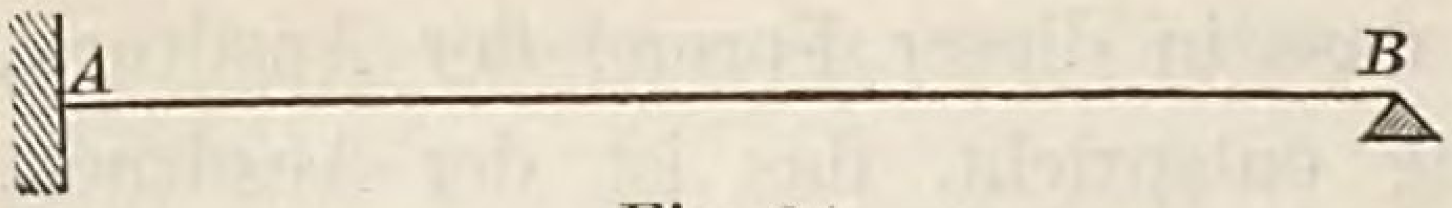


Fig. 24.

Den Stützpunkt am Ende B kann man sich entfernt denken, sobald man in diesem Punkte eine Kraft wirken lässt, welche von unten nach oben vertical gerichtet ist und welche gleich ist der Reaction R_1; oder, was dasselbe ist, sobald man auf den Querschnitt B Tangentialkräfte wirken lässt, deren Summe gleich R_1 ist. Man hat also wie in der vorhergehenden Nummer einen an einem Ende eingespannten Träger, welcher derartig beansprucht wird, dass die Senkung des einen Endes B gleich Null ist. Für diesen Träger wird die Senkung eines beliebigen Punktes der Achse und die Drehung der Fläche B durch die Gleichungen (2) und (3) der vorhergehenden Nummer ausgedrückt, indem man darin $M_1 = 0$ macht und S_1 in R_1 verwechselt; man hat also

$$\left.\begin{aligned} \eta &= -R_1\left[\int_0^x \frac{(l-x')(x-x')}{EI}\,dx' + \int_0^x \frac{A}{F\Omega}\,dx'\right] \\ &\quad + \int_0^x \frac{\varphi(x')(x-x')}{EI}\,dx' - \int_0^x \frac{A\,\varphi'(x')}{F\Omega}\,dx', \\ \theta_1 &= -R_1\int_0^l \frac{(l-x)\,dx}{EI} + \int_0^l \frac{\varphi(x)\,dx}{EI}. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

In diesen Gleichungen ist die Reaction R_1 unbekannt; da aber für $x = l$ $\eta = 0$ sein muss, so erhält man zur Bestimmung von R_1 die Gleichung

$$\left.\begin{aligned} &-R_1\left[\int_0^l \frac{(l-x')^2}{EI}\,dx' + \int_0^l \frac{A}{F\Omega}\,dx'\right] \\ &+ \int_0^l \frac{\varphi(x')(l-x')}{EI}\,dx' - \int_0^l \frac{A\,\varphi'(x')}{F\Omega}\,dx' = 0. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Wenn z. B. der Träger seiner ganzen Länge nach durch ein gleichmässig vertheiltes Gewicht belastet wird, und zwar von p Kilogramm per Längeneinheit, so hat man

$$\varphi(x') = \frac{p}{2}(l-x')^2, \qquad \varphi'(x') = -p\,(l-x')$$

und folglich

$$\left.\begin{array}{l} -R_1\left[\int_0^l \frac{(l-x')^2}{EI}\,dx'+\int_0^l \frac{A}{F\Omega}\,dx'\right] \\ +p\left[\frac{1}{2}\int_0^l \frac{(l-x')^3}{EI}\,dx'+\int_0^l \frac{A(l-x')}{F\Omega}\,dx'\right]=0. \end{array}\right\} \quad (8)$$

Ist ferner der Träger prismatisch und homogen, so sind die Grössen EI und $\frac{A}{F\Omega}$ constant, und es können die Integrationen ausgeführt werden, was nach Division durch l folgendes Resultat ergibt:

$$-R_1\left(\frac{l^2}{3EI}+\frac{A}{F\Omega}\right)+p\left(\frac{l^3}{8EI}+\frac{Al}{2F\Omega}\right)=0. \quad (9)$$

Wie in vorhergehender Nummer lässt sich auch hier zeigen, dass, wenn die Querdimensionen des Trägers im Verhältnisse zu dessen Länge sehr klein sind, jener Ausdruck in den Klammern, welcher den Factor A enthält, sehr klein ist im Verhältnisse zu dem anderen und daher vernachlässigt werden kann; man erhält sodann

$$R_1=\frac{3}{8}\,p\,l. \quad (10)$$

4. Träger, welcher an seinen beiden Enden eingemauert ist. — Man denke sich denselben vor der Belastung horizontal. Nach Einwirkung der Belastung existirt in jedem Querschnitte an der Einmauerung ein Biegungsmoment und eine Schubkraft; man kann sich den Träger an dem einen Ende B auch frei denken, vorausgesetzt, dass in dem Querschnitte der Einmauerung die effectiv stattfindenden Normal- und Tangentialkräfte wirken. Es sei nun M_1 das Moment dieser Normalkräfte in Bezug auf die Biegungsachse dieses Querschnittes und S_1 die Summe der von unten nach oben gerichteten Tangentialkräfte, so dass M_1 das Biegungsmoment und S_1 die Schubkraft für den Querschnitt B ist.

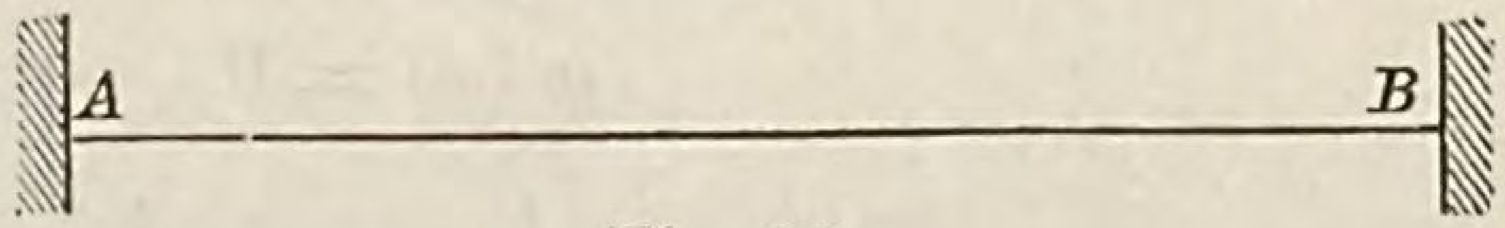


Fig. 25.

Man kommt also wieder auf das in Nummer 2 gelöste Problem zurück, nur mit dem Unterschiede, dass nunmehr das Biegungsmoment M_1, sowie die Schubkraft S_1 Unbekannte sind, welche durch die Bedingung zu bestimmen sind, dass die Senkung des rechten Endes der Körperachse Null ist, und dass die Drehung dieses Querschnittes ebenfalls Null ist.

Man muss demnach den durch die Gleichung (2) gegebenen Werth von η für $x = l$, und den durch die Gleichung (3) gegebenen Werth von θ_1 gleich Null machen, so dass man die beiden folgenden Gleichungen erhält:

$$\left.\begin{aligned} &M_1 \int_0^l \frac{(l-x')}{EI}\, d\,x' - S_1 \left[\int_0^l \frac{(l-x')^2}{EI}\, d\,x' + \int_0^l \frac{A}{F\Omega}\, d\,x'\right] \\ &\quad + \int_0^l \frac{\varphi(x')\,(l-x')}{EI}\, d\,x' - \int_0^l \frac{A\,\varphi'(x')}{F\Omega}\, d\,x' = 0, \\ &M_1 \int_0^l \frac{d\,x}{EI} - S_1 \int_0^l \frac{(l-x)}{EI}\, d\,x + \int_0^l \frac{\varphi(x)\, d\,x}{EI} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen bestimmt man den Werth der Unbekannten M_1 und S_1, und indem man diesen Werth in die Gleichung (2) einsetzt, erhält man die Gleichung der betreffenden elastischen Linie.

Wird z. B. angenommen, dass der Träger homogen ist und constante Querschnitte hat, und dass die Belastung desselben durch ein Gewicht P gebildet wird, und zwar in der Entfernung a von dem Ende A, so hat man zwischen $x = 0$ und $x = a$

$$\varphi(x) = P(a - x), \qquad \varphi'(x) = -P;$$

und zwischen $x = a$ und $x = l$

$$\varphi(x) = 0, \qquad \varphi'(x) = 0;$$

da ferner die Grössen $\dfrac{1}{EI}$ und $\dfrac{A}{F\Omega}$ constant sind, kann die Integration ausgeführt werden. Es gestalten sich sodann die Gleichungen (11) wie folgt:

$$M_1 \frac{l^2}{2EI} - S_1 \left(\frac{l^3}{3EI} + \frac{A\,l}{F\Omega}\right) + P\left[\frac{a^2(3\,l - a)}{6EI} + \frac{A\,a}{F\Omega}\right] = 0,$$

$$M_1 \frac{l}{EI} - S_1 \frac{l^2}{2EI} + P \frac{a^2}{2EI} = 0.$$

Aus diesen zwei Gleichungen erhält man

$$\left.\begin{aligned} &S_1 \left(\frac{l^3}{12EI} + \frac{A\,l}{F\Omega}\right) - P\left[\frac{a^2(3\,l - 2\,a)}{12EI} + \frac{A\,a}{F\Omega}\right] = 0, \\ &M_1 \left(\frac{l^2}{6EI} + \frac{2A}{F\Omega}\right) - \frac{P}{l}\left[\frac{a^2\, l\,(l-a)}{6EI} + \frac{A\,a\,(l-a)}{F\Omega}\right] = 0. \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Nachdem man auf diese Weise die Werthe der Unbekannten erhalten hat, kann man dieselben in die Gleichung (2) einführen, um die Gleichung der elastischen Linie zu erhalten. Diese Curve setzt sich aus zwei verschiedenen Theilen zusammen, und zwar der eine links, der andere rechts vom Angriffspunkt des Gewichtes P. Für diesen letzteren Theil, welcher sich zwischen $x = a$ und $x = l$ befindet, theile man die in der Gleichung (2) enthaltenen Integrale in zwei Theile, deren einer zwischen $x' = 0$ und $x' = a$

$$\varphi(x') = P(a - x'), \qquad \varphi'(x') = -P$$

und deren anderer zwischen $x' = a$ und $x' = x$

$$\varphi(x') = 0, \qquad \varphi'(x') = 0$$

ergibt; nach Durchführung der Integration erhält man sodann

$$\eta = M_1 \frac{x^2}{2EI} - S_1 \left[\frac{x^2(3l - x)}{6EI} + \frac{Ax}{F\Omega}\right] + P\left[\frac{a^2(3x - a)}{6EI} + \frac{Aa}{F\Omega}\right].$$

Wenn $a < \frac{l}{2}$ ist, wird diese Gleichung für $x = \frac{l}{2}$ stattfinden, und die Senkung f des mittleren Punktes der Achse wird sein

$$f = \frac{M_1 l^2}{8EI} - S_1 \left(\frac{5l^3}{48EI} + \frac{Al}{2F\Omega}\right) + P\left(\frac{a^2(3l - 2a)}{12EI} + \frac{Aa}{F\Omega}\right), \quad (13)$$

worin man die oben gefundenen Werthe für M_1 und S_1 einsetzen kann.

Nach dem, was am Ende der Nummer 2 bewiesen wurde, kann man, wenn die Querdimensionen des Trägers im Verhältnisse zu dessen Länge sehr klein sind, in jeder Klammer der Formeln (12) und (13) den Ausdruck, welcher von der Verschiebung herrührt, mit Bezug auf den von der Biegung herstammenden Ausdruck vernachlässigen, und erhält somit

$$\left.\begin{aligned} S_1 &= P\frac{a^2(3l - 2a)}{l^3}, \\ M_1 &= P\frac{a^2(l - a)}{l^2}, \\ f &= P\frac{a^2(3l - 4a)}{48EI}. \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

Wenn der Träger durch zwei Gewichte belastet wird, und zwar durch eines, P, in der Entfernung a vom linken Stützpunkte, und ein

zweites, ebenfalls P, in der gleichen Entfernung vom rechten Stützpunkte, so erhält man auf Grund der Summirung der Wirkungen

$$\left.\begin{aligned} S_1 &= P\frac{a^2(3l-2a)}{l^3}+P\frac{(l-a)^2(3l-2l+2a)}{l^3}=P,\\ M_1 &= P\frac{a^2(l-a)}{l^2}+P\frac{(l-a)^2\,a}{l^2}=P\frac{a(l-a)}{l},\\ f &= 2P\frac{a^2(3l-4a)}{48EI}=P\frac{a^2(3l-4a)}{24EI}. \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

Denkt man sich den Träger, welcher homogen ist und einen constanten Querschnitt hat, ausserdem noch durch ein gleichmässig über dessen ganze Länge vertheiltes Gewicht, und zwar von p Kilogramm per Längeneinheit belastet, so hat man in diesem Falle

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}p(l-x)^2, \qquad \varphi'(x)=-p(l-x);$$

durch Substitution in die Gleichungen (11) und Ausführung der Integrationen erhält man

$$M_1\frac{l^2}{2EI}-S_1\left(\frac{l^3}{3EI}+\frac{Al}{F\Omega}\right)+p\left(\frac{l^4}{8EI}+\frac{Al^2}{2F\Omega}\right)=0,$$

$$M_1\frac{l}{EI}-S_1\frac{l^2}{2EI}+\frac{pl^3}{6EI}=0,$$

woraus

$$S_1\left(\frac{l^3}{12EI}+\frac{Al}{F\Omega}\right)-p\left(\frac{l^4}{24EI}+\frac{Al^2}{2F\Omega}\right)=0,$$

$$M_1\left(\frac{l^2}{6EI}+\frac{2A}{F\Omega}\right)-p\left(\frac{l^4}{72EI}+\frac{Al^2}{6F\Omega}\right)=0,$$

oder

$$\left.\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2}pl,\\ M_1 &= \frac{1}{12}pl^2. \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

Um die Gleichung der elastischen Linie zu erhalten, hat man in die Gleichung (2) die Werthe

$$\varphi(x') = \frac{1}{2} p (l - x')^2, \qquad \varphi'(x') = - p (l - x')$$

zu substituiren; die Integration derselben ergibt sodann bei Berücksichtigung, dass die Grössen $\frac{1}{E I}$ und $\frac{A}{F \Omega}$ constant sind,

$$\eta = M_1 \frac{x^2}{2 E I} - S_1 \left[\frac{x^2 (3 l - x)}{6 E I} + \frac{A x}{F \Omega} \right]$$
$$+ p \left[\frac{x^2 (6 l^2 - 4 l x + x^2)}{24 E I} + \frac{A x (2 l - x)}{2 F \Omega} \right],$$

und somit, wenn man für M_1 und S_1 die soeben erhaltenen Werthe substituirt,

$$\eta = p \frac{l^2 x^2 - 2 l x^3 + x^4}{24 E I} + p \frac{A x (l - x)}{2 F \Omega}. \tag{17}$$

Die Senkung oder Durchbiegung f des Mittelpunktes der Trägerachse kann aus der letzten Formel abgeleitet werden, indem man $x = \frac{l}{2}$ macht; es ergibt sich sodann

$$f = \frac{p l^4}{384 E I} + \frac{A p l^2}{8 F \Omega}. \tag{18}$$

Denkt man sich schliesslich, dass der Träger durch zwei in der Entfernung a von beiden Enden wirkende Gewichte P und durch ein der ganzen Länge nach gleichmässig vertheiltes Gewicht belastet wird, so sind zufolge dem Principe der Summirung der Wirkungen die Werthe von S_1, M_1 und f die Summen derjenigen, welche man erhalten hätte, wenn in einem Falle die beiden Gewichte P und in dem anderen Falle das gleichmässig vertheilte Gewicht vorhanden gewesen wäre, d. h. man erhält, indem man gleichzeitig in der Formel (18) den von der transversalen Verschiebung herrührenden Ausdruck vernachlässigt, die Formeln

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= P + \frac{1}{2} p l \\ M_1 &= P \frac{a (l - a)}{l} + \frac{1}{12} p l^2 \\ f &= P \frac{a^2 (3 l - 4 a)}{24 E I} + \frac{p l^4}{384 E I} \end{aligned} \right\} \tag{19}$$

Diese Formeln sind zur Berechnung der Querträger oder der Constructionstheile eiserner Röhrenbrücken nothwendig.

5. Der an seinen Enden unterstützte Träger. — Es sei AB ein nach einem beliebig continuirlichen oder discontinuirlichen Gesetze belasteter Träger, welcher an seinen Enden beliebigen Bedingungen entspricht, d. h. einfach unterstützt, oder einerseits unterstützt, andererseits eingemauert oder beiderseits eingemauert, oder schliesslich über die Stützpunkte hinaus verlängert ist.



Fig. 26.

Denkt man sich den Träger längs zwei Querschnitten geschnitten, welche unendlich nahe an den Stützpunkten A und B, aber innerhalb derselben sind, d. h. der eine rechts von A, der andere links von B, so bleibt der Träger im Gleichgewichte, sobald man in diesen beiden Querschnitten äussere Kräfte wirken lässt, welche den effectiv stattfindenden elastischen Kräften gleich sind, so dass man das Elasticitätsgleichgewicht des Trägers untersuchen kann, indem man denselben als einen durch folgende Kräfte beanspruchten, freien, festen Körper betrachtet, und zwar:

1. durch Gewichte, welche nach einem beliebig continuirlichen oder discontinuirlichen Gesetze über den Träger vertheilt sind;

2. durch Kräfte, welche auf den linken Endquerschnitt in A wirken, und welche für diesen Querschnitt ein Biegungsmoment M_0, eine von unten nach oben gerichtete Schubkraft S_0 und eine Normalpressung gleich Null geben;

3. durch Kräfte, welche auf den rechten Endquerschnitt in B wirken, und welche für diesen Querschnitt ein Biegungsmoment M_1, eine von unten nach oben gerichtete Schubkraft S_1 und eine Normalpressung gleich Null geben.

Da offenbar die Normalpressung in allen Querschnitten des Trägers Null ist, hat man nur nöthig, das Biegungsmoment und die Schubkraft für einen beliebigen Querschnitt zu bestimmen.

Betrachtet man nun den Querschnitt C in der Entfernung x vom Ende A und nennt man

M das Biegungsmoment,

S die Schubkraft,

$\varphi(x)$ das Moment bezüglich dieses Querschnittes von allen auf das Stück $B\,C$ wirkenden Gewichten,

$\varphi'(x)$ den Differentialquotienten von $\varphi(x)$, d. h. die negativ genommene Summe all dieser Gewichte,

so findet man
$$\left.\begin{aligned} M &= M_1 - S_1(l-x) + \varphi(x), \\ S &= S_1 + \varphi'(x). \end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

Für einen beliebigen Querschnitt ist zu beachten, dass die Schubkraft im entgegengesetzten Sinne gerichtet ist, je nachdem man diesen Querschnitt als zu einem oder dem anderen der beiden Theile gehörend betrachtet; da aber vorausgesetzt wurde, dass die Kraft S_1 von unten nach oben gerichtet ist, und da $\varphi'(x)$ auch eine von unten nach oben gerichtete Verticalkraft ausdrückt, so muss offenbar $S_1 + \varphi'(x)$ die Schubkraft des Querschnittes C ausdrücken, und zwar indem man denselben als Ende des Stückes $A\,C$ betrachtet; wenn man hingegen die Schubkraft für den Querschnitt C, als Ende des Stückes $B\,C$ gedacht, ausdrücken wollte, so hätte man
$$-[S_1 + \varphi'(x)].$$

Für $x = 0$, d. i. für den Querschnitt in A, gibt die erste der Formeln (20) $M = M_0$ und die zweite $S = -S_0$, so dass
$$\begin{aligned} M_0 &= M_1 - S_1\,l + \varphi(0), \\ -S_0 &= S_1 + \varphi'(0), \end{aligned}$$
wobei zu beachten ist, dass das Symbol $\varphi'(0)$ die Summe aller Gewichte ausdrückt, durch welche der Träger belastet ist, und das Symbol $\varphi(0)$ die Summe der Momente dieser Gewichte in Bezug auf das Ende A.

Aus diesen zwei Gleichungen erhält man
$$\left.\begin{aligned} S_1 &= \frac{M_1 - M_0}{l} + \frac{\varphi(0)}{l}, \\ S_0 &= -\frac{M_1 - M_0}{l} - \frac{\varphi(0)}{l} - \varphi'(0). \end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

Nennt man für den oben betrachteten Querschnitt C

Ω die Fläche, I das Trägheitsmoment,

E den normalen Elasticitätscoëfficienten und F den tangentialen Elasticitätscoëfficienten, so wird die Deformationsarbeit des ganzen Trägers ausgedrückt werden durch die Formel

$$\frac{1}{2}\int_0^l \frac{M^2}{EI}\,d\,x + \frac{1}{2}\int_0^l \frac{A\,S^2}{F\,\Omega}\,d\,x,$$

deren Differentialquotient mit Bezug auf M_0 und M_1 die Drehungen θ_0 und θ_1 der Endflächen und deren Differentialquotient bezüglich eines beliebigen auf den Träger wirkenden Gewichtes die Senkung des Angriffspunktes dieses Gewichtes gibt. Diese Drehungen und Senkungen werden auf die Lage der Körperachse vor der Deformation bezogen, indem man die Mittelpunkte der Endflächen als Fixpunkte betrachtet; es müssen daher die Reactionen S_0 und S_1 als Functionen der anderen auf das System wirkenden Kräfte betrachtet werden, und zwar kann dies mit Hilfe der Gleichungen (21) geschehen.

Man hat also

$$\theta_1 = \int_0^l \frac{M}{EI}\,\frac{d\,M}{d\,M_1}\,d\,x + \int_0^l \frac{A\,S}{F\,\Omega}\cdot\frac{d\,S}{d\,M_1}\,d\,x,$$

$$\theta_0 = \int_0^l \frac{M}{EI}\,\frac{d\,M}{d\,M_0}\,d\,x + \int_0^l \frac{A\,S}{F\,\Omega}\cdot\frac{d\,S}{d\,M_0}\,d\,x;$$

substituirt man nun in die Formeln (20) jenen Werth von S_1, welcher durch die erste der Gleichungen (21) gegeben ist, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} M &= M_1\,\frac{x}{l} + M_0\,\frac{l-x}{l} - \varphi(0)\,\frac{l-x}{l} + \varphi(x),\\ S &= \frac{M_1 - M_0}{l} + \frac{\varphi(0)}{l} + \varphi'(x), \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

und folglich hat man

$$\frac{d\,M}{d\,M_1} = \frac{x}{l}, \qquad \frac{d\,M}{d\,M_0} = \frac{l-x}{l},$$

$$\frac{d\,S}{d\,M_1} = \frac{1}{l}, \qquad \frac{d\,S}{d\,M_0} = -\frac{1}{l}.$$

Für die Drehungen θ_0 und θ_1 erhält man sodann

$$\left.\begin{aligned} \theta_1 &= \frac{1}{l}\int_0^l \frac{M x}{EI}\,d\,x + \frac{1}{l}\int_0^l \frac{A\,S}{F\Omega}\,d\,x,\\ \theta_0 &= \frac{1}{l}\int_0^l \frac{M(l-x)}{EI}\,d\,x - \frac{1}{l}\int_0^l \frac{A\,S}{F\Omega}\,d\,x. \end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

Die Addition dieser zwei Gleichungen ergibt

$$\theta_1 + \theta_0 = \int_0^l \frac{M\,dx}{EI};$$

man kann daher für die zwei Gleichungen (23) die beiden folgenden substituiren:

$$\theta_1 = \frac{1}{l}\int_0^l \frac{Mx}{EI}\,dx + \frac{1}{l}\int_0^l \frac{AS}{F\Omega}\,dx,$$

$$\theta_0 = \int_0^l \frac{M\,dx}{EI} - \theta_1 .$$

Setzt man in diese Gleichungen für M dessen Werth (22) und für S den durch die zweite Gleichung (20) gegebenen Werth, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} \theta_1 = {} & \frac{M_0 - \varphi(0)}{l^2}\int_0^l \frac{(l-x)\,x}{EI}\,dx + \frac{M_1}{l^2}\int_0^l \frac{x^2}{EI}\,dx + \frac{1}{l}\int_0^l \frac{\varphi(x)\,x}{EI}\,dx \\ & + \frac{S_1}{l}\int_0^l \frac{A\,dx}{F\Omega} + \frac{1}{l}\int_0^l \frac{A\,\varphi'(x)}{F\Omega}\,dx, \\ \theta_0 = {} & -\theta_1 + \frac{M_0 - \varphi(0)}{l}\int_0^l \frac{(l-x)}{EI}\,dx + \frac{M_1}{l}\int_0^l \frac{x}{EI}\,dx + \int_0^l \frac{\varphi(x)}{EI}\,dx. \end{aligned}\right\} \quad (24)$$

In diesen letzten Gleichungen kann die Schubkraft S_1 auf Grund der ersten der Gleichungen (21) in einer Function von M_0 und M_1 ausgedrückt werden.

Bevor man daran geht, die Senkung eines in der Entfernung x vom Ende A befindlichen Punktes der Körperachse zu suchen, werde angenommen, dass in dem betreffenden Punkte ein Gewicht ϖ wirke.

Für einen beliebigen Querschnitt in der Entfernung x' vom Ende A wird das Biegungsmoment und die Schubkraft ausgedrückt durch die Formeln

$$M = M_1\,\frac{x'}{l} + M_0\,\frac{l - x'}{l} - \varphi(0)\,\frac{l - x'}{l} + \varphi(x'),$$

$$S = S_1 + \varphi'(x'),$$

worin die Functionen φ und φ' die oben angeführten Bedeutungen haben.

Da das Gewicht ϖ in die Functionen $\varphi(x')$, $\varphi'(x')$ eintritt, sobald $x' < x$ ist, sowie in die Functionen $\varphi(0)$, $\varphi'(0)$, so kann man dasselbe ersichtlich machen, indem man folgende Gleichungen aufstellt:

$$\varphi(x') = \psi(x') + \overline{\omega}(x - x'), \qquad \varphi'(x') = \psi'(x') - \overline{\omega},$$
$$\varphi(0) = \psi(0) + \overline{\omega}\, x, \qquad \varphi'(0) = \psi'(0) - \overline{\omega}.$$

Die beiden ersten Gleichungen dürfen nur für einen Werth von x' zwischen 0 und x angewendet werden, denn sobald x' zwischen x und l genommen wird, enthalten die Functionen $\varphi(x')$ und $\varphi'(x')$ nicht mehr die Kraft $\overline{\omega}$, und man hat

$$\varphi(x') = \psi(x'), \qquad \varphi'(x') = \psi'(x').$$

Es können also die Ausdrücke für M und S, welche oben gegeben wurden, auch in folgender Form aufgestellt werden:
für die Werthe von x' zwischen 0 und x

$$M = M_1 \frac{x'}{l} + M_0 \frac{l - x'}{l} - \psi(0) \frac{l - x'}{l} + \psi(x') - \overline{\omega} \frac{l - x}{l} x',$$
$$S = \frac{M_1 - M_0}{l} + \frac{\psi(0)}{l} + \psi'(x') - \overline{\omega} \frac{l - x}{l},$$

und für die Werthe von x' zwischen x und l

$$M = M_1 \frac{x'}{l} + M_0 \frac{l - x'}{l} - \psi(0) \frac{l - x'}{l} + \psi(x') - \overline{\omega} \frac{l - x'}{l} x,$$
$$S = \frac{M_1 - M_0}{l} + \frac{\psi(0)}{l} + \psi'(x') + \overline{\omega} \frac{x}{l},$$

so dass, wenn man für beliebige Werthe von x'

$$\mathfrak{M} = M_1 \frac{x'}{l} + M_0 \frac{l - x'}{l} - \psi(0) \frac{l - x'}{l} + \psi(x'),$$
$$\mathfrak{S} = \frac{M_1 - M_0}{l} + \frac{\psi(0)}{l} + \psi'(x')$$

setzt, man für x' zwischen 0 und x

$$M = \mathfrak{M} - \overline{\omega} \frac{l - x}{l} x'$$

$$S = \mathfrak{S} - \overline{\omega} \frac{l - x}{l}$$

erhält, und für x' zwischen x und l

$$M = \mathfrak{M} - \overline{\omega} \frac{l - x'}{l} x,$$

$$S = \mathcal{S} + \overline{\omega}\,\frac{x}{l}\,.$$

Die Deformationsarbeit des ganzen Körpers wird also durch nachfolgende Formel ausgedrückt:

$$\frac{1}{2}\int_0^x \frac{\left(\mathfrak{M} - \overline{\omega}\,\frac{l-x}{l}\,x'\right)^2}{EI}\,d\,x' + \frac{1}{2}\int_x^l \frac{\left(\mathfrak{M} - \overline{\omega}\,\frac{l-x'}{l}\,x\right)^2}{EI}\,d\,x'$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^x \frac{A\left(\mathcal{S} - \overline{\omega}\,\frac{l-x}{l}\right)^2}{F\Omega}\,d\,x' + \frac{1}{2}\int_x^l \frac{A\left(\mathcal{S} + \overline{\omega}\,\frac{x}{l}\right)^2}{F\Omega}\,d\,x';$$

der Differentialquotient derselben mit Bezug auf $\overline{\omega}$ gibt die Senkung η des Angriffspunktes dieses Gewichtes, d. h. es ist

$$\eta = -\frac{l-x}{l}\left\{\int_0^x \frac{\left(\mathfrak{M} - \overline{\omega}\,\frac{l-x}{l}\,x'\right)x'}{EI}\,d\,x' + \int_0^x \frac{A\left(\mathcal{S} - \overline{\omega}\,\frac{l-x}{l}\right)}{F\Omega}\,d\,x'\right\}$$
$$-\frac{x}{l}\left\{\int_x^l \frac{\left(\mathfrak{M} - \overline{\omega}\,\frac{l-x'}{l}\,x\right)(l-x')}{EI}\,d\,x' - \int_x^l \frac{A\left(\mathcal{S} + \overline{\omega}\,\frac{x}{l}\right)}{F\Omega}\,d\,x\right\},$$

oder

$$\left.\begin{aligned}\eta = &-\frac{l-x}{l}\left[\int_0^x \frac{M\,x'}{EI}\,d\,x' + \int_0^x \frac{A\,S}{F\Omega}\,d\,x'\right]\\ &-\frac{x}{l}\left[\int_x^l \frac{M(l-x')}{EI}\,d\,x' - \int_x^l \frac{A\,S}{F\Omega}\,d\,x'\right].\end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

Beachtet man, dass, wenn man die Integration von 0 bis l ausführt, das Binom in der zweiten Klammer gleich $l\,\theta_0$ wird — wie aus der zweiten Gleichung (23) ersehen werden kann — so folgt daraus, dass man für dieses Binom die Grösse

$$l\,\theta_0 - \left[\int_0^x \frac{M(l-x')}{EI}\,d\,x' - \int_0^x \frac{A\,S}{F\Omega}\,d\,x'\right]$$

setzen kann, womit der Ausdruck von η die folgende Form annimmt:

$$\eta = -\,\theta_0\,x + \left[\int_0^x \frac{M(x-x')}{EI}\,d\,x' - \int_0^x \frac{A\,S}{F\Omega}\,d\,x'\right]. \qquad (26)$$

Da die Kraft ϖ einen Werth haben kann, so klein, wie man will, ja selbst Null sein kann, so gibt offenbar die Gleichung (26) die Senkung eines beliebigen Punktes der Trägerachse.

Substituirt man nun für M dessen Werth (22), nachdem man x in x' verwandelt hat, und für S den durch die zweite der Gleichungen (20) gegebenen Werth nach Durchführung derselben Aenderung, so erhält man

$$\left.\begin{aligned}\eta = -\theta_0 x + \frac{M_0 - \varphi(0)}{l}\int_0^x \frac{(l-x')(x-x')}{EI}\,dx' + \frac{M_1}{l}\int_0^x \frac{x'(x-x')}{EI}\,dx' \\ + \int_0^x \frac{\varphi(x')(x-x')}{EI}\,dx' - S_1\int_0^x \frac{A}{F\Omega}\,dx' - \int_0^x \frac{A\varphi'(x')}{F\Omega}\,dx',\end{aligned}\right\} \quad (27)$$

welches die Gleichung der elastischen Linie ist.

Es ist wohl zu beachten, dass S_1 mit Hilfe der ersten der Gleichungen (21) in einer Function von M_0 und M_1 ausgedrückt werden kann.

6. Der an seinen Enden einfach unterstützte Träger, dessen Grundflächen keiner Normalkraft unterworfen sind. — Der in der letzten Nummer betrachtete Fall ist ein allgemeiner, so dass man aus demselben die Formeln für die in der Praxis am häufigsten vorkommenden Fälle ableiten kann. Ist nun der Träger an seinen Enden einfach unterstützt und wirkt keine Normalkraft auf dessen Endflächen, so hat man in den oben erhaltenen Formeln einfach

$$M_0 = 0 \quad \text{und} \quad M_1 = 0$$

zu machen; ist der Träger an dem linken Ende eingemauert und an dem rechten einfach unterstützt, so muss man

$$M_1 = 0$$

machen und bestimmt M_0 dadurch, dass man ausdrückt, dass θ_0 Null ist; ist endlich der Träger an seinen beiden Enden eingemauert, so bestimmt man M_0 und M_1 durch die Bedingung, dass θ_0 und θ_1 Null sein müssen.

Nachdem die beiden letzten Fälle in den vorhergehenden Nummern schon untersucht wurden, ist nur noch der erste Fall zu behandeln, d. h. derjenige, wo der Träger an seinen Enden einfach unterstützt ist.

In diesem Falle hat man $M_0 = 0$ und $M_1 = 0$; folglich wird aus den Formeln (21), (22), (24), (27)

$$\left.\begin{aligned}
S_1 &= \frac{\varphi(0)}{l},\\
S_0 &= -\frac{\varphi(0)}{l} - \varphi'(0),\\
M &= -\varphi(0)\frac{l-x}{l} + \varphi(x),\\
\theta_1 &= -\frac{\varphi(0)}{l^2}\left[\int_0^l \frac{(l-x)\,x}{EI}\,dx - \int_0^l \frac{A\,dx}{F\Omega}\right]\\
&\quad + \frac{1}{l}\left[\int_0^l \frac{\varphi(x)\,x}{EI}\,dx + \int_0^l \frac{A\,\varphi'(x)}{F\Omega}\,dx\right],\\
\theta_0 &= -\theta_1 - \frac{\varphi(0)}{l}\int_0^l \frac{l-x}{EI}\,dx + \int_0^l \frac{\varphi(x)}{EI}\,dx,\\
\eta &= -\theta_0 x - \frac{\varphi(0)}{l}\int_0^x \frac{(l-x')(x-x')}{EI}\,dx' + \int_0^x \frac{\varphi(x')(x-x')}{EI}\,dx'\\
&\quad - \frac{\varphi(0)}{l}\int_0^x \frac{A}{F\Omega}\,dx' - \int_0^x \frac{A\,\varphi'(x')}{F\Omega}\,dx'.
\end{aligned}\right\}\quad (28)$$

Diese Formeln kann man nun auf einige specielle Fälle anwenden.

I. Der Träger wird durch ein Gewicht P belastet, welches in der Entfernung a von dem linken Ende sich befindet.

Für die Werthe von x zwischen 0 und a hat man

$$\varphi(x) = P(a-x), \qquad \varphi'(x) = -P,$$

und folglich
$$\varphi(0) = Pa, \qquad \varphi'(0) = -P;$$

und für die Werthe von x zwischen a und l

$$\varphi(x) = 0, \qquad \varphi'(x) = 0.$$

Aus der ersten, zweiten, vierten und fünften der Gleichungen (28) ergibt sich daher

$$\left.\begin{aligned}
S_1 &= P\frac{a}{l},\\
S_0 &= P\frac{l-a}{l},\\
\theta_1 &= -\frac{Pa}{l^2}\left[\int_0^l \frac{(l-x)x}{EI}\,dx - \int_0^l \frac{A\,dx}{F\Omega}\right] + \frac{P}{l}\left[\int_0^a \frac{(a-x)x}{EI}\,dx - \int_0^a \frac{A\,dx}{F\Omega}\right],\\
\theta_0 &= -\theta_1 - \frac{Pa}{l}\int_0^l \frac{l-x}{EI}\,dx + P\int_0^a \frac{a-x}{EI}\,dx.
\end{aligned}\right\}\quad (29)$$

Die dritte und sechste sind verschieden, je nachdem man sie auf das bezüglich des Gewichtes P linke oder rechte Stück des Trägers anwendet; für das letztere, welches zwischen $x = a$ und $x = l$ liegt, ergeben dieselben

$$M = -Pa\frac{l-x}{l}, \tag{30}$$

$$\left.\begin{aligned}\eta = -\theta_0 x - \frac{Pa}{l}\int_0^x \frac{(l-x')(x-x')}{EI}dx' + P\int_0^a \frac{(a-x')(x-x')}{EI}dx' \\ -\frac{Pa}{l}\int_0^x \frac{A}{F\Omega}dx' + P\int_0^a \frac{A}{F\Omega}dx'.\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Wenn der Träger homogen und prismatisch ist, so sind die Grössen EI und $\frac{A}{F\Omega}$ constant, und man kann die Integration ausführen und erhält

$$\left.\begin{aligned}\theta_1 &= -\frac{Pa}{l}\frac{l^2-a^2}{6EI}, \\ \theta_0 &= -\frac{Pa}{l}\frac{(l-a)(2l-a)}{6EI}, \\ \eta &= -\theta_0 x - \frac{Pa}{l}\left[\frac{x^2(3l-x)}{6EI} + \frac{Ax}{F\Omega}\right] + P\left[\frac{a^2(3x-a)}{6EI} + \frac{Aa}{F\Omega}\right].\end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Unter der Voraussetzung, dass $a < \frac{l}{2}$ ist, kann der Ausdruck für η — zwischen $x = a$ und $x = l$ liegend — die Senkung oder Durchbiegung f des Trägermittelpunktes geben, sobald man $x' = \frac{l}{2}$ macht; man erhält somit

$$f = Pa\left[\frac{3l^2-4a^2}{48EI} + \frac{A}{2F\Omega}\right]. \tag{33}$$

II. Der Träger wird durch zwei Gewichte P in den Entfernungen a von den zwei Enden belastet.

Wenn der Träger durch zwei Gewichte P belastet wird, deren jedes in der Entfernung a von einem Ende wirkt, so müssen offenbar, zufolge dem Principe von der Summirung der Wirkungen, die Drehungen θ_0 und θ_1 der äussersten Querschnitte unter einander gleich sein und auch gleich sein der Summe der beiden Drehungen, welche schon oben für jenen Fall gefunden wurden, als der Körper nur durch ein Gewicht beansprucht

wurde. In gleicher Weise ist die Durchbiegung f des Trägermittelpunktes gleich der Summe der zwei Durchbiegungen, welche den zwei einzeln wirkenden Gewichten entsprechen, d. h. gleich der doppelten durch die Formel (33) gegebenen Durchbiegung. Man hat also in dem Falle der zwei Gewichte P die folgenden Formeln:

$$\left.\begin{aligned} \theta_0 = \theta_1 &= -\frac{P a (l-a)}{2 E I}, \\ f &= P a \left[\frac{3 l^2 - 4 a^2}{24 E I} + \frac{A}{F \Omega}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

III. Der Träger wird durch ein gleichmässig vertheiltes Gewicht belastet.

Nennt man das auf eine Längeneinheit des Trägers vertheilte Gewicht p, so hat man

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} p (l-x)^2, \qquad \varphi'(x) = -p(l-x),$$

und folglich

$$\varphi(0) = \frac{1}{2} p l^2, \qquad \varphi'(0) = -p l.$$

Wenn man ferner annimmt, dass der Träger symmetrisch ist, so sind die beiden Drehungen θ_0 und θ_1 der beiden Endflächen gleich, und man kann dieselben mit Hilfe der fünften Formel der Gruppe (28) bestimmen; diese Formeln ergeben für diesen Fall

$$\left.\begin{aligned} S_0 = S_1 &= \frac{1}{2} p l, \\ M &= -\frac{1}{2} p x (l-x), \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

$$\begin{aligned} \theta_0 = \theta_1 = \frac{\theta_0 + \theta_1}{2} &= -\frac{p}{4}\left[l \int_0^l \frac{l-x}{E I} d x - \int_0^l \frac{(l-x)^2}{E I} d x\right] \\ &= -\frac{p}{4} \int_0^l \frac{x(l-x)}{E I} d x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta = -\theta_0 x - \frac{p l}{2}\left[\int_0^x \frac{(l-x')(x-x')}{E I} d x' + \int_0^x \frac{A\, d x'}{F \Omega}\right] \\ + \frac{p}{2}\left[\int_0^x \frac{(l-x')^2 (x-x')}{E I} d x' + 2 \int_0^x \frac{A (l-x')}{F \Omega} d x'\right]. \end{aligned}$$

Da der Träger als zur Mitte symmetrisch angenommen wurde, hat die Grösse

$$\frac{x(l-x)}{EI}$$

für zwei Punkte, welche symmetrisch zur Mitte liegen, denselben Werth, d. h. man hat

$$\int_0^l \frac{x(l-x)}{EI} dx = 2\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{x(l-x')}{EI} dx.$$

In dem Ausdrucke für η kann man die ähnlichen Glieder vereinigen, so dass sich die beiden letzten Formeln in folgender Form darstellen lassen:

$$\theta_0 = \theta_1 = -\frac{p}{2}\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{x(l-x)}{EI} dx; \tag{36}$$

$$\eta = -\theta_0 x - \frac{p}{2}\int_0^x \frac{x'(l-x')(x-x')}{EI} dx' + \frac{p}{2}\int_0^x \frac{A(l-2x')}{F\Omega} dx'. \tag{37}$$

Will man die Durchbiegung des Trägermittelpunktes bestimmen, so muss man in der Formel (37) $x = \frac{l}{2}$ machen; verwechselt man x' mit x, substituirt man für θ_0 dessen Werth (36) und macht man schliesslich die nothwendigen Reductionen, so erhält man für die gesuchte Durchbiegung die Formel

$$f = \frac{p}{2}\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{x^2(l-x)}{EI} dx + \frac{p}{2}\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{A(l-2x)}{F\Omega} dx. \tag{38}$$

In der Praxis hat man diese Formel häufig auf Eisenbrücken mit geraden Trägern anzuwenden; aber in diesem Falle ist der Träger homogen und in mehrere Felder getheilt, wobei in jedem derselben das Trägheitsmoment, die Fläche und der Coëfficient A constant sind. In Folge dessen ist die Anwendung der Gleichung (38) sehr einfach. Bei Gitterträgern kommt es vor, dass die verschiedenen Felder, deren jedes ein constantes Trägheitsmoment hat, nicht solche sind, für welche das Verhältniss $\frac{A}{\Omega}$ constant ist; dies macht aber die Anwendung der Formel (38) nicht viel schwieriger.

Ist der Querschnitt des Trägers der ganzen Länge nach constant, so kann man die Integration ausführen und erhält

$$\left.\begin{aligned}\theta_0 = \theta_1 &= -\frac{p\,l^3}{24\,E\,I} \\ f &= \frac{5\,p\,l^4}{384\,E\,I} + \frac{A\,p\,l^2}{8\,F\,\Omega} = \frac{p\,l^2}{8}\left(\frac{5\,l^2}{48\,E\,I} + \frac{A}{F\Omega}\right).\end{aligned}\right\} \quad (39)$$

Wird der Träger gleichzeitig durch ein gleichmässig vertheiltes Gewicht und durch zwei Gewichte P belastet, so erhält man die Drehungen der Endflächen und die Durchbiegung des Mittelpunktes durch Vereinigung der durch die Formeln (39) und (34) gegebenen Resultate, so dass

$$\left.\begin{aligned}\theta_0 = \theta_1 &= -\frac{P\,a\,(l-a)}{2\,E\,I} - \frac{p\,l^3}{24\,E\,I}, \\ f &= P\,a\left(\frac{3\,l^2 - 4\,a^2}{24 E\,I} + \frac{A}{F\Omega}\right) + \frac{p\,l^2}{8}\left(\frac{5\,l^2}{48\,E\,I} + \frac{A}{F\Omega}\right).\end{aligned}\right\} \quad (40)$$

7. Mehrfach unterstützter Träger. — Derselbe werde in einer beliebigen Weise belastet. Jedes Stück des Trägers zwischen zwei auf einander folgenden Stützpunkten kann offenbar als ein isolirter Träger betrachtet werden, welcher an seinen Enden unterstützt, durch Gewichte belastet wird, und dessen Endflächen durch Normalkräfte beansprucht werden, welche die in den mit den Stützpunkten des continuirlichen Trägers correspondirenden Querschnitten effectiv stattfindenden Biegungsmomente geben.

Die Formeln (21), (22), (24), (27) aus Nummer 5 lassen erkennen, dass, wenn man für einen an seinen Enden unterstützten Träger die Gewichte, durch welche derselbe belastet wird, und ferner die Biegungsmomente in den Endflächen kennt, man die Biegungsmomente und die Schubkraft in einem beliebigen Querschnitte, sowie die Drehung der Endflächen und die Gleichung der elastischen Linie erhalten kann.

Zur Bestimmung der Bedingungen des Elasticitätsgewichtes eines continuirlichen Trägers genügt es also, wenn man das Biegungsmoment für alle mit den Stützpunkten correspondirenden Querschnitte bestimmt.

Dies muss auch in dem gegenwärtigen Falle geschehen, und kann man zur Vereinfachung das zwischen zwei auf einander folgenden Stützpunkten gelegene Stück des Trägers *„Fach“* nennen.

Um den allgemeinsten Fall zu behandeln, denke man sich, dass unter der Einwirkung des von dem Träger herrührenden Druckes die

Stützpunkte sich senken; oder was dasselbe ist, dass diese Stützpunkte nicht genau in derselben Horizontalen liegen.

Dies vorausgeschickt, seien A, B, C drei auf einander folgende Stützpunkte, welche zuerst in derselben Horizontalen gelegen sind, und α, β, γ

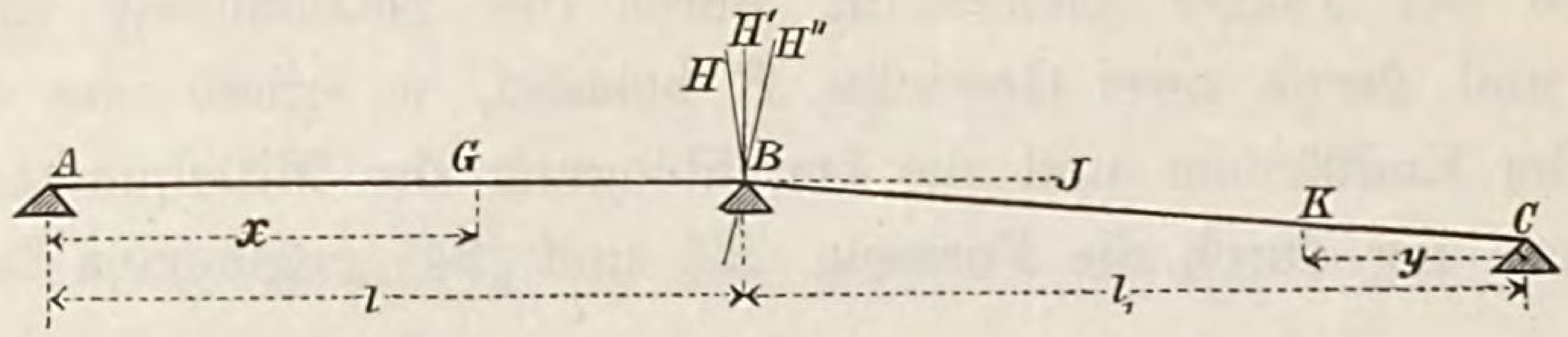


Fig. 27.

die unendlich kleinen Senkungen dieser Punkte gegenüber ihrer ursprünglichen Lage.

Die Winkel, welche die Geraden AB und BC nach der Deformation mit der Horizontalen machen, sind

$$\frac{\beta-\alpha}{l} \quad \text{und} \quad \frac{\gamma-\beta}{l'},$$

und folglich ist der Winkel IBC, d. h. der Winkel zwischen der Geraden BC und der verlängerten Geraden AB gleich

$$\frac{\gamma-\beta}{l'}-\frac{\beta-\alpha}{l}.$$

Die schliessliche Lage des Querschnittes, welcher zuerst vertical war, und welcher mit dem Stützpunkt B correspondirt, sei BH. Nennt man nach dem oben Gesagten M_0, M_1, M_2 die Biegungsmomente für die den Stützpunkten entsprechenden Querschnitte, so kann man das Fach AB als einen isolirten Träger betrachten, welcher an seinen Enden unterstützt ist, welcher durch Gewichte belastet wird, dessen Endflächen durch Normalkräfte beansprucht werden, welche die Biegungsmomente M_0 und M_1 geben, und dessen Querschnitt in B vor der Deformation nach der Geraden BH' normal zur Achse AB gerichtet war. Desgleichen kann man das Fach BC als einen isolirten Träger mit denselben äusseren Bedingungen ansehen, dessen Endflächen aber durch Normalkräfte beansprucht werden, welche die Biegungsmomente M_1 und M_2 geben, und dessen Querschnitt in B vor der Deformation nach der Geraden BH'' normal zur Geraden BC gerichtet war.

Man sieht aus Figur 27, dass zwischen den drei Winkeln HBH', HBH'' und $H'BH''$ folgende Relation besteht:

$$H'BH'' = HBH'' - HBH';$$

da der Winkel $H'BH''$ gleich ist mit dem Winkel IBC, folgt daraus, dass

$$\frac{\gamma - \beta}{l'} - \frac{\beta - \alpha}{l} = HBH'' - HBH'.$$

Nennt man L die Deformationsarbeit des Faches AB, und zwar in einer Function der Biegungsmomente M_0 und M_1, und L' diejenige des Faches BC in einer Function von M_1 und M_2, so hat man zufolge dem Lehrsatze von den Differentialquotienten der Arbeit

$$HBH' = -\frac{dL}{dM_1},$$

$$HBH'' = \frac{dL'}{dM_1},$$

wobei in dem ersten Ausdrucke das negative Zeichen deshalb gesetzt wurde, weil die Drehung, in Folge welcher die Fläche BH' in diejenige BH übergeht, entgegengesetzt zu derjenigen stattfindet, welche dem Biegungsmomente M_1 zu Grunde gelegt wird, und zwar letzteres als am Ende des Faches AB wirkend angesehen. Durch Substitution in obige Gleichung erhält man

$$\frac{\gamma - \beta}{l'} - \frac{\beta - \alpha}{l} = \frac{dL}{dM_1} + \frac{dL'}{dM_1}. \tag{41}$$

Betrachtet man nun in dem Fache AB einen Querschnitt G in der Entfernung x vom Ende A und nennt man $\varphi'(x)$ alle jene Gewichte, welche das Stück GB belasten, und $\varphi(x)$ die Summe der Momente dieser Gewichte in Bezug auf den Querschnitt G, so werden zufolge der Formeln (22) der Nummer 5 das Biegungsmoment und die Schubkraft für den Querschnitt G durch die Formeln

$$\left.\begin{aligned} M &= M_0 \frac{l - x}{l} + M_1 \frac{x}{l} - \varphi(0) \frac{l - x}{l} + \varphi(x), \\ S &= \frac{M_1 - M_0}{l} + \frac{\varphi(0)}{l} + \varphi'(x). \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

ausgedrückt werden.

Die Deformationsarbeit L für das Fach AB ist durch folgende Formel gegeben:

$$L = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M^2}{EI}\,dx + \frac{1}{2}\int_0^l \frac{AS^2}{F\Omega}\,dx,$$

woraus folgt, dass

$$\frac{dL}{dM_1} = \frac{1}{l}\left[\int_0^l \frac{Mx}{EI}\,dx + \int_0^l \frac{AS}{F\Omega}\,dx\right].$$

Betrachtet man desgleichen in dem Fache BC einen Querschnitt K in der Entfernung y vom Stützpunkt C und nennt man $\psi'(y)$ die Summe aller auf das Stück BK vertheilten Gewichte und $\psi(y)$ deren Momentensumme in Bezug auf den Querschnitt K, so erhält man als Ausdruck für das Biegungsmoment und die Schubkraft in diesem Querschnitte die Formeln

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{M} &= M_2\frac{l_1 - y}{l_1} + M_1\frac{y}{l_1} - \psi(0)\frac{l_1 - y}{l_1} + \psi(y), \\ \mathfrak{S} &= \frac{M_1 - M_2}{l_1} + \frac{\psi(0)}{l_1} + \psi'(y). \end{aligned}\right\} \quad (43)$$

Die Deformationsarbeit des Stückes BC wird ausgedrückt durch die Formel

$$L_1 = \frac{1}{2}\int_0^{l_1} \frac{\mathfrak{M}^2}{EI}\,dy + \frac{1}{2}\int_0^{l_1} \frac{A\mathfrak{S}^2}{F\Omega}\,dy;$$

folglich hat man

$$\frac{dL_1}{dM_1} = \frac{1}{l_1}\left[\int_0^{l_1} \frac{\mathfrak{M}y}{EI}\,dy + \int_0^{l_1} \frac{A\mathfrak{S}}{F\Omega}\,dy\right].$$

Die Substitution in Gleichung (41) ergibt

$$\left.\begin{aligned} \frac{\gamma - \beta}{l'} - \frac{\beta - \alpha}{l} = \frac{1}{l}&\left[\int_0^l \frac{Mx}{EI}\,dx + \int_0^l \frac{AS}{F\Omega}\,dx\right] \\ + \frac{1}{l_1}&\left[\int_0^{l_1} \frac{\mathfrak{M}y}{EI}\,dy + \int_0^{l_1} \frac{A\mathfrak{S}}{F\Omega}\,dy\right]. \end{aligned}\right\} \quad (44)$$

Diese Gleichung zwischen den drei Biegungsmomenten M_0, M_1, M_2 kann leicht entwickelt werden, indem man für M, S, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{S}$ jene Werthe einsetzt, welche durch die Gleichungen (42) und (43) gegeben sind.

Dies ist die Verallgemeinerung der bekannten Gleichung von Clapeyron.

Ist der Träger in $n + 1$ Punkten unterstützt, so hat derselbe n Fächer oder Joche. Ist der Träger an seinen Enden einfach unterstützt, d. h. sind die Biegungsmomente in den äussersten Stützpunkten Null, so hat man nur die Biegungsmomente für die $n - 1$ zwischenliegenden Stützpunkte zu bestimmen und daher nur $n - 1$ Unbekannte.

Wendet man die Gleichung (44) zuerst auf das erste und zweite Fach von links an, sodann auf das zweite und dritte etc., so erhält man genau $n - 1$ Gleichungen, deren jede drei Biegungsmomente enthält, d. h. drei Unbekannte, mit Ausnahme der ersten und letzten Gleichung, welche nur zwei Unbekannte hat, denn in den Endflächen sind die Momente gleich Null.

Wenn der Träger an seinen Enden eingemauert ist, so sind die Biegungsmomente in den Endflächen nicht mehr gleich Null, und man hat dann $n + 1$ Unbekannte in den $n - 1$ durch Anwendung der Formel (44) erhaltenen Gleichungen. Diese Gruppe von Gleichungen genügt also nicht für die Bestimmung aller Unbekannten, und man muss dieselben dadurch ergänzen, dass man die Bedingung des Verticalbleibens der Endflächen ausdrückt.

Die Drehung der Fläche A des Faches AB wird ausgedrückt durch die Formel

$$\theta_0 = \frac{dL}{dM_0} = \frac{1}{l}\left[\int_0^l \frac{M(l-x)}{EI}\,dx - \int_0^l \frac{AS}{F\Omega}\,dx\right], \tag{45}$$

und die Drehung der Fläche C des Faches BC durch

$$\theta_2 = \frac{dL}{dM_2} = \frac{1}{l_1}\left[\int_0^{l_1} \frac{\mathfrak{M}(l_1-y)}{EI}\,dy - \int_0^{l_1} \frac{A\mathfrak{S}}{F\Omega}\,dy\right]; \tag{46}$$

da aber die Achse des Faches AB gegen die Horizontale um den Winkel

$$\frac{\beta - \alpha}{l}$$

geneigt ist, und die Achse des Faches BC desgleichen um den Winkel

$$\frac{\gamma - \beta}{l_1},$$

so muss, damit die Flächen A und C vertical bleiben,

$$\frac{\beta - \alpha}{l} - \theta_0 = 0, \qquad \frac{\gamma - \beta}{l_1} + \theta_2 = 0 \quad \text{sein.}$$

Substituirt man für θ_0 und θ_2 deren Werthe (45) und (46), nachdem man die erste Gleichung mit l, die zweite mit l_1 multiplicirt hat, so erhält man

$$\beta-\alpha=\int_0^l \frac{M(l-x)}{EI}\,dx-\int_0^l \frac{A\,S}{F\Omega}\,dx, \tag{47}$$

$$\gamma-\beta=-\int_0^{l_1} \frac{\mathfrak{M}(l_1-y)}{EI}\,dy+\int_0^{l_1} \frac{A\,\mathfrak{S}}{F\Omega}\,dy. \tag{48}$$

Durch Anwendung der Formel (47) für das äusserste linke Fach und der Formel (48) für das äusserste rechte Fach erhält man die zwei zur Bestimmung aller Biegungsmomente noch nöthigen Gleichungen.

In der Praxis ist der am häufigsten vorkommende Fall eines mehrfach unterstützten Trägers jener der eisernen Brücken mit geraden Trägern; hiebei sind die Enden nie eingemauert und die Senkungen der Stützpunkte, d. h. der Pfeiler oder Widerlager sind Null oder unbedeutend, so dass man nur die Formel (44) anzuwenden hat, indem man hierin $\alpha=0$, $\beta=0$, $\gamma=0$ setzt, was dieselbe auf folgende Form reducirt:

$$\frac{1}{l}\left[\int_0^l \frac{Mx}{EI}\,dx+\int_0^l \frac{A\,S}{F\Omega}\,dx\right]+\frac{1}{l_1}\left[\int_0^{l_1} \frac{\mathfrak{M}\,y}{EI}\,dy+\int_0^{l_1} \frac{A\,\mathfrak{S}}{F\Omega}\,dy\right]=0.$$

Substituirt man in dieser Gleichung für M, S, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{S}$ die durch die Formeln (42) und (43) gegebenen Ausdrücke, so erhält man eine Gleichung zwischen den drei Momenten M_0, M_1, M_2; setzt man nun zur Abkürzung

$$\left.\begin{array}{ll}
\frac{1}{l^2}\left(\int_0^l \frac{(l-x)x}{EI}\,dx-\int_0^l \frac{A\,dx}{F\Omega}\right)=B, & \frac{1}{l_1^2}\left(\int_0^{l_1} \frac{(l_1-y)y}{EI}\,dy-\int_0^{l_1} \frac{A\,dy}{F\Omega}\right)=B_1, \\
\frac{1}{l^2}\left(\int_0^l \frac{x^2}{EI}\,dx+\int_0^l \frac{A\,dx}{F\Omega}\right)=C, & \frac{1}{l_1^2}\left(\int_0^{l_1} \frac{y^2}{EI}\,dy+\int_0^{l_1} \frac{A\,dy}{F\Omega}\right)=C_1, \\
\frac{1}{l}\left(\int_0^l \frac{\varphi(x)\,x}{EI}\,dx+\int_0^l \frac{A\varphi'(x)}{F\Omega}\,dx\right)=D, & \frac{1}{l}\left(\int_0^{l_1} \frac{\psi(y)\,y}{EI}\,dy+\int_0^{l_1} \frac{A\psi'(y)}{F\Omega}\,dy\right)=D_1,
\end{array}\right\} \tag{49}$$

so ergibt diese Gleichung

$$M_0 B+M_1(C+C_1)+M_2 B_1=\varphi(0)B-D+\psi(0)B_1-D_1. \tag{50}$$

Es ist wichtig zu beachten, dass die Grössen B, C, B_1, C_1 unabhängig sind von den Gewichten, welche den Träger belasten, so zwar,

dass man bei Untersuchung verschiedener Fälle der Belastung eines gegebenen Trägers diese Coëfficienten nur einmal zu berechnen hat. Die Coëfficienten D und D_1 sind hingegen von diesen Gewichten abhängig und müssen für jeden Fall besonders berechnet werden.

Im Allgemeinen bleibt bei den Hauptträgern der eisernen Brücken das Trägheitsmoment in einem Stücke constant, ändert sich dann plötzlich und bleibt für das folgende Stück wieder constant u. s. w.; dasselbe gilt für die Grösse $\frac{A}{\Omega}$; nur sind in dem Falle, als der Träger ein Gitterträger ist, die Querschnitte, in welchen die Aenderung des Trägheitsmomentes stattfindet, nicht diejenigen, in welchen sich die Grösse $\frac{A}{\Omega}$ ändert. Für die gewöhnlichen Fälle der Praxis sind also die Coëfficienten B, C, D, B_1, C_1, D_1 sehr leicht zu berechnen.

Für die Untersuchung einiger speciellen Fälle der Belastung eines in mehreren Punkten unterstützten Trägers werde angenommen, dass derselbe homogen sei und überall denselben Querschnitt habe.

Die Grössen $E\,I$ und $\frac{A}{F\Omega}$ sind dann constant, so dass sich die Integrationen leicht ausführen lassen, und man erhält:

$$\left.\begin{aligned} B &= \frac{1}{l}\left(\frac{l^2}{6\,E\,I} - \frac{A}{F\Omega}\right), & B_1 &= \frac{1}{l_1}\left(\frac{l^2_1}{6\,E\,I} - \frac{A}{F\Omega}\right), \\ C &= \frac{1}{l}\left(\frac{l^2}{3\,E\,I} + \frac{A}{F\Omega}\right), & C_1 &= \frac{1}{l_1}\left(\frac{l^2_1}{3\,E\,I} + \frac{A}{F\Omega}\right); \end{aligned}\right\} \quad (51)$$

$$D = \frac{1}{l}\left[\frac{1}{EI}\int_0^l \varphi(x)\,x\,d\,x + \frac{A}{F\Omega}\int_0^l \varphi'(x)\,d\,x\right];$$

$$D_1 = \frac{1}{l_1}\left[\frac{1}{EI}\int_0^{l_1} \psi(y)\,y\,d\,y + \frac{A}{F\Omega}\int_0^{l_1} \psi'(y)\,d\,y\right].$$

Man hat auch

$$\int_0^l \varphi'(x)\,d\,x = \varphi(l) - \varphi(0), \qquad \int_0^{l_1} \psi'(y)\,d\,y = \psi(l_1) - \psi(0);$$

da $\varphi(l) = 0$ und $\psi(l_1) = 0$ ist, ergibt sich daraus, dass

$$\int_0^l \varphi'(x)\,d\,x = -\,\varphi\,(0), \qquad \int_0^{l_1} \psi'(y)\,d\,y = -\,\psi\,(0),$$

$$D = \frac{1}{l}\left[\frac{1}{EI}\int_0^l \varphi(x)\,x\,dx - \frac{A\,\varphi\,(0)}{F\,\Omega}\right], \quad D_1 = \frac{1}{l_1}\left[\frac{1}{EI}\int_0^{l_1} \psi(y)\,y\,dy - \frac{A\,\psi\,(0)}{F\,\Omega}\right],$$

und folglich

$$\left.\begin{aligned} \varphi\,(0)\,B - D &= \frac{1}{l\,E\,I}\left[\frac{l^2}{6}\,\varphi\,(0) - \int_0^l \varphi\,(x)\,x\,d\,x\right], \\ \psi\,(0)\cdot B_1 - D_1 &= \frac{1}{l_1 E\,I}\left[\frac{l^2_1}{6}\,\psi\,(0) - \int_0^{l_1} \psi\,(y)\,y\,d\,y\right]. \end{aligned}\right\} \qquad (52)$$

Wird z. B. das Fach $A\,B$ durch ein Gewicht P in den Entfernungen a und b von den Stützpunkten A und B, das Fach $B\,C$ hingegen durch ein

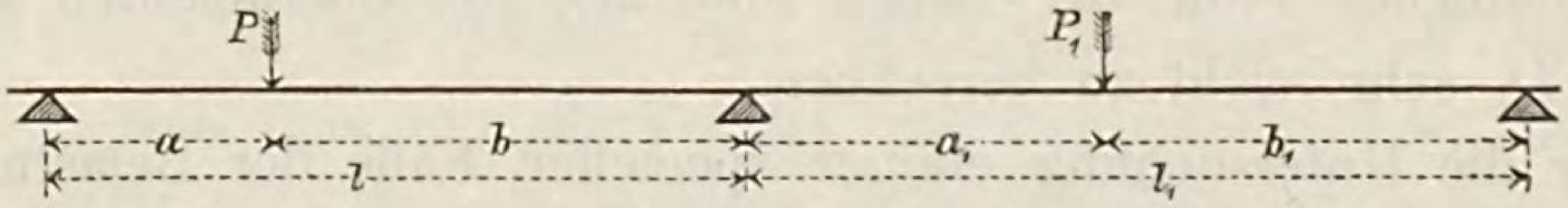


Fig. 28.

Gewicht P_1 in den Entfernungen a_1 und b_1 von den Stützpunkten B und C belastet, so hat man für das Fach $A\,B$ zwischen $x = 0$ und $x = a$

$$\varphi\,(x) = P\,(a - x),$$

und folglich $\qquad \varphi\,(0) = P\,a;$

zwischen $x = a$ und $x = l \qquad \varphi\,(x) = 0;$
es resultirt daher

$$\int_0^l \varphi\,(x)\,x\,d\,x = P\int_0^a (a - x)\,x\,d\,x = \frac{P\,a^3}{6},$$

und folglich

$$\varphi\,(0)\,B - D = \frac{1}{l}\,\frac{P\,a\,(l^2 - a^2)}{6\,E\,I}.$$

In gleicher Weise erhält man

$$\psi\,(0)\,B_1 - D_1 = \frac{1}{l_1}\,\frac{P_1\,b_1\,(l^2_1 - b^2_1)}{6\,E\,I},$$

womit dann die Gleichung (50) sich folgendermassen darstellt:

$$\left.\begin{array}{c}\frac{M_0}{l}\left(\frac{l^2}{6EI}-\frac{A}{F\Omega}\right)+M_1\frac{l+l_1}{l\,l_1}\left(\frac{l\,l_1}{3EI}+\frac{A}{F\Omega}\right)+\frac{M_2}{l_1}\left(\frac{l^2_1}{6EI}-\frac{A}{F\Omega}\right)\\ =\frac{P\,a\,(l^2-a^2)}{6\,l\,E\,I}+\frac{P_1\,b_1\,(l^2_1-b^2_1)}{6\,l_1\,E\,I}.\end{array}\right\}\quad(53)$$

Wenn man linksseitig die aus den tangentialen Elasticitätskräften hervorgegangenen Ausdrücke, d. h. die den Factor $\frac{A}{F\Omega}$ enthaltenden Ausdrücke vernachlässigt, so vereinfacht sich die Gleichung bedeutend und ergibt nach Multiplication mit $6\,EI$

$$M_0\,l+2\,M_1\,(l+l_1)+M_2\,l_1=\frac{P\,a\,(l^2-a^2)}{l}+\frac{P_1\,b_1\,(l^2_1-b^2_1)}{l_1}.\quad(54)$$

Wirken auf die beiden Fächer $A\,B$ und $B\,C$ gleichmässig vertheilte Gewichte, und zwar mit p Kilogramm per Längeneinheit auf das erste Fach und mit p_1 Kilogramm auf das zweite Fach, so hat man

$$\varphi\,(x)=\frac{1}{2}\,p\,(l-x)^2,\qquad \psi\,(y)=\frac{1}{2}\,p_1\,(l_1-y)^2,$$

$$\varphi\,(0)=\frac{1}{2}\,p\,l^2\qquad \psi\,(0)=\frac{1}{2}\,p_1\,l^2_1,$$

und folglich

$$\int_0^l\varphi\,(x)\,x\,d\,x=\frac{1}{2}\,p\int_0^l(l-x)^2\,x\,d\,x=\frac{1}{24}\,p\,l^4,$$

$$\int_0^{l_1}\psi\,(y)\,y\,d\,y=\frac{1}{2}\,p_1\int_0^{l_1}(l_1-y)^2\,y\,d\,y=\frac{1}{24}\,p_1\,l^4_1;$$

$$\varphi\,(0)\,B-D=\frac{1}{24}\frac{p\,l^3}{E\,I},\qquad \psi\,(0)\,B_1-D_1=\frac{1}{24}\frac{p_1\,l^3_1}{E\,I}.$$

Substituirt man diese Werthe und die Werthe (51) in die Gleichung (50), so ergibt letztere

$$\frac{M_0}{l}\left(\frac{l^2}{6EI}-\frac{A}{F\Omega}\right)+M_1\frac{l+l_1}{l\,l_1}\left(\frac{l\,l_1}{3EI}+\frac{A}{F\Omega}\right)+\frac{M_2}{l_1}\left(\frac{l^2_1}{6EI}-\frac{A}{F\Omega}\right)=\frac{1}{24}\frac{p\,l^3+p_1\,l^3_1}{EI};\quad(55)$$

vernachlässigt man ferner auf der linken Seite der Gleichung die den Factor $\frac{A}{F\Omega}$ enthaltenden Ausdrücke, welche im Allgemeinen im Verhält-

nisse zu den anderen sehr klein sind, so vereinfacht sich die Gleichung noch mehr, und man findet nach Multiplication mit $6\,EI$

$$M_0\,l + 2\,M_1\,(l + l_1) + M_2\,l_1 = \frac{p\,l^3 + p_1\,l^3_1}{4}. \tag{56}$$

Dies ist die sehr wichtige, von Clapeyron gegebene Gleichung, welche in der Praxis gewöhnlich die Berechnung der eisernen Brücken mit continuirlichen Trägern ermöglicht.

8. Praktische Berechnung eiserner Brücken mit einem Fache. — Diagramme der Biegungsmomente und der Schubkräfte, wenn eine gleichmässig vertheilte Belastung angenommen wird. — Für die Berechnung eiserner Brücken mit nur einem Fache (einer Oeffnung) wird im Allgemeinen eine auf einen kleineren oder grösseren Theil der Brücke gleichmässig vertheilte Belastung angenommen.

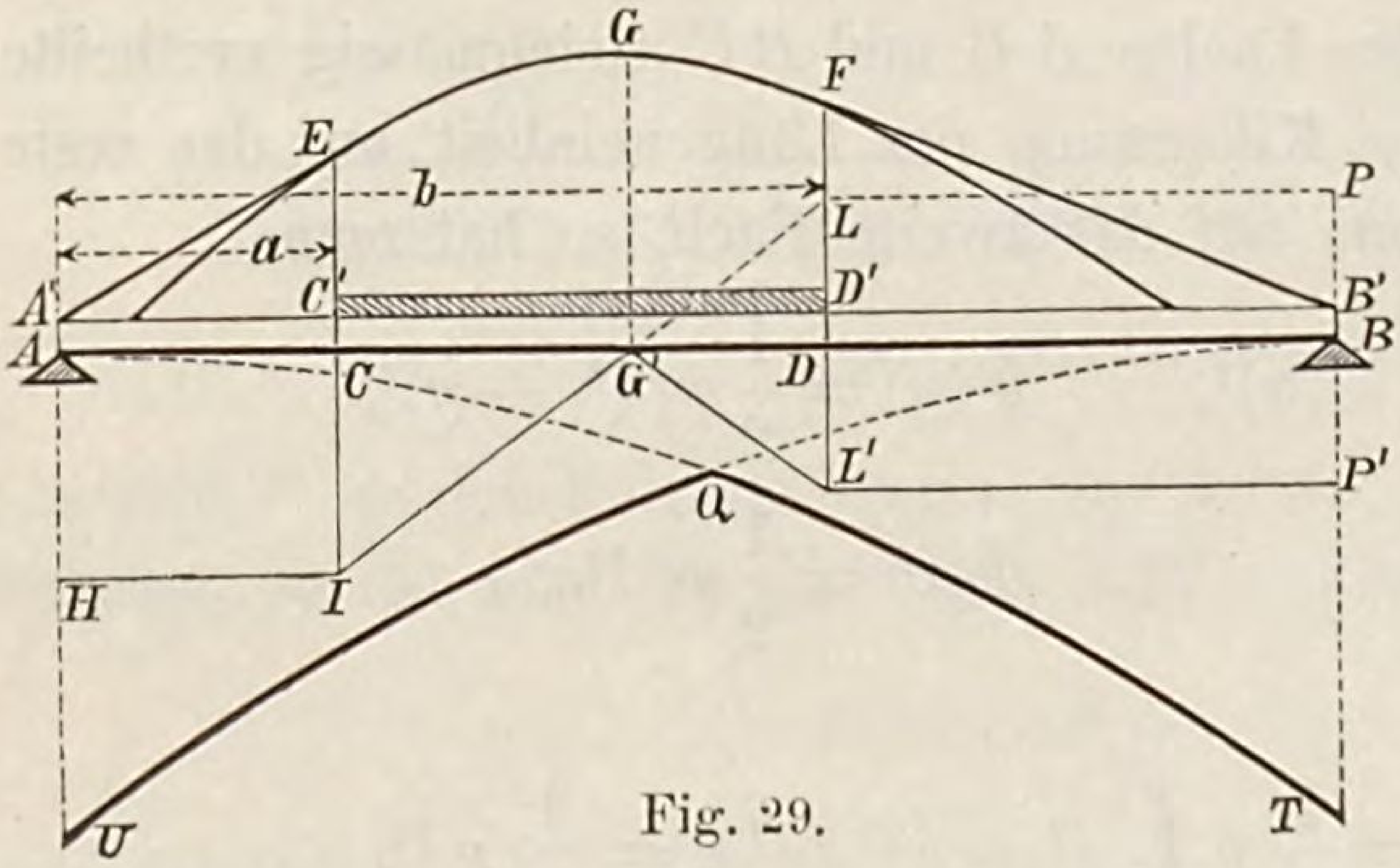


Fig. 29.

Es sei $ABB'A'$ ein horizontaler, an seinen Enden unterstützter Träger, welcher in dem Stücke $C'D'$ durch ein gleichmässig vertheiltes Gewicht von p Kilogramm per Längeneinheit belastet wird.

Nennt man

l die Länge des Trägers,

a die Länge des Stückes $A'\,C'$,

b die Länge des belasteten Stückes $A'\,D'$,

so findet man die Reactionen der Stützpunkte A und B wie folgt:

$$R_1 = p\,(b - a)\,\frac{2\,l - a - b}{2\,l}, \qquad R_2 = p\,(b - a)\,\frac{a + b}{2\,l}.$$

Das Biegungsmoment in Bezug auf einen Querschnitt in der Entfernung x vom Stützpunkte A ist

$M = - R_1\,x$, wenn $x < a$,

$M = -R_1 x + \frac{p}{2}(x-a)^2$, wenn x zwischen a und b genommen wird,

$M = -R_2(l-x)$, wenn x zwischen b und l genommen wird.

Nimmt man also die Gerade $A'B'$ als x-Achse an mit dem Anfangspunkte in A' und zeichnet man hierüber das *Diagramm der Biegungsmomente,* d. h. eine Curve, deren Ordinaten den Biegungsmomenten proportional sind, so sieht man, dass dieses Diagramm sich aus den zwei Geraden $A'E$, FB' und einem Bogen EGF zusammensetzt; letzterer gehört einer Parabel an, welche die Verticale GG' zur Achse hat, wie man aus deren Gleichung

$$M = -R_1 x + \frac{p}{2}(x-a)^2, \tag{57}$$

welche bezüglich der Abscisse x vom zweiten Grade ist, leicht ersehen kann.

Dieser Parabelbogen wird in den beiden Punkten E und F von den zwei Geraden $A'E$ und $B'F$ tangirt; in der That gibt die Gleichung (57) für $x = a$

$$M = -R_1 a, \qquad \frac{dM}{dx} = -R_1,$$

was beweist, dass die Parabel durch den Punkt E der Geraden $A'E$ geht, und dass sie von derselben tangirt wird; in gleicher Weise lässt sich für $x = b$ durch die Gleichung (57) und den Differentialquotienten derselben beweisen, dass die Parabel durch den Punkt F geht und tangential zur Geraden FB' ist.

Ferner ist zu beachten, dass der Parameter der Parabel, welcher der Bogen EGF angehört, $\frac{2}{p}$ ist, wie gross auch die Längen a und b sind; daraus folgt, dass sich die Parabel umsomehr erhebt, je kleiner die Länge a und je grösser das belastete Stück $C'D'$ ist, und dass folglich das Biegungsmoment in einem beliebigen Querschnitte des Trägers sein *Maximum* in dem Falle erreicht, wo die Belastung von p Kilogramm per Längeneinheit sich über den ganzen Träger erstreckt.

In der Praxis nimmt man also als *Diagramm der Biegungsmomente einen durch die Endpunkte A und B des Trägers gehenden Parabelbogen, dessen Achse vertical, und dessen Parameter* $\frac{2}{p}$ *ist.*

Nun wäre das *Diagramm der Schubkräfte* zu bestimmen, d. h. diejenige Curve, deren Abscissen die Entfernungen x sind, und deren Ordinaten für jeden Querschnitt die grösste Schubkraft geben, welche stattfinden kann, wenn man die Längen a und b variirt.

Da die Schubkräfte die Differentialquotienten der Biegungsmomente sind, so werden sich offenbar für dieselben folgende Ausdrücke ergeben:

$S = -R_1$ für das Stück AC,

$S = -R_1 + p(x - a)$ für das Stück CD,

$S = -R_2$ für das Stück DB;

da nur das Stück CD belastet ist, so setzt sich das Diagramm der Schubkräfte zusammen aus einer Geraden HI, parallel zur x-Achse, deren Ordinate proportional zu $-R_1$ ist, aus einer zweiten Geraden IL mit einem zu p proportionalen Winkelcoëfficienten, und schliesslich aus einer dritten Geraden, LP parallel zur x-Achse, deren Ordinate proportional zu $+R_2$ ist. Der Punkt G', wo die Gerade IL die x-Achse schneidet, correspondirt mit der Abscisse, für welche der Differentialquotient des Biegungsmomentes gleich Null wird, d. h. mit dem Querschnitte, in welchem, zufolge der für die Belastung gemachten Annahme, das grösste Biegungsmoment stattfindet.

In der Praxis trägt man im Allgemeinen, wie man in $G'L'P'$ (Fig. 29) sieht, jenen Theil des Diagrammes der Schubkräfte, welcher sich oberhalb der x-Achse befindet, auch unterhalb derselben auf.

Will man nun den geometrischen Ort der Punkte I und L' suchen, indem man a und b sich ändern lässt, so sieht man zuerst, dass, wenn sich a und b derartig ändern, dass die Differenz $b - a$ constant bleibt, die geometrischen Orte der Punkte I und L' zwei untereinander vollkommen gleiche Curven bilden, welche bezüglich der Mitte des Trägers symmetrisch sind; es würde daher genügen, den geometrischen Ort des Punktes L' zu suchen.

Lässt man nun a sich verringern, indem man die Grösse b constant beibehält, so wird die Ordinate des Punktes L' wachsen, denn dieselbe ist proportional zu

$$R_2 = p\,\frac{b^2 - a^2}{2\,l}.$$

Der grösste Werth der Ordinate DL' entspricht also $a = 0$ und ist

$$S = \frac{p\,b^2}{2\,l}.$$

Nimmt man die Werthe von b als Abscissen und jene von S als Ordinaten, so folgt aus dieser Gleichung, dass die grössten Schubkräfte in den verschiedenen Querschnitten sich nach den Ordinaten einer Parabel $A\,Q\,T$ ändern; diese Parabel hat eine verticale Achse, wird von der x-Achse im Punkte A tangirt und hat als Parameter die Grösse $\frac{2\,l}{p}$.

Da man noch eine andere Parabel zu berücksichtigen hat, welche mit der ersten gleich ist und in Bezug auf die Mitte des Trägers symmetrisch zu derselben ist, so sieht man schliesslich, dass das Diagramm der Schubkräfte sich aus den zwei Bögen $Q\,U$ und $Q\,T$ zusammensetzt.

9. Diagramm der Biegungsmomente und der Schubkräfte, wenn man gleichzeitig das permanente Gewicht und die zufällige Belastung betrachtet. — Das permanente Gewicht der eisernen Brücken lässt sich im Allgemeinen als gleichmässig über die Länge der Brücke vertheilt betrachten.

Dasselbe betrage z. B. p_1 Kilogramm per Längeneinheit; die zufällige Belastung der Brücke sei hingegen p Kilogramm. Berücksichtigt man das permanente Gewicht allein, so ist offenbar das Biegungsmoment in der Entfernung x vom Stützpunkte A gleich

$$-\frac{1}{2}\,p_1\,x\,(l-x).$$

Nach Obigem hat man für die alleinige zufällige Belastung das grösste Biegungsmoment in dem betrachteten Querschnitte dann, wenn die Belastung über die ganze Brücke vertheilt ist; der Werth dieses Moments beträgt

$$-\frac{1}{2}\,p\,x\,(l-x).$$

Betrachtet man nun das permanente Gewicht und die zufällige Belastung gleichzeitig, so findet das grösste Biegungsmoment in jenem Querschnitte statt, dessen Entfernung vom Stützpunkte gleich $A - x$ ist, und zwar ist dasselbe gleich

$$-\frac{1}{2}\,(p_1+p)\,x\,(l-x),$$

d. h. *das Diagramm der Biegungsmomente ist eine durch die Enden des Trägers gehende Parabel, deren Achse vertical und deren Parameter* $\frac{2}{p_1 + p}$ *ist.*

Auf die Schubkräfte übergehend, weiss man nach dem Vorausgegangenen, dass für den Querschnitt in der Entfernung x vom Stützpunkt A das alleinige permanente Gewicht eine Schubkraft

$$-p_1\left(\frac{l}{2}-x\right)$$

gibt; die grösste Schubkraft, welche die zufällige Belastung in dem betrachteten Querschnitte hervorruft, ist

$$p\,\frac{x^2}{2\,l},$$

wenn der Querschnitt sich in der rechten Hälfte des Trägers befindet, d. h. wenn $x > \frac{l}{2}$. Es ist also für alle Werthe von x, welche dieser Bedingung entsprechen, die grösste, dem permanenten Gewichte und der Belastung entsprechende Schubkraft gleich

$$-p_1\left(\frac{l}{2}-x\right)+p\,\frac{x^2}{2\,l}.$$

Das Diagramm der Schubkräfte ist für die rechte Hälfte des Trägers eine Parabel mit verticaler Achse, deren Parameter $\frac{2\,l}{p}$ *ist, für die linke Hälfte besteht dasselbe aus einem zu dem ersten symmetrischen Parabelbogen.*

Um dieses Diagramm leicht zu construiren, beachte man, dass für den Mittelpunkt des Trägers die Ordinate

$$\frac{p\,l}{8}$$

ist, und für die Enden

$$\frac{p_1 + p}{2}\,l,$$

wie dies aus obiger Formel hervorgeht, wenn man successive $x = \frac{l}{2}$ und $x = l$ macht.

10. Diagramm der Biegungsmomente und der Schubkräfte in dem Falle, als ein einzelnes Gewicht P sich über die Brücke bewegt. — Befindet sich das Gewicht in der Entfernung x von dem Ende A, so hat man für den Querschnitt, in welchem sich der Angriffspunkt des Gewichtes befindet, das Biegungsmoment

$$M = -P\frac{x(l-x)}{l}, \quad (58)$$

und es setzt sich für diese Lage des Gewichtes das Diagramm des Biegungsmomentes aus den zwei Geraden AD und DB zusammen, vorausgesetzt, dass die Ordinate CD das Biegungsmoment für den Querschnitt C darstellt. Das Diagramm der grössten Biegungsmomente für das sich längs der Brücke bewegende Gewicht ist offenbar der geometrische Ort des Punktes D, und ist derselbe durch die Gleichung (58) gegeben; daraus folgt, dass das gesuchte Diagramm eine durch die Enden A und B gehende Parabel ist, deren Achse vertical und deren Parameter

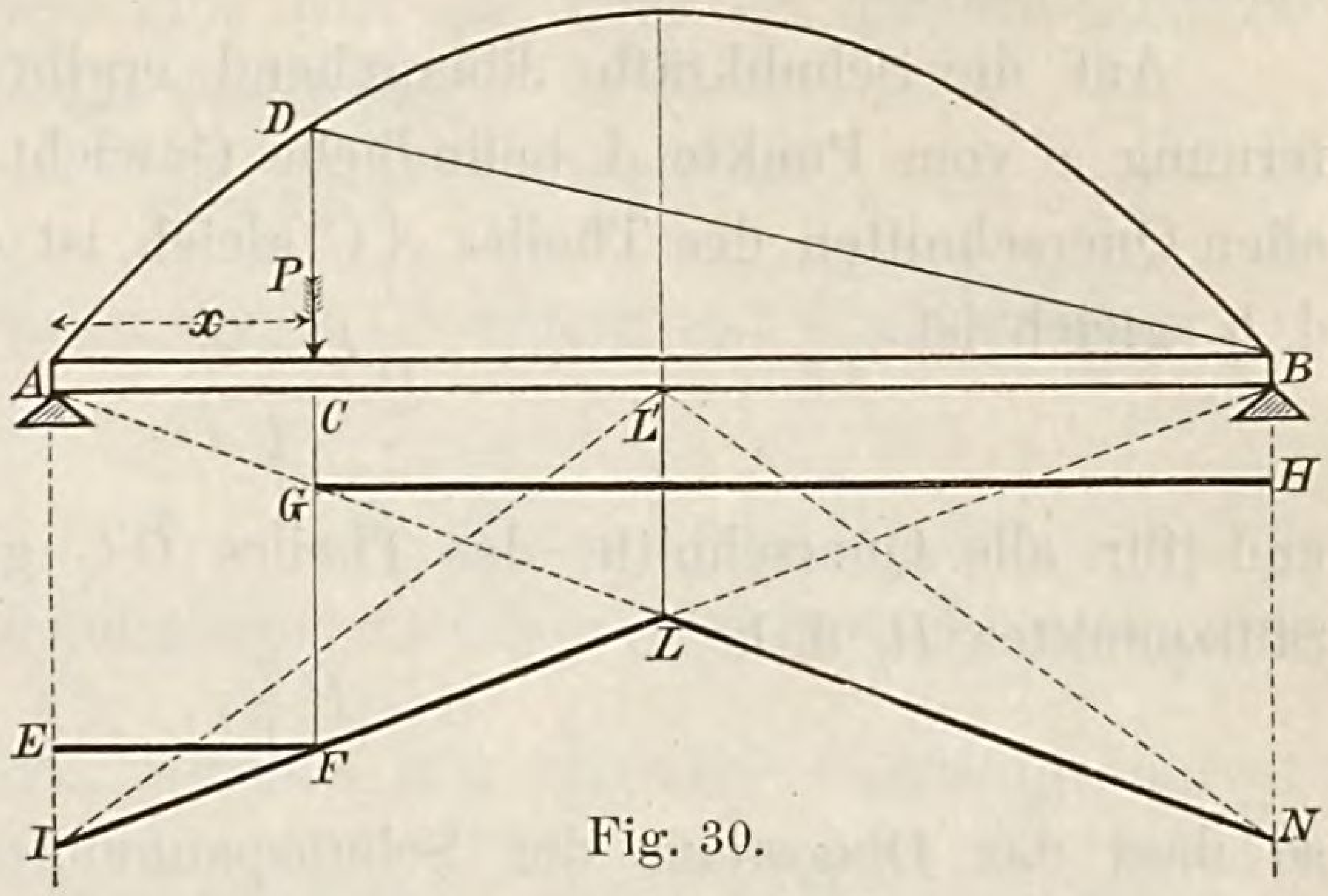


Fig. 30.

$$\frac{l}{P} \text{ ist.}$$

In dem Falle einer im Ausmasse von p Kilogramm per Längeneinheit gleichförmig über die Brücke vertheilten Belastung ist das Diagramm der Biegungsmomente, wie wir gesehen haben, eine Parabel, welche denselben Bedingungen entspricht, wie der oben definirte Bogen, deren Parameter aber

$$\frac{2}{p}$$

ist; die beiden Parabeln werden zusammenfallen, sobald

$$\frac{l}{P} = \frac{2}{p}$$

ist, oder

$$p\,l = 2\,P, \qquad p = \frac{2P}{l}.$$

Man sieht also, dass *bezüglich der Biegungsmomente ein über die Brücke sich bewegendes Gewicht P dieselbe Wirkung hervorruft wie ein doppelt so grosses, gleichmässig über die ganze Länge derselben vertheiltes Gewicht.*

Auf die Schubkräfte übergehend ergibt sich für das in der Entfernung x vom Punkte A befindliche Gewicht P, dass die Schubkraft in allen Querschnitten des Theiles AC gleich ist der Reaction im Punkte A, d. h. gleich ist

$$P\frac{l-x}{l},$$

und für alle Querschnitte des Theiles BC gleich ist der Reaction des Stützpunktes B, d. h.

$$P\frac{x}{l};$$

so dass das Diagramm der Schubspannungen sich aus den zwei zur x-Achse parallelen Geraden EF und GH zusammensetzt.

Um das Diagramm der grössten Schubkräfte zu finden, wenn sich das Gewicht P über die Brücke bewegt, muss man den geometrischen Ort des Punktes F für die linke Hälfte der Brücke suchen und denselben sodann symmetrisch auf die andere Seite übertragen. Nun ist die durch die Ordinate CF dargestellte Schubkraft

$$S = P\frac{l-x}{l}$$

und folglich in Bezug auf x linear, so dass der geometrische Ort des Punktes F eine Gerade sein muss.

Da obige Gleichung für

$$x = 0 \qquad S = P$$

und für

$$x = l \qquad S = 0$$

gibt, so sieht man, dass die durch diese Gleichung gegebene Gerade durch den Punkt B geht, und dass deren Ordinate AI zu P proportional ist. Für den Punkt in der Mitte, d. h. für $x = \frac{l}{2}$ ist die Ordinate die Hälfte von AI. Es setzt sich also *das Diagramm der grössten Schubkräfte aus den zwei Geraden IL und LN zusammen und gehen dieselben durch die Endpunkte A und B.*

11. Diagramm der Biegungsmomente und der Schubkräfte für Eisenbrücken. — Nach Obigem ist das gleichmässig über die ganze Länge eines Trägers vertheilte Gewicht, welches bezüglich der Biegungsmomente dasselbe Diagramm gibt wie das über die Brücke sich bewegende Gewicht P, durch die Gleichung

$$p\,l = 2\,P$$

bestimmt. Durch Multiplication dieser Gleichung mit $\frac{l}{8}$ erhält man

$$\frac{p\,l^2}{8} = \frac{P\,l}{4};$$

nun ist $\frac{p\,l^2}{8}$ das grösste Biegungsmoment einer gleichmässig vertheilten Belastung und $\frac{P\,l}{4}$ dasjenige, welches das Gewicht überhaupt hervorrufen kann, indem es sich über die Brücke bewegt; daraus sieht man, dass das gleichmässig über die Brücke vertheilte Gewicht, welches bezüglich der Biegungsmomente gleich ist dem sich über den Träger bewegenden Gewichte P, auch durch die Bedingung bestimmt werden kann, dass das grösste Biegungsmoment in beiden Fällen dasselbe ist.

Diese gegenseitige Beziehung wird in der Praxis dazu angewendet, um die Berechnung der eisernen Eisenbahnbrücken zu vereinfachen. Denn, da die Züge, welche die Brücke passiren, keine gleichmässig vertheilte Belastung geben, *sucht man zuerst das grösste Biegungsmoment, welches dieselben geben können, und berechnet sodann die Brücke, als wäre sie durch ein ihrer ganzen Länge nach gleichmässig vertheiltes Gewicht belastet, welches im Stande ist, das für den Verkehr der Züge berechnete grösste Moment zu geben.* Nennt man dieses Moment M, so hat man die Gleichung

$$\frac{p\,l^2}{8} = M,$$

woraus sich ergibt

$$p = \frac{8\,M}{l^2},$$

wobei p ebenso wie früher das Gewicht per Längeneinheit ist.

Nach dem Vorhergegangenen sieht man, dass dieser für die Biegungsmomente wohl annehmbare Schluss für die Schubkräfte nicht gilt; denn für den Fall, als ein einzelnes Gewicht sich über die Brücke bewegt,

wurde gefunden, dass das Diagramm der Schubkräfte sich aus den beiden Geraden IL und LN zusammensetzt, was für die Mitte des Trägers eine Kraft, gleich der Hälfte jener an den Enden, ergibt, während in dem Falle einer gleichmässig vertheilten Belastung — und zwar einer Belastung, welche bezüglich der Biegungsmomente gleichwerthig ist mit dem sich über die Brücke bewegenden Gewichte P — das Diagramm der Schubkräfte sich aus den beiden Geraden IL' und $L'N$ zusammensetzt, was für die Mitte des Trägers eine Schubkraft Null gibt und folglich für alle anderen Querschnitte kleinere Schubkräfte, als sie durch das Gewicht P hervorgerufen werden.

Man muss also für die Schubkräfte in jedem einzelnen Falle den schwersten in Betracht kommenden Güterzug als Grundlage nehmen und das Diagramm unter der Voraussetzung construiren, dass dieser Zug sich bewege.

12. Pfeilhöhe der Durchbiegung in der Mitte einer eisernen Brücke mit einer einzigen Oeffnung, sobald diese Brücke durch ein gleichmässig vertheiltes Gewicht belastet wird. — Für diesen Fall wurde in Nummer 6 die Formel (38), d. h.

$$f = \frac{p}{2}\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{x^2 (l - x)\, d x}{E I} + \frac{p}{2}\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{A (l - 2 x)\, d x}{F \Omega}$$

gefunden, welche ersehen lässt, dass die Pfeilhöhe f sich aus zwei Theilen zusammensetzt, und zwar aus

$$f' = \frac{p}{2}\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{x^2 (l - x)\, d x}{E I},$$

von der Biegung herrührend, und aus

$$f'' = \frac{p}{2}\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{A (l - 2 x)\, d x}{F \Omega},$$

von der Verschiebung stammend; und zwar wurden diese Formeln für symmetrische Träger erhalten.

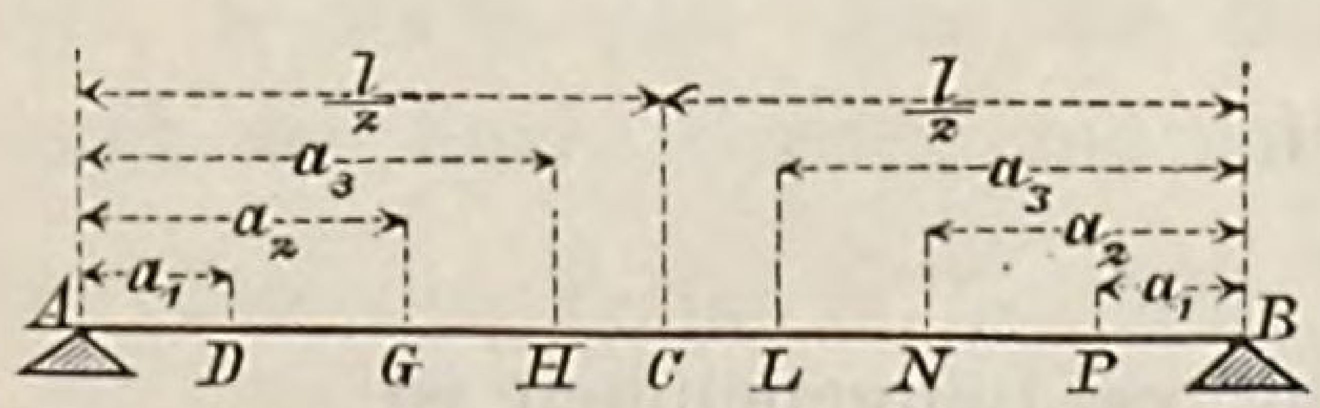


Fig. 31.

Denkt man sich den Träger in mehrere Theile getheilt, so zwar, dass je zwei bezüglich der Mitte C zu einander symmetrisch sind, und dass die zwei äussersten Theile AD und BP ein constantes Trägheitsmoment gleich I_1 haben; die beiden folgenden DG und PN das Trägheits-

moment I_2; die anderen GH und NL das Moment I_3 und der letzte Theil HL das Moment I_4, so kann man die Integration des Ausdruckes für f' ausführen und erhält

$$f' = \frac{p}{2E}\left\{\frac{l}{3}\left[\frac{a^3_1}{I_1}+\frac{a^3_2-a^3_1}{I_2}+\frac{a^3_3-a^3_2}{I_3}+\frac{\left(\frac{l}{2}\right)^3-a^3_3}{I_4}\right] - \frac{1}{4}\left[\frac{a^4_1}{I_1}+\frac{a^4_2-a^4_1}{I_2}+\frac{a^4_3-a^4_2}{I_3}+\frac{\left(\frac{l}{2}\right)^4-a^4_3}{I_4}\right]\right\}.$$

Um f'' zu berechnen, muss man den Träger in eine Anzahl gleicher, bezüglich der Mitte symmetrischer Theile zerlegen, so zwar, dass das Verhältniss $\frac{A}{\Omega}$ nachfolgende Werthe erhält, nämlich: $\frac{A_1}{\Omega_1}$ für alle Querschnitte der äussersten Theile AD' und BP';

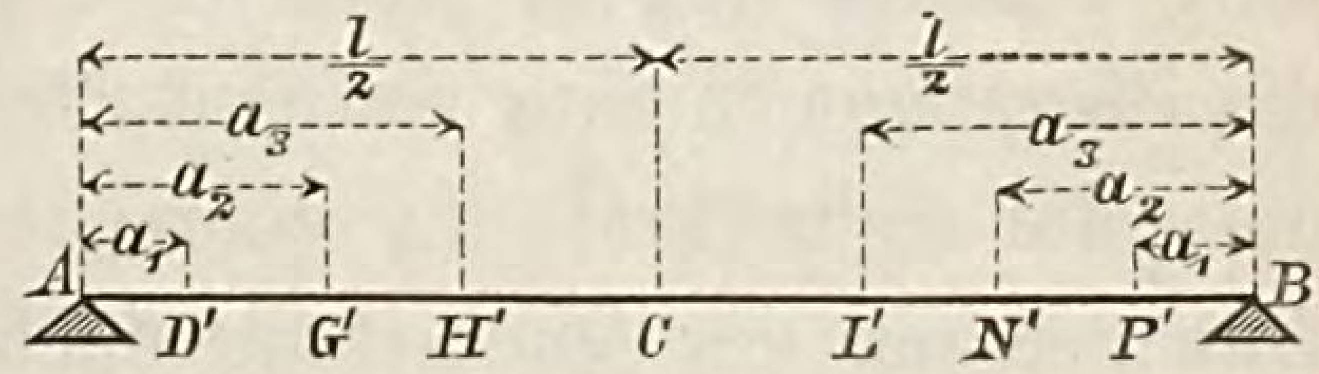


Fig. 32.

$\frac{A_2}{\Omega_2}$ für alle Querschnitte der Theile $D'G'$ und $P'N'$; $\frac{A_3}{\Omega_3}$ für jene der Theile $G'H'$ und $N'L'$; und endlich $\frac{A_4}{\Omega_4}$ für jene des mittleren Theiles $H'L'$. Hierauf kann man die Integration des Ausdruckes für f'' ausführen und erhält

$$f'' = \frac{p}{2F}\left\{l\left[\frac{A_1 b_1}{\Omega_1}+\frac{A_2(b_2-b_1)}{\Omega_2}+\frac{A_3(b_3-b_2)}{\Omega_3}+\frac{A_4\left(\frac{l}{2}-b_3\right)}{\Omega_4}\right] - \left[\frac{A_1 b^2_1}{\Omega_1}+\frac{A_2(b^2_2-b^2_1)}{\Omega_2}+\frac{A_3(b^2_3-b^2_2)}{\Omega_3}+\frac{A_4\left(\frac{l^2}{4}-b^2_3\right)}{\Omega_4}\right]\right\}.$$

Im Allgemeinen kann man die vollen Blechwandträger sowohl bezüglich der Biegungsmomente als auch bezüglich der Schubkräfte in gleiche Theile zerlegen, so dass man in dem Ausdrucke für f'' b in a ändern kann, was übrigens für die Rechnung keinen Vortheil bietet.

Bei den Gitterträgern hingegen findet diese Uebereinstimmung fast niemals statt, weshalb auch für die Pfeilhöhe der Durchbiegung die beiden Summanden f' und f'' unterschieden wurden.

Man muss wohl beachten, dass, sobald es sich um einen Gitterträger handelt, die Formel (38) modificirt werden muss, indem man statt des Coëfficienten F der tangentiellen Elasticität, den Coëfficienten E' der longitudinalen Elasticität der Gitterstäbe und statt der Querschnittsfläche Ω des Trägers den Querschnitt ω der Gitterstäbe setzen muss.

13. Eisenbrücken mit continuirlichen Trägern. — Bei den Eisenbrücken über eine einzige Oeffnung ist das Biegungsmoment und die Schubkraft in einem beliebigen Querschnitte nur von der Belastung und nicht von den Querdimensionen des Trägers abhängig. Bei den Eisenbrücken, deren Hauptträger sich von einem Widerlager zu dem anderen erstrecken, ohne auf den Pfeilern unterbrochen zu sein, resultirt hingegen aus den in Nummer 7 gegebenen Formeln (44) und (50), dass die Biegungsmomente auf den Pfeilern und folglich das Biegungsmoment und die Schubkraft in einem beliebigen Querschnitte auch von den Dimensionen der Querschnittsfläche des Trägers abhängen.

Da aber gerade diese Dimensionen die Unbekannten sind, welche man zu berechnen hat, so sieht man, dass sich grosse Schwierigkeiten ergeben würden, wenn man das Problem auf directem Wege auflösen wollte. Deshalb beschränkt man sich bis jetzt in der Praxis immer darauf, die continuirlichen Träger mit Hilfe der Formel (56) zu berechnen, welche Formel aus jener (50) abgeleitet wird, indem man sich das Gewicht gleichförmig über die Länge jedes Faches vertheilt denkt unter Vernachlässigung der durch die transversalen Verschiebungen hervorgerufenen Deformationen, und indem man schliesslich das Trägheitsmoment des Querschnittes von einem Ende zum anderen als constant annimmt.

Dieser Weg ist für die erste Berechnung ohne Zweifel der einzig rationelle, denn er gestattet, das Biegungsmoment und die Schubkraft in einem beliebigen Querschnitte zu berechnen, ohne die Dimensionen des Trägers zu kennen. Sodann kann man mit Hilfe der erhaltenen Resultate jedes Fach in mehrere Theile theilen, indem man jedem derselben einen constanten Querschnitt gibt, jedoch derart, dass derselbe der grössten Schubkraft, welcher er unterworfen werden könnte, widerstehen kann.

Gewöhnlich beschränkt man sich darauf; aber es ist klar, dass man, um die wirklichen Schubkräfte zu bestimmen, welche in dem Träger stattfinden, die Berechnung nochmals aufnehmen und ein zweites Mal das

Diagramm der Biegungsmomente und jenes der Schubkräfte bestimmen muss, wobei man auf die Aenderung sowohl des Trägheitsmomentes als auch des Verhältnisses $\frac{A}{\Omega}$ Rücksicht nimmt. Diese zweite Berechnung bietet keine Schwierigkeiten mehr, denn da der Träger nun in Abschnitte getheilt wird, für welche das Trägheitsmoment und das Verhältniss $\frac{A}{\Omega}$ constant sind, so lassen sich die Integrationen, welche für den Gebrauch der Formel (44) nothwendig sind, leicht durchführen.

Ferner ist noch zu beachten, dass bei Eisenbrücken gewöhnlich die Fächer untereinander nicht gleich sind, da man die beiden äussersten einander wohl gleich, aber etwas kleiner als die anderen macht.

Wenn man eine Eisenbrücke mit continuirlichen Trägern zu berechnen hat, genügt es für die Praxis, jene Fälle zu betrachten, wo die Fächer jedes für sich, oder wo die auf einander folgenden Fächer paarweise belastet sind.

Um die Durchbiegung f des Mittelpunktes eines beliebigen Faches eines continuirlichen Trägers zu berechnen, kann man sich der in Nummer 5 gegebenen Formel (25) bedienen, indem man $x = \frac{l}{2}$ macht; dies gibt, wenn man unter dem Integrationszeichen den Index bei x' weglässt,

$$f = -\frac{1}{2}\left[\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{Mx}{EI} dx + \int_{\frac{l}{2}}^{l} \frac{M(l-x)}{EI} dx\right] - \frac{1}{2}\left[\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{A\,S}{F\Omega} dx - \int_{\frac{l}{2}}^{l} \frac{A\,S}{F\Omega} dx\right];$$

diese Pfeilhöhe f setzt sich, wie man sieht, aus zwei Theilen zusammen, deren einer

$$f' = -\frac{1}{2}\left[\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{Mx}{EI} dx + \int_{\frac{l}{2}}^{l} \frac{M(l-x)}{EI} dx\right]$$

von der Biegung allein herrührt, und deren anderer

$$f'' = -\frac{1}{2}\left[\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{AS}{F\Omega} dx - \int_{\frac{l}{2}}^{l} \frac{AS}{F\Omega} dx\right]$$

von der Verschiebung stammt.

Da angenommen wurde, dass das betrachtete Fach durch ein gleichförmig vertheiltes Gewicht belastet wird, so kann man in dem Ausdrucke (22) der Nummer 5

$$\varphi(0) = \frac{1}{2} p\, l^2 \quad \text{und} \quad \varphi(x) = \frac{1}{2} p\,(l - x)^2$$

setzen, wodurch man

$$M = M_0 \frac{l - x}{l} + M_1 \frac{x}{l} - \frac{1}{2} p\,(l - x)\,x$$

erhält, und folglich $S = \dfrac{M_1 - M_0}{l} - p\left(\dfrac{l}{2} - x\right)$.

Diese beiden letzten Formeln dienen dazu, um das Biegungsmoment und die Schubkraft in einem beliebigen Querschnitte zu bestimmen, wenn die Biegungsmomente auf den Pfeilern bestimmt sind.

Durch die Substitution in die Ausdrücke für f' und f'' erhält man

$$f' = -\frac{M_0}{2l}\left[\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{(l-x)\,x\,dx}{EI} + \int_{\frac{l}{2}}^{l} \frac{(l-x)^2\,dx}{EI}\right]$$
$$-\frac{M_1}{2l}\left[\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{x^2\,dx}{EI} + \int_{\frac{l}{2}}^{l} \frac{(l-x)\,x\,dx}{EI}\right]$$
$$+\frac{p}{4}\left[\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{(l-x)\,x^2\,dx}{EI} + \int_{\frac{l}{2}}^{l} \frac{(l-x)^2\,x\,dx}{EI}\right],$$

$$f'' = -\frac{M_1 - M_0}{2l}\left[\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{A\,dx}{F\Omega} - \int_{\frac{l}{2}}^{l} \frac{A\,dx}{F\Omega}\right]$$
$$+\frac{p}{2}\left[\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{A\,(l-2x)\,dx}{2F\Omega} - \int_{\frac{l}{2}}^{l} \frac{A\,(l-2x)\,dx}{2F\Omega}\right].$$

Im Allgemeinen vereinfachen sich diese Formeln in der Praxis, sowohl für die äussersten Fächer, als auch für die Zwischenfächer, wie dies aus den folgenden Betrachtungen hervorgeht:

1. Aeusserstes Fach. — Untersucht man z. B. das linke Fach, so hat man $M_0 = 0$ und folglich

$$f' = -\frac{M_1}{2l}\left[\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{x^2\,dx}{EI} + \int_{\frac{l}{2}}^{l} \frac{(l-x)\,x\,dx}{EI}\right]$$
$$+\frac{p}{4}\left[\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{(l-x)\,x^2\,dx}{EI} + \int_{\frac{l}{2}}^{l} \frac{(l-x)^2\,x\,dx}{EI}\right],$$

$$f'' = -\frac{M_1}{2l}\left[\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{A\,dx}{F\Omega} - \int_{\frac{l}{2}}^{l} \frac{A\,dx}{F\Omega}\right]$$
$$+\frac{p}{2}\left[\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{A\,(l-2x)\,dx}{2F\Omega} - \int_{\frac{l}{2}}^{l} \frac{A\,(l-2x)\,dx}{2F\Omega}\right].$$

2. Zwischenliegende Fächer. — Diese Fächer sind im Allgemeinen, wie dies schon erwähnt wurde, untereinander ganz gleich und ferner in Bezug auf deren Mitte symmetrisch; in diesem Falle ergeben sich mehrere Vereinfachungen, denn, wenn man in den zwischen $\frac{l}{2}$ und l genommenen Integralen $l - x = y$ macht, d. h. wenn man für diese Integrale das rechte Ende als Ursprung nimmt, so erhält man

$$\int_{\frac{l}{2}}^{l} \frac{(l-x)^2}{EI} dx = \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{y^2 dy}{EI}, \quad \int_{\frac{l}{2}}^{l} \frac{(l-x)\, x\, dx}{EI} = \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{(l-y)\, y\, dy}{EI},$$

$$\int_{\frac{l}{2}}^{l} \frac{(l-x)^2\, x\, dx}{EI} = \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{y^2 (l-y)\, dy}{EI}, \quad \int_{\frac{l}{2}}^{l} \frac{A\, dx}{F\Omega} = \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{A\, dy}{F\Omega},$$

$$\int_{\frac{l}{2}}^{l} \frac{A(l-2x)\, dx}{2F\Omega} = -\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{A(l-2y)\, dy}{2F\Omega},$$

und da, auf Grund der Symmetrie, diese Integrale mit y gleich sind den Integralen, welche aus der Aenderung von y in x resultiren, so erhält man die Formeln

$$f' = -\frac{M_0 + M_1}{2l}\left[\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{(l-x)\, x\, dx}{EI} + \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{x^2\, dx}{EI}\right] + \frac{p}{2}\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{(l-x)\, x^2\, dx}{EI},$$

$$f'' = \frac{p}{2}\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{A(l-2x)}{F\Omega}\, dx,$$

deren erste sich noch vereinfachen lässt, und zwar wie folgt:

$$f' = -\frac{M_0 + M_1}{2}\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{x\, dx}{EI} + \frac{p}{2}\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{(l-x)\, x^2\, dx}{EI}.$$

Die Anwendung dieser Formeln in den praktischen Fällen ist sehr leicht, denn jedes Fach wird im Allgemeinen in mehrere Theile getheilt, deren jeder eine constante Querschnittsfläche hat.

Es ist auch hier zu wiederholen, dass man, wenn es sich, wie bei Brücken mit einem einzigen Fache, um Gitterträger handelt, in dem Ausdrucke für f'' statt des Coëfficienten F der tangentialen Elasticität, den Coëfficienten E' der normalen Elasticität der Gitterstäbe setzen muss.

Bezüglich des Coëfficienten A wurden die zu dessen Berechnung nothwendigen Formeln sowohl für den Fall der vollen Blechwandträger, als auch für jenen der Gitterträger schon gegeben.

14. Betrachtungen über die Formel (25). — Von der Formel (25) kann man sogleich auf die Gleichung (44) übergehen, denn der erste Ausdruck der Formel (25), d. i.

$$-\frac{l-x}{l}\left[\int_0^x \frac{Mx'}{EI}\,dx'+\int_0^x \frac{AS}{F\Omega}\,dx'\right],$$

bezieht sich auf das Stück AC (Fig. 26, S. 210), während der zweite Ausdruck

$$-\frac{x}{l}\left[\int_x^l \frac{M(l-x')}{EI}\,dx'-\int_x^l \frac{AS}{F\Omega}\,dx'\right]$$

sich auf das Stück BC bezieht; diesen letzten Ausdruck kann man aber auch folgendermassen schreiben:

$$-\frac{x}{l}\left[-\int_{l-x}^0 \frac{M(l-x')}{EI}\,d(l-x')+\int_{l-x}^0 \frac{AS}{F\Omega}\,d(l-x')\right].$$

Macht man hierin $l-x'=y'$ und $l-x=y$ und kehrt man die Grenzen der Integrale um, was die Aenderung des Zeichens der Ausdrücke bedingt, so erhält man

$$-\frac{x}{l}\left[\int_0^y \frac{My'}{EI}\,dy'-\int_0^y \frac{AS}{F\Omega}\,dy'\right].$$

Man kann nun, der grösseren Deutlichkeit wegen, in dieser Formel M in $\mathfrak{M}$ und S in $\mathfrak{S}$ ändern, um das Biegungsmoment und die Schubkraft für die Querschnitte des Stückes CB von den ähnlichen Grössen, welche sich auf die Querschnitte des Stückes AC beziehen, zu unterscheiden. Die Formel (25) kann also in folgender Form gegeben werden:

$$\eta=-\frac{y}{l}\left[\int_0^x \frac{Mx'}{EI}\,dx'+\int_0^x \frac{AS}{F\Omega}\,dx'\right]$$
$$-\frac{x}{l}\left[\int_0^y \frac{\mathfrak{M}y'}{EI}\,dy'-\int_0^y \frac{A\mathfrak{S}}{F\Omega}\,dy'\right].$$

Es ist bekannt, dass man das Biegungsmoment M und die Schubkraft S für einen beliebigen Querschnitt des Stückes AC in einer Function der dasselbe belastenden Gewichte und der in den Querschnitten A und C stattfindenden Biegungsmomente ausdrücken kann; in gleicher Weise kann das Biegungsmoment $\mathfrak{M}$ und die Schubkraft $\mathfrak{S}$ für einen beliebigen Querschnitt des Stückes CB ausgedrückt werden in einer Function der

dasselbe belastenden Gewichte und der in den Querschnitten B und C stattfindenden Biegungsmomente. Daraus folgt, dass man die Senkung η des Punktes C in einer Function der drei Biegungsmomente ausdrücken kann, d. h. jener Momente, welche an den Enden des Trägers, und desjenigen, welches in dem Querschnitte C stattfindet.

Es ist zu beachten, dass die Formel (25) die Senkung η des Punktes C unter der Voraussetzung gibt, dass sich die Enden des Trägers nicht senken können; oder in anderen Worten, sie gibt die Senkung des Punktes C in Bezug auf die Gerade, welche nach der Deformation die Mittelpunkte der äussersten Enden des Trägers verbindet. Wenn sich also die Enden A und B während der Deformation um die Grösse α, respective γ senken und der Punkt C um die Grösse β, so ist offenbar die Senkung dieses Punktes in Bezug auf die Gerade, welche nach der Deformation die Mittelpunkte der Endflächen verbindet, bei Beachtung, dass $x + y = l$ ist, gegeben durch

$$\beta - \left(\alpha + \frac{\gamma - \alpha}{l} x\right) = \frac{(\beta - \gamma)\, x + (\beta - \alpha)\, y}{l}.$$

Durch Substitution dieses Werthes von η in die oben erhaltene Formel und durch gleichzeitige Division durch $-\frac{x\,y}{l}$ erhält man

$$\frac{\gamma - \beta}{y} - \frac{\beta - \alpha}{x} = \frac{1}{x}\left[\int_0^x \frac{M x'}{E I}\, d\,x' + \int_0^x \frac{A\, S}{F \Omega}\, d\,x'\right]$$
$$+ \frac{1}{y}\left[\int_0^y \frac{\mathfrak{M}\, y'}{E I}\, d\,y' - \int_0^y \frac{A\, \mathfrak{S}}{F \Omega}\, d\,y'\right].$$

Will man nun diese Formel auf continuirliche Träger anwenden, so betrachte man die zwei aufeinander folgenden Fächer AB und BC als ein einziges Fach, was man machen kann, indem man sich den Stützpunkt B entfernt denkt und dafür eine von unten nach oben gerichtete vertical wirkende Kraft substituirt. Um nun eine Beziehung zwischen dem Biegungsmoment in den drei Stützpunkten A, B, C zu erhalten, hat man nur x in l und y in l_1 zu wechseln, womit die letzte Formel sogleich die Gleichung (44) gibt.

8. Capitel.

Theorie der auf Zerknicken beanspruchten Träger mit geradliniger Achse.

1. Curve, nach welcher sich ein verticaler, von oben belasteter Träger biegt. — Es sei AB ein Träger mit geradliniger und verticaler Achse, welcher an seinem unteren Ende eingespannt ist, und dessen Trägheitshauptachsen der Querschnitte in zwei aufeinander senkrecht stehende Ebenen fallen, deren Durchschnittslinie mit der Horizontalebene die zwei senkrechten Geraden XX' und YY' sind.

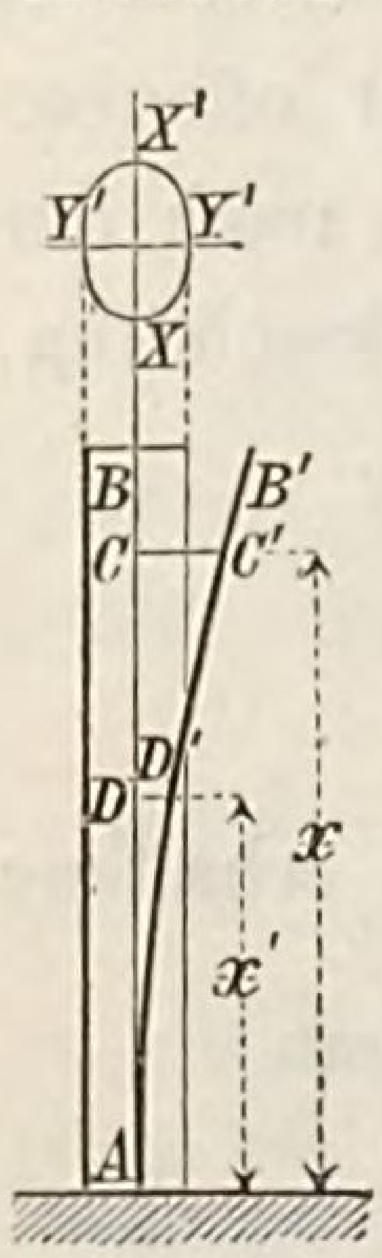


Fig. 33.

Es werde nun angenommen, dass auf die obere Grundfläche folgende Kräfte wirken:

1. Verticale, von oben nach unten gerichtete Kräfte, oder in anderer Weise ausgedrückt, gleichförmig über jede zur Achse XX' parallele Linie vertheilte Gewichte.

2. Tangentialkräfte, parallel zur Achse YY', deren Summe S_1 ist.

P_1 sei also die Summe aller auf die Fläche B wirkenden Verticalkräfte oder Gewichte und M_1 die Summe ihrer Momente in Bezug auf die zur Achse XX' parallele Trägheitshauptachse der Grundfläche, so dass P_1 die Normalpressung auf die obere Grundfläche, sowie auf alle anderen Querschnitte des Körpers und M_1 das Biegungsmoment in der oberen Grundfläche ist.

Es handelt sich nun darum, die Drehung der oberen Fläche und ferner die Curve zu finden, nach welcher sich die Achse des Körpers biegt.

Wenn man annimmt, dass die Achse des Körpers nach der Deformation die Curve AB' bildet, und wenn man die Pfeilhöhe der Curve f nennt, d. h. die horizontale Verrückung BB' des Mittelpunktes der oberen Fläche und y die Ordinate des Punktes C' der Curve, d. h. die

Verrückung CC' des Mittelpunktes des Querschnittes C, so ist offenbar für den mit dem Punkte C in der Entfernung x von der Grundfläche des Körpers correspondirenden Querschnitt das Biegungsmoment, die Normalpressung und die Schubkraft durch folgende Formeln gegeben:

$$\left.\begin{aligned} M &= M_1 + P_1 (f - y) + S_1 (l - x), \\ P &= P_1, \\ S &= S_1. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Für die Schubkräfte wurde der constante Werth S genommen, indem man die Componente des Gewichtes P, welche von der kleinen Neigung der Querschnitte gegen die Horizontale nach der Deformation herrührt, vernachlässigt.

Nennt man nun

E den normalen Elasticitätscoëfficienten des Körpers in dem Querschnitte C,

F den tangentialen Elasticitätscoëfficienten,

Ω die Fläche und I das Trägheitsmoment dieses Querschnittes,

A den Coëfficienten, welcher in den Ausdruck für die aus den Tangentialkräften sich ergebende Deformationsarbeit eintritt,

l die Länge des Körpers,

so wird die Deformationsarbeit durch die Formel

$$\frac{1}{2}\int_0^l \frac{M^2}{EI}\,dx + \frac{1}{2}\int_0^l \frac{P^2}{F\Omega}\,dx + \frac{1}{2}\int_0^l \frac{AS^2}{F\Omega}$$

ausgedrückt, deren Differentialquotient nach M_1 die Drehung θ_1 der obersten Fläche gibt. Das zweite und das dritte Integral enthält M_1 nicht und verschwindet daher, sobald man den Differentialquotienten nimmt; man hat also, indem man berücksichtigt, dass $\frac{dM}{dM_1} = 1$ ist, einfach

$$\theta_1 = \int_0^l \frac{M}{EI}\frac{dM}{dM_1}\,dx = \int_0^l \frac{M}{EI}\,dx, \tag{2}$$

oder, wenn man für M dessen Werth (1) substituirt,

$$\theta_1 = M_1 \int_0^l \frac{dx}{EI} + P_1 \int_0^l \frac{f-y}{EI}\,dx + S_1 \int_0^l \frac{(l-x)}{EI}\,dx. \tag{2^b}$$

Man sieht daraus, dass man von dieser Formel nur dann Gebrauch machen kann, wenn man y in einer Function von x erhalten hat, d. h. nachdem man die von der Achse des Körpers nach der Deformation beschriebene Curve bestimmt hat.

Um die Gleichung dieser Curve zu bestimmen, denke man sich im Mittelpunkte des Querschnittes C eine horizontale Kraft $\overline{\omega}$ und eine verticale Kraft $\overline{\omega}'$ wirkend, und zwar so klein, als man will. Das Biegungsmoment, die Normalpressung und die Schubkraft in einem Querschnitte D, dessen Entfernung von der Grundfläche $x' < x$ ist, werden sodann durch die folgenden Formeln ausgedrückt:

$$\left.\begin{aligned} M &= M_1 + P_1(f - y') + S_1(l - x') + \overline{\omega}(x - x') + \overline{\omega}'(y - y'), \\ P &= P_1 + \overline{\omega}', \\ S &= S_1 + \overline{\omega}. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Für die Querschnitte oberhalb von C sind die Werthe $\overline{\omega}$ und $\overline{\omega}'$ in den Ausdrücken für das Biegungsmoment, die Normalpressung und die Schubkraft nicht enthalten, d. h. diese Grössen sind durch die Formeln (1) schon gegeben. Da die horizontale und die verticale Verrückung des Querschnittsmittelpunktes C die Differentialquotienten der Deformationsarbeit des festen Körpers mit Bezug auf $\overline{\omega}$ und $\overline{\omega}'$ sind, und da jener Theil dieser Arbeit, welcher dem Stücke CB entspricht, die Kräfte $\overline{\omega}$ und $\overline{\omega}'$ nicht enthält, so genügt es, die Deformationsarbeit des Stückes AC zu betrachten, welche durch die folgende Formel ausgedrückt wird:

$$\frac{1}{2}\int_0^x \frac{M^2}{EI}\,dx' + \frac{1}{2}\int_0^x \frac{P^2}{EI}\,dx' + \frac{1}{2}\int_0^x \frac{AS^2}{F\Omega}\,dx',$$

indem hierin für M, P, S deren Werthe (3) substituirt werden.

Nimmt man die Differentialquotienten dieser Formel nach $\overline{\omega}$ und $\overline{\omega}'$, so erhält man die horizontale Verrückung y und die verticale Verrückung ξ des Mittelpunktes des Querschnittes C. Bei Beachtung, dass die Formeln (3)

$$\frac{dM}{d\overline{\omega}} = x - x', \qquad \frac{dP}{d\overline{\omega}} = 0, \qquad \frac{dS}{d\overline{\omega}} = 1,$$

$$\frac{dM}{d\overline{\omega}'} = y - y', \qquad \frac{dP}{d\overline{\omega}'} = 1, \qquad \frac{dS}{d\overline{\omega}'} = 0$$

ergeben, erhält man

$$\left.\begin{aligned} y &= \int_0^x \frac{M(x-x')}{EI}\,d\,x' + \int_0^x \frac{A\,S}{F\Omega}\,d\,x', \\ \xi &= \int_0^x \frac{M(y-y')}{EI}\,d\,x' + \int_0^x \frac{P}{EI}\,d\,x'. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Um nun die Verrückungen y und ξ zu finden, sobald die Kräfte $\overline{\omega}$ und $\overline{\omega}'$ nicht vorhanden sind, muss man in diesen Formeln die Ausdrücke (3) von M, P, S substituiren, nachdem man hierin $\overline{\omega} = 0$ und $\overline{\omega}' = 0$ gemacht hat, d. h. es ist

$$\left.\begin{aligned} M &= M_1 + P_1\,(f - y') + S_1\,(l - x'), \\ P &= P_1, \\ S &= S_1. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Es ist wohl zu beachten, dass man in den Formeln (4) für x und x' die Abscissen der zu betrachtenden Punkte nach der Deformation nehmen muss, d. h. die ursprünglichen Abscissen vermindert um die durch die zweite dieser Formeln gegebenen verticalen Verrückungen. Wenn man also strenge vorgehen wollte, wäre die Auflösung dieses Problems sehr schwierig; aber da die verticalen Verrückungen immer sehr klein sind, kann man offenbar mit mehr als genügender Genauigkeit in den Formeln (4) für x und x' die ursprünglichen Abscissen nehmen. Die erste dieser Formeln genügt also, um die Ordinaten der von der Achse des Körpers nach der Deformation gebildeten Curve zu erhalten, während die zweite das Mittel gibt zur Berechnung der Verkleinerung der ursprünglichen Abscissen. Da aber die Ordinaten y im Verhältnisse zu den Abscissen x ungemein klein sind, ist auch das Integral

$$\int_0^x \frac{M(y-y')}{EI}\,d\,x'$$

sehr klein im Verhältnisse zu dem Integrale

$$\int_0^x \frac{M(x-x')}{EI}\,d\,x',$$

so dass man in dem Ausdrucke für ξ das erste Glied vernachlässigen und einfach

$$\xi = \int_0^x \frac{P_1}{EI}\,d\,x' \qquad (6)$$

nehmen kann.

Differentiirt man die erste der Formeln (4) mit Bezug auf x und berücksichtigt man, dass bei der Integration x als Constante betrachtet wurde, so erhält man nach den Regeln der Differentiation unter dem Integralzeichen

$$\frac{dy}{dx} = \int_0^x \frac{M\,dx'}{EI} + \frac{AS_1}{F\Omega}. \tag{7}$$

Die Abscisse x kommt nun nicht mehr in der Grösse unter dem Integrationszeichen*) vor, sondern nur als obere Grenze des Integrales; folglich erhält man, wenn ein zweites Mal nach x differentiirt wird,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EI} + S_1 \frac{d\left(\frac{A}{F\Omega}\right)}{dx};$$

setzt man für $\frac{M}{EI}$ und $\frac{A}{F\Omega}$ die mit der Abscisse x correspondirenden Werthe ein, so ergibt dies die Gleichung

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M_1 + P_1(f - y) + S_1(l - x)}{EI} + S_1 \frac{d\left(\frac{A}{F\Omega}\right)}{dx}. \tag{8}$$

2. Integration der Gleichung (8) für homogene Prismen. — In dem Falle, als der Träger homogen und prismatisch ist und daher das Product EI und die Grösse $\frac{A}{F\Omega}$ constant sind, verschwindet das letzte Glied der Gleichung (8) und man kann dieselbe leicht integriren; denn, setzt man

$$M_1 + P_1(f - y) + S_1(l - x) = (M_1 + P_1 f)\, z,$$

so erhält man durch zweimaliges Differentiiren

*) Man kann die Formel (7) auch erhalten, ohne die Regel der Differentiation unter dem Integralzeichen zu benützen, indem man zuerst den Werth von y in der Form

$$y = x\int_0^x \frac{M\,dx'}{EI} - \int_0^x \frac{Mx'}{EI}\,dx' + \int_0^x \frac{AS}{F\Omega}\,dx'$$

schreibt; da die Variable x, bezüglich welcher man den Differentialquotienten nimmt, nicht mehr unter dem Integralzeichen vorkommt, so findet man nun nach der allgemeinen Regel der Differentialrechnung

$$\frac{dy}{dx} = \int_0^x \frac{M\,dx'}{EI} + x\frac{M}{EI} - \frac{Mx}{EI} + \frac{AS}{F\Omega} = \int_0^x \frac{M\,dx'}{EI} + \frac{AS_1}{F\Omega}.$$

$$-P_1 \frac{dy}{dx} - S_1 = (M_1 + P_1 f) \frac{dz}{dx},$$

$$-P_1 \frac{d^2 y}{dx^2} = (M_1 + P_1 f) \frac{d^2 z}{dx^2},$$

so dass die von dem letzten Gliede befreite Gleichung (8) sich folgendermassen darstellt:

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{P_1}{EI} z = 0.$$

Dieser linearen Gleichung zweiter Ordnung mit constanten Coëfficienten wird offenbar Genüge gethan, wenn man für z entweder $\cos\left(x\sqrt{\frac{P_0}{EI}}\right)$ oder $\sin\left(x\sqrt{\frac{P_0}{EI}}\right)$ nimmt; folglich sind diese zwei Werthe zwei partielle Integrale, und das allgemeine Integrale ist sodann

$$z = \frac{M_1 + P_1(f-y) + S_1(l-x)}{M_1 + P_1 f} = C_1 \cos\left(x\sqrt{\frac{P_1}{EI}}\right) + C_2 \sin\left(x\sqrt{\frac{P_1}{EI}}\right),$$

wobei C_1 und C_2 zwei beliebige Constante sind.

Behufs Bestimmung dieser Constanten beachte man, dass für $x = 0$ man $y = 0$ und $\frac{dy}{dx} = \frac{A S_1}{F\Omega}$ haben muss, wie dies aus der ersten der Gleichungen (4) und aus der Gleichung (7) resultirt; drückt man diese Bedingungen mit Hilfe des erhaltenen allgemeinen Integrales aus, so ergibt sich

$$C_1 = \frac{M_1 + P_1 f + S_1 l}{M_1 + P_1 f}, \qquad C_2 = -\sqrt{\frac{EI}{P_1}} \cdot \frac{\frac{A P_1}{F\Omega} + 1}{M_1 + P_1 f} S_1.$$

In dem Werthe für C_2 kann man die Grösse $\frac{A P_1}{F\Omega}$ in Bezug auf die Einheit vernachlässigen, indem man einfach

$$C_2 = -\sqrt{\frac{EI}{P_1}} \cdot \frac{S_1}{M_1 + P_1 f}$$

setzt; denn nimmt man z. B. ein homogenes Prisma, dessen Querschnitt ein Rechteck ist, so hat man $F = \frac{2}{5} E$, $A = \frac{6}{5}$ und folglich $\frac{A P_1}{F\Omega} = 3 \frac{P_1}{E\Omega}$;

nun ist aber die Grösse $\frac{P_1}{E\Omega}$, welche die Verkürzung des Prismas bezüglich der Längeneinheit ausdrückt, immer sehr klein und absolut zu vernachlässigen, im Verhältnisse zur Einheit, welches auch immer die Materie des Prismas sei.

Das oben gefundene allgemeine Integrale gestaltet sich also folgendermassen:

$$\left.\begin{array}{c} M_1 + P_1 (f - y) + S_1 (l - x) \\ = (M_1 + P_1 f + S_1 l) \cos\left(x\sqrt{\frac{P_1}{EI}}\right) - S_1 \sqrt{\frac{EI}{P_1}} \sin\left(x\sqrt{\frac{P_1}{EI}}\right). \end{array}\right\} \quad (9)$$

3. Discussion der Gleichung (9), wenn die tangentiale Kraft S_1 Null ist. Erster specieller Fall. — Wenn die tangentiale Kraft S_1 gleich Null wird, ergibt die Gleichung (9)

$$\frac{M_1 + P_1 (f - y)}{M_1 + P_1 f} = \cos\left(x\sqrt{\frac{P_1}{EI}}\right). \quad (10)$$

Da diese Gleichung die unbekannte Pfeilhöhe f enthält, muss man diese zuerst bestimmen, indem man beachtet, dass für $x = l$ $y = f$ sein muss; man erhält also

$$\frac{M_1}{M_1 + P_1 f} = \cos\left(l\sqrt{\frac{P_1}{EI}}\right),$$

woraus sich ergibt

$$f = \frac{M_1 \left[1 - \cos\left(l\sqrt{\frac{P_1}{EI}}\right)\right]}{P_1 \cos\left(l\sqrt{\frac{P_1}{EI}}\right)}. \quad (11)$$

Wenn die auf die obere Fläche wirkenden Gewichte gleichförmig vertheilt sind, d. h. wenn das Biegungsmoment M_1 Null ist, so resultirt aus der Formel (11), dass im Allgemeinen die Pfeilhöhe f auch Null sein muss. Da übrigens diese Formel auch in der Form

$$f \cos\left(l\sqrt{\frac{P_1}{EI}}\right) = \frac{M_1}{P_1}\left[1 - \cos\left(l\sqrt{\frac{P_1}{EI}}\right)\right]$$

geschrieben werden kann, so sieht man, dass, sobald das Moment M_1 Null ist, man

$$f \cos\left(l\sqrt{\frac{P_1}{EI}}\right) = 0$$

erhält; dieser Gleichung wird dadurch entsprochen, dass entweder die Pfeilhöhe f Null ist, oder dass

$$\cos\left(l\sqrt{\frac{P_1}{EI}}\right) = 0 \quad \text{oder} \quad l\sqrt{\frac{P_1}{EI}} = (2\,n + 1)\frac{\pi}{2} \tag{12}$$

ist, wobei n eine beliebige ganze Zahl ist.

Aus der Gleichung (12) ergibt sich

$$P_1 = (2\,n + 1)^2 \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{EI}{l^2}. \tag{13}$$

Der kleinste Werth dieses Ausdruckes correspondirt mit $n = 0$, und zwar ist derselbe

$$P_1 = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{EI}{l^2}. \tag{14}$$

Daraus erkennt man, dass, wenn auf die obere Basis eines Prismas ein Gewicht P_1 und ein Kräftepaar M_1 wirken, der Körper sich biegen wird, wie gross auch das Gewicht und das Kräftepaar sei, und dass die von der Achse des Körpers gebildete Curve durch die Gleichung (10) dargestellt wird. Wenn man nach der Biegung das Kräftepaar M_1 aufhebt, wird der Träger seine gerade und verticale Richtung wieder annehmen, wie gross auch das Gewicht P_1 sei, vorausgesetzt, dass dessen Werth unterhalb dem durch die Formel (14) Gegebenen bleibt, denn dann kann der Gleichung $f \cos\left(l\sqrt{\frac{P_1}{EI}}\right) = 0$ nur durch $f = 0$ entsprochen werden. Wenn aber das Gewicht P_1 genau diesen Werth hat, so sieht man, dass der Träger gebogen bleibt; denn obiger Gleichung wird dann entsprochen, ohne dass f gleich Null ist, und — was bemerkenswerth ist — welches auch der Werth dieser Pfeilhöhe ist, vorausgesetzt, dass dieselbe sehr klein sei, denn dies ist die anfangs gestellte Bedingung, für welche nur alle erhaltenen Gleichungen anwendbar sind.

Die Gleichung der von der Achse des Körpers nach der Deformation gebildeten Curve wird von der Gleichung (10) abgeleitet, in-

dem man darin $M_1 = 0$ macht und für P_1 dessen Werth (14) einsetzt, so dass

$$y = f\left(1 - \cos\frac{\pi x}{2l}\right). \tag{15}$$



Fig. 34.

Man sieht daraus, dass die Ordinaten proportional zur Pfeilhöhe f sind, welche nach den obigen Betrachtungen eine beliebige Grösse haben kann.

Wird ein verticales Prisma durch ein Gewicht belastet, welches durch die Gleichung (14) bestimmt ist, so wird dasselbe sich nicht biegen, wenn es vollkommen homogen ist; wenn aber eine beliebige äussere Kraft die obere Grundfläche desselben verrückt, so wird das Prisma sich nach der durch die Gleichung (15) bestimmten Curve biegen und die entsprechende Pfeilhöhe bilden. Vermehrt man nun die Belastung — selbst um eine sehr geringe Grösse — so wird sich die Pfeilhöhe bedeutend vergrössern, und es kann der Bruch des Trägers eintreten.

Man sieht daraus, dass in der Praxis die Belastung von Säulen bedeutend unter der durch die Formel (14) bestimmten bleiben muss.

Hieran reiht sich noch eine andere Betrachtung; diese Formel gibt nämlich den kleinsten Werth von P_1, welcher im Stande ist, den Träger gebogen zu erhalten. Die Formel (13) aber gibt eine grosse Anzahl anderer Werthe, denn man kann $n = 1, 2, 3, \ldots$ machen. Um die Bedeutung dieser verschiedenen Werthe von P_1 wohl zu verstehen, beachte man, dass, wenn man in der Gleichung (9) $M_1 = 0$ macht, und wenn man sodann für P_1 dessen allgemeinen Werth (13) substituirt, man als Gleichung der Curve

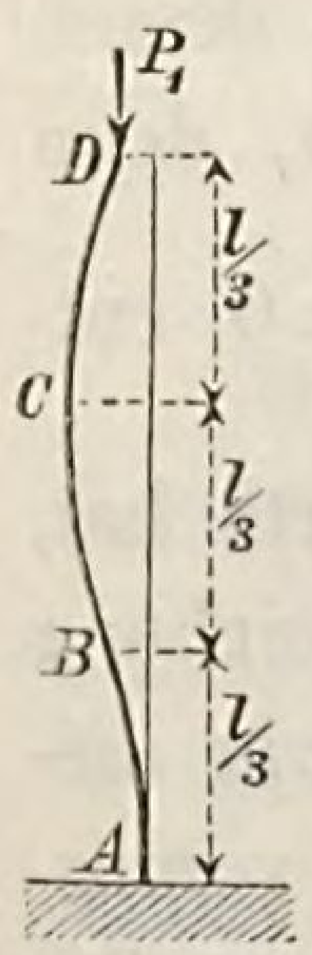


Fig. 35.

$$y = f\left[1 - \cos\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\right] \text{ erhält.}$$

Für den Fall, als z. B. $n = 1$ ist, wird obige Gleichung

$$y = f\left(1 - \cos\frac{3\pi x}{2l}\right),$$

und man erkennt leicht, dass dieselbe nebenstehende Curve vorstellt, welche für die Ordinaten der Punkte B, C, D die Werthe

$$f, \quad 2f, \quad f$$

gibt; der Werth
$$P_1 = 3^2 \frac{\pi^2}{4} \frac{EI}{l^2} = \frac{9\,\pi^2}{4} \frac{EI}{l^2}$$
ist also jener, welcher fähig ist, den Träger $A\,B\,C\,D$ nach der gegebenen Curve gebogen zu erhalten.

Man kann bemerken, dass der mit $n = 1$ correspondirende Werth von P_1 auch erhalten werden kann, indem man bedenkt, dass die drei Stücke $A\,B$, $B\,C$, $C\,D$ vollkommen gleich sind, und dass jedes derselben als an einem Ende eingemauert und an dem anderen durch das Gewicht P_1 belastet gedacht werden kann; z. B. kann das Stück CD als im Punkte C eingemauert betrachtet werden, denn die Tangente in diesem Punkte ist vertical und der Werth des Gewichtes, welches dieses Stück gebogen zu erhalten im Stande ist, wird durch die Formel (14) gegeben, indem man als Länge des Trägers $\frac{l}{3}$ nimmt, d. h. man erhält
$$P_1 = \frac{\pi^2}{4} \frac{EI}{\left(\frac{l}{3}\right)^2} = \frac{9\pi^2}{4} \cdot \frac{EI}{l^2},$$
wie dies die Gleichung (13) auch ergibt, wenn man $n = 1$ macht.

Analoge Ableitungen dienen auch für $n = 2$, $n = 3$ etc.

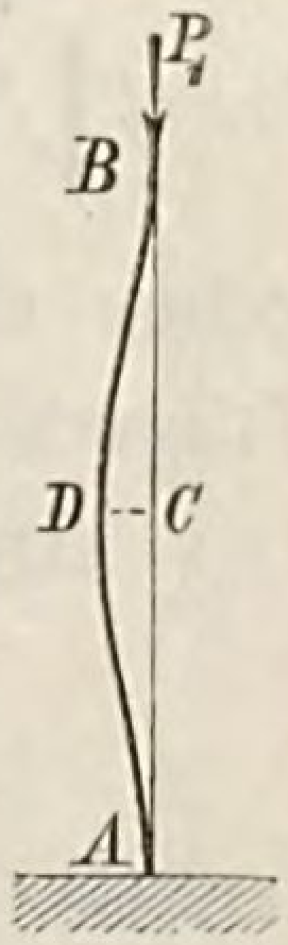


Fig. 36.

4. Anwendung auf einen anderen speciellen Fall, wobei die horizontale Kraft S_1 auch Null ist. — Wenn der Träger auch an seinem oberen Ende eingemauert ist, oder besser gesagt, wenn die obere Fläche des Trägers gezwungen ist, horizontal zu bleiben, und verhindert ist, sich seitlich zu verrücken, so wird die Drehung derselben gleich Null sein und die Pfeilhöhe f oder die Verrückung des oberen Endes muss auch Null sein. Leitet man aus der Gleichung für die Curve den Werth von y in einer Function von x ab, nachdem man darin $f = 0$ gemacht hat, so muss, indem man diesen Werth in die Formel (2) substituirt und dieselbe integrirt, $\theta_1 = 0$ sein; diese Gleichung dient sodann zur Bestimmung des Werthes von M_1.

Nimmt man z. B. einen prismatischen und homogenen Träger, so wird die nach der Deformation von der Achse des Körpers gebildete

Curve durch die Gleichung (9) gegeben sein, und man erhält daraus, indem man $f = 0$ macht,

$$y = \frac{M_1}{P_1}\left[1 - \cos\left(x\sqrt{\frac{P_1}{EI}}\right)\right]. \tag{16}$$

Diese Gleichung muss $y = 0$, sowohl für $x = 0$, als auch für $x = l$ geben, daher muss

$$\cos\left(l\sqrt{\frac{P_1}{EI}}\right) = 1$$

oder

$$l\sqrt{\frac{P_1}{EI}} = 2\,n\,\pi \tag{17}$$

sein, wobei n eine beliebige ganze Zahl ist.

Führt man den durch die Gleichung (16) gegebenen Ausdruck von y in die Formel (2) ein und integrirt sodann, was in diesem Falle keine Schwierigkeiten bietet, da das Product EI constant ist, so erhält man

$$\theta_1 \doteq \frac{M_1 \sin\left(l\sqrt{\frac{P_1}{EI}}\right)}{\sqrt{P_1\,EI}},$$

wobei die rechte Seite der Gleichung offenbar Null wird, wenn man für $l\sqrt{\frac{P_1}{EI}}$ die Werthe $2\,n\,\pi$, welche durch die Gleichung (17) gegeben sind, einführt; es folgt daraus, dass die obere Grundfläche des Trägers factisch horizontal bleibt.

Aus der Gleichung (17) ergibt sich

$$P_1 = 4\,n^2\,\pi^2\,\frac{EI}{l^2} \tag{18}$$

und für $n = 1$

$$P_1 = 4\,\pi^2\,\frac{EI}{l^2}. \tag{19}$$

Dies ist der kleinste Werth des Gewichtes, welches im Stande ist, den Träger AB (s. Fig. 36) gebogen zu erhalten, sobald die obere Grundfläche horizontal bleiben muss und sich nicht horizontal verrücken kann.

Es wurde oben erwähnt, dass in der oberen Grundfläche ein Moment M_1 auftreten muss; um den Werth dieses Momentes zu be-

stimmen, beachte man, dass, wenn in der Gleichung (16) der Curve $x = \frac{l}{2}$ gemacht wird, die Pfeilhöhe f_1 für die Mitte des Trägers erhalten wird, d. h. es ist bei Berücksichtigung von $\frac{l}{2}\sqrt{\frac{P_1}{EI}} = \pi$

$$f_1 = 2\frac{M_1}{P_1},$$

und folglich

$$M_1 = \frac{1}{2} P_1 f_1.$$

Damit man in der oberen Grundfläche die Normalpressung P_1 und das Biegungsmoment M_1 erhalte, genügt es, dass das Gewicht P_1 nach einem linearen Gesetze derart vertheilt ist, dass dessen Resultirende in der Entfernung $\frac{M_1}{P_1}$ oder $\frac{f_1}{2}$ vom Mittelpunkte der Fläche wirkt. In dem Falle also, wo die obere Grundfläche des Trägers gezwungen ist, sich vertical zu senken, indem sie horizontal bleibt, ist es klar, dass, um in dem Träger die der Pfeilhöhe f_1 entsprechende Biegung zu erhalten, immer dasselbe Gewicht P_1 erforderlich ist, wie gross auch diese Pfeilhöhe sei; aber anstatt im Mittelpunkte des Querschnittes zu wirken, muss dasselbe um die Grösse $\frac{f_1}{2}$ von demselben entfernt sein.

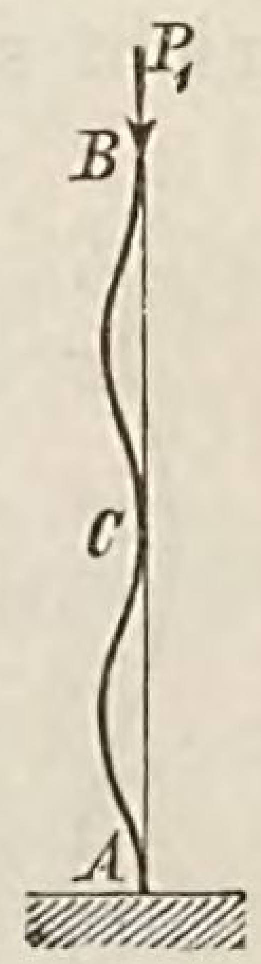


Fig. 37.

Es wurde oben der einzige Fall untersucht, wo $n = 1$ ist; $n = 2$ findet statt, wenn der Mittelpunkt des Trägers gezwungen ist, in der Verticalen AB zu bleiben.

Wenn die drei Punkte des Trägers, welche denselben in drei gleiche Stücke theilen, gezwungen sind, in der Verticalen AB zu bleiben, so hat man $n = 3$ zu nehmen.

Da die Discussion dieser Fälle keine Schwierigkeiten bietet, ist es nicht nothwendig, sich bei derselben länger aufzuhalten.

5. Dritter specieller Fall. — Denkt man sich den prismatischen und homogenen Träger im Mittelpunkte der unteren Grundfläche unterstützt und auf der oberen Fläche durch ein gleichförmig vertheiltes, d. h. durch ein im Mittelpunkte wirkendes Gewicht belastet, so ist dieser

Punkt gezwungen, in der durch den Mittelpunkt der unteren Grundfläche gehenden Verticalen zu verbleiben.

Dieser Fall lässt sich aus dem zuerst betrachteten ableiten; denn offenbar setzt sich die nach der Biegung von der Achse des Trägers gebildete Curve aus zwei vollkommen gleichen Stücken $A\,C$ und $B\,C$ zusammen und der mit dem Mittelpunkte des Trägers correspondirende Querschnitt wird horizontal bleiben, so dass jede Hälfte des Trägers, z. B. BC, als ein am unteren Ende eingemauerter Träger betrachtet werden kann, welcher auf seiner oberen Fläche durch ein gleichförmig vertheiltes Gewicht belastet wird, wie dies in dem zuerst untersuchten Falle angenommen wurde.

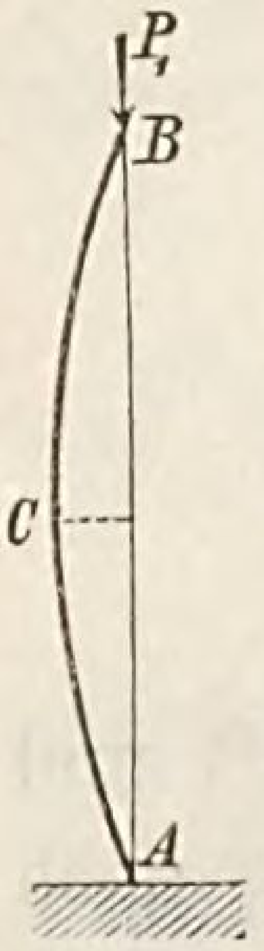


Fig. 38.

Nennt man l die ganze Länge des Trägers, so erhält man den Werth der Kraft P_1, welche im Stande ist, die Biegung zu erhalten, dadurch, dass man in der Formel (14) $\frac{l}{2}$ für l setzt, d. h. es ist

$$P_1 = \pi^2 \frac{E\,I}{l^2}. \tag{20}$$

Wenn der Mittelpunkt des Trägers derart gehalten ist, dass er sich nicht seitlich verrücken kann, so wird sich der Träger in nebenstehend angegebener Weise biegen, d. h. er theilt sich in zwei Theile, deren jeder sich genau unter denselben Bedingungen befindet, welchen der soeben betrachtete Träger unterworfen war; man erhält folglich den Werth der Kraft P_1, welche im Stande ist, die Biegung zu erhalten, durch Substitution von $\frac{l}{2}$ für l in der Gleichung (20), und zwar wie folgt:

$$P_1 = 4\,\pi^2 \frac{E\,I}{l^2}. \tag{21}$$

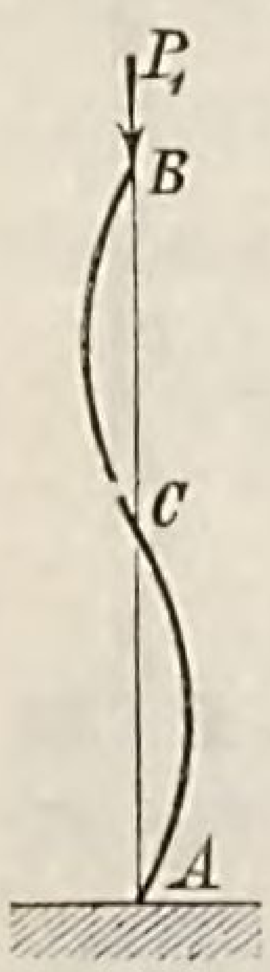


Fig. 39.

6. Discussion der Gleichung (9), wenn das Biegungsmoment M_1 gleich Null ist. — Wenn das Biegungsmoment M_1 gleich Null ist und die Tangentialkraft S_1 einen endlichen Werth hat, so ergibt die Gleichung (9)

$$P_1(f-y) + S_1(l-x) = (P_1 f + S_1 l)\cos\left(x\sqrt{\frac{P_1}{EI}}\right) - S_1\sqrt{\frac{EI}{P_1}}\sin\left(x\sqrt{\frac{P_1}{EI}}\right). \tag{22}$$

Diese Gleichung enthält die Pfeilhöhe f, welche unbekannt ist; um dieselbe zu bestimmen, beachte man, dass für $x = l$ man $y = f$ haben muss, was zu folgender Relation führt:

$$(P_1 f + S_1 l) \cos\left(l\sqrt{\frac{P_1}{EI}}\right) - S_1 \sqrt{\frac{EI}{P_1}} \sin\left(l\sqrt{\frac{P_1}{EI}}\right) = 0, \quad (23)$$

woraus sich der Werth von f in einer Function der Kräfte P_1 und S_1 oder auch der Werth einer dieser Kräfte, wenn die andere und die Pfeilhöhe f gegeben sind, ableiten lässt.

Sucht man z. B. die nothwendige Bedingung, damit die obere Grundfläche sich nicht horizontal verrücken kann, d. h. damit die Pfeilhöhe f Null sei, so ergibt in diesem Falle die Formel (23)

$$S_1 \left[l \cos\left(l\sqrt{\frac{P_1}{EI}}\right) - \sqrt{\frac{EI}{P_1}} \sin\left(l\sqrt{\frac{P_1}{EI}}\right)\right] = 0,$$

und damit derselben entsprochen wird, muss

$$l \cos\left(l\sqrt{\frac{P_1}{EI}}\right) - \sqrt{\frac{EI}{P_1}} \sin\left(l\sqrt{\frac{P_1}{EI}}\right) = 0,$$

oder nach Division durch $\sqrt{\frac{EI}{P_1}} \cos\left(l\sqrt{\frac{P_1}{EI}}\right)$

$$l\sqrt{\frac{P_1}{EI}} - \operatorname{tang}\left(l\sqrt{\frac{P_1}{EI}}\right) = 0. \quad (24)$$

Diese transcendente Gleichung gibt für $l\sqrt{\frac{P_1}{EI}}$ eine unendliche Zahl von Werthen, welche alle in der Formel $(2n+1)\pi + x$ enthalten sind; hiebei ist n eine ganze Zahl und x eine mit den verschiedenen Wurzeln verschiedene Grösse, aber immer kleiner als $\frac{\pi}{2}$. Die kleinste Wurzel ergibt sich für $n = 0$, und da man findet, dass in diesem Falle der Werth von x sehr nahe dem Winkel von 78⁰ entspricht, hat man

$$l\sqrt{\frac{P_1}{EI}} = \pi + \frac{78}{180}\pi = \frac{129}{90}\pi,$$

und folglich

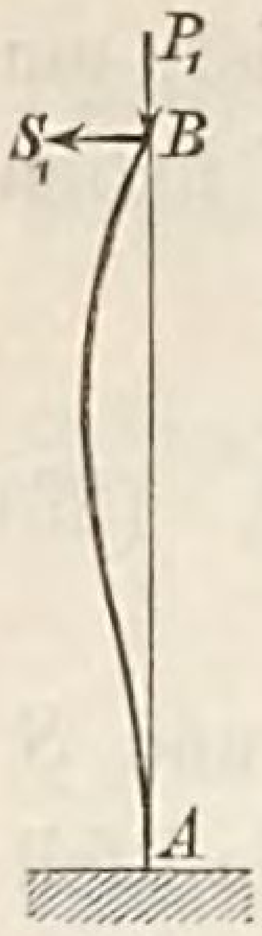


Fig. 40.

$$P_1 = \left(\frac{129}{90}\right)^2 \pi^2 \frac{EI}{l^2} = 2{\cdot}05 \frac{\pi^2 EI}{l^2}. \tag{25}$$

Dies ist also der kleinste Werth der Kraft P_1, welcher im Stande ist, den Träger in der Art gebogen zu erhalten, dass der Mittelpunkt der oberen Fläche keine horizontale Verrückung erleidet.

Für den Fall, als $f = 0$ ist, wird die Gleichung der von der Körperachse gebildeten Curve folgende sein:

$$-P_1 y = S_1 \left[-(l-x) + l \cos\left(x\sqrt{\frac{P_1}{EI}}\right) - \sqrt{\frac{EI}{P_1}} \sin\left(x\sqrt{\frac{P_1}{EI}}\right)\right]; \tag{26}$$

da die Kraft P_1 den oben bestimmten Werth hat, sieht man leicht, dass der Werth von S_1 dennoch unbestimmt bleibt, und dass man alle Ordinaten von y in einem beliebigen Verhältnisse variiren kann, wobei dieselben jedoch immer sehr klein bleiben müssen, wohl vorausgesetzt, dass man im selben Verhältnisse den Werth von S_1 variirt.

Diese sonderbare Eigenschaft ist derjenigen ähnlich, welche in Nummer 4 in Bezug auf M_1 gezeigt wurde.

9. Capitel.

Theorie krummer Balken mit einfacher Krümmung.

1. Deformation krummer Balken mit einfacher Krümmung. — Die nunmehr zu betrachtenden Körper werden als den in Nummer 11 des 4. Capitels ausgedrückten Bedingungen entsprechend angesehen. Diese Bedingungen sind die folgenden:

1. Die Achse des Körpers ist eine ebene Curve;

2. alle Querschnitte haben eine der Trägheitshauptachsen in der Ebene der Curve, und die andere, welche Biegungsachse genannt wird, senkrecht auf diese Ebene;

3. alle auf den Körper wirkenden Kräfte sind derart vertheilt, dass jene rechts von einem beliebigen Querschnitte statisch gleich sind einem Kräftepaare vom Moment M, welches die Biegungsachse des Querschnittes zur Achse hat, und zwei Kräften P und S, im Mittelpunkte des Querschnittes wirkend, deren erste in die Richtung der Normalen, deren zweite in die Richtung der in der Ebene der Curve gelegenen Trägheitshauptachse fällt;

4. die Querdimensionen des Körpers sind im Verhältnisse zu dessen Länge sehr klein.

Wird diesen Bedingungen entsprochen, so wird offenbar bei der Deformation des Körpers dessen Achse nicht aus der ursprünglichen Ebene treten. Da also nur die Drehung der Querschnitte und die Verrückungen der Achspunkte zu bestimmen sind, kann man diese Curve auf zwei in deren Ebene gelegene, rechtwinkelige Coordinatenachsen beziehen.

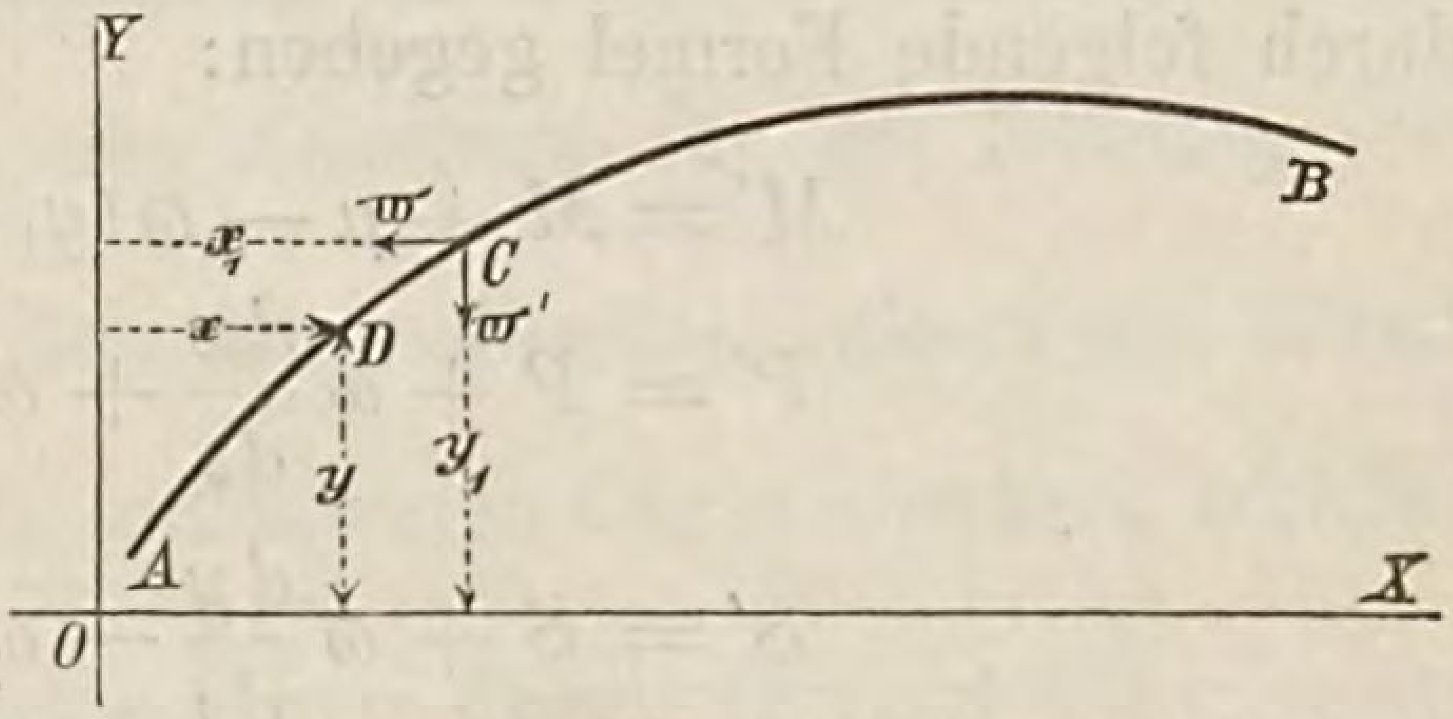


Fig. 41.

Unter diesen Voraussetzungen sei in der nebenstehenden Figur AB die Achse eines Körpers auf zwei rechtwinkelige Achsen OX und OY

bezogen; dieser Körper sei in dem Querschnitte A eingemauert. Es sind nun die Verrückungen eines beliebigen Punktes C der Curve parallel zu den Achsen, sowie die Drehung des diesem Punkte entsprechenden Querschnittes zu suchen.

Nennt man

x_1, y_1 die Coordinaten des Punktes C der Curve,

ξ_1, η_1 die Verrückungen dieses Punktes parallel zu den Achsen,

θ_1 die Drehung des demselben Punkte entsprechenden Querschnittes,

s_1 die Länge der Achse AC,

x, y die Coordinaten eines anderen Punktes D der Curve zwischen A und C,

s die Länge der Achse AD,

M' das Biegungsmoment, P' die Normalpressung und S' die Schubkraft für den Querschnitt D,

E den Elasticitätscoëfficienten des Körpers in diesem Querschnitte,

Ω die Fläche desselben, I dessen Trägheitsmoment und A den Werth des Coëfficienten, welcher in dem Ausdrucke für jene Deformationsarbeit vorkommt, welche von den Tangentialkräften herrührt;

denkt man sich ferner in dem Querschnitte C, ausser den effectiv wirkenden Kräften, noch statische Hilfskräfte, und zwar gleich zwei Kräften ϖ und ϖ', parallel zu den Achsen und einem Kräftepaare η, dessen Achse die Biegungsachse des Querschnittes D ist, und nimmt man schliesslich an, dass alle auf das Stück CB wirkenden Kräfte, einschliesslich der Reactionen der Fixpunkte, sofern deren vorhanden sind, bekannte äussere Kräfte sind, so werden offenbar das Biegungsmoment, die Normalpressung und die Schubkraft bezüglich des Querschnittes D durch folgende Formel gegeben:

$$M' = M + \mu - \varpi(y_1 - y) + \varpi'(x_1 - x)$$

$$P' = P + \varpi \frac{dx}{ds} + \varpi' \frac{dy}{ds};$$

$$S' = S + \varpi \frac{dy}{ds} - \varpi' \frac{dx}{ds}.$$

Die Deformationsarbeit des Stückes AC wird ausgedrückt durch die Formel

$$\frac{1}{2}\int_0^{s_1} \frac{M'^2}{EI}\, d\,s + \frac{1}{2}\int_0^{s_1} \frac{P'^2}{E\Omega}\, d\,s + \frac{1}{2}\int_0^{s_1} \frac{A\,S'^2}{F\,\Omega}\, d\,s\,; \tag{1}$$

jene des Stückes CB kann weder die Kräfte ϖ und ϖ', noch das Kräftepaar μ enthalten; folglich erhält man die Verrückungen ξ_1 und η_1 des Punktes C und die Drehung θ des correspondirenden Querschnittes durch Differentiiren des Ausdruckes (1) nach ϖ, ϖ' und μ, indem man sodann $\varpi = 0$, $\varpi' = 0$, $\mu = 0$ setzt; dies gibt nun

$$\left.\begin{aligned}
\xi_1 &= -\int_0^{s_1} \frac{M(y_1 - y}{EI}\, d\,s + \int_0^{s_1} \frac{P}{E\Omega}\,\frac{dx}{ds}\, d\,s + \int_0^{s_1} \frac{AS}{F\Omega}\,\frac{dy}{ds}\, d\,s\,,\\
\eta_1 &= \int_0^{s_1} \frac{M(x_1 - x)}{EI}\, d\,s + \int_0^{s_1} \frac{P}{E\Omega}\,\frac{dy}{ds}\, d\,s - \int_0^{s_1} \frac{AS}{F\Omega}\,\frac{dx}{ds}\, d\,s\,,\\
\theta_1 &= \int_0^{s_1} \frac{M}{E\,I}\, d\,s.
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Denkt man sich die in diesen Ausdrücken enthaltenen Integrationen ausgeführt, so dass man die Verrückungen ξ_1 und η_1 in Functionen von x_1 und y_1 erhält, und nennt man X_1 und Y_1 die Coordinaten des Punktes C der Körperachse nach der Deformation, so hat man

$$X_1 = x_1 - \xi_1, \qquad Y_1 = y_1 - \eta_1\,; \tag{3}$$

da ξ_1 und η_1 bekannte Functionen von x_1, y_1 sind, kann man diese ursprünglichen Coordinaten zwischen den zwei Gleichungen (3) und der Gleichung der Körperachse vor der Deformation eliminiren, was eine Gleichung zwischen X_1 und Y_1 gibt, welche die Gleichung der Körperachse nach der Deformation sein wird.

Durch Differentiiren dieser Gleichung kann man sodann den allgemeinen Ausdruck von $\frac{d\,Y_1}{d\,X_1}$, d. h. den Ausdruck für die Richtung der Tangente an diese Achse erhalten. Man kann aber auch direct den Werth von $\frac{d\,Y_1}{d\,X_1}$ bezüglich jenes Punktes der deformirten Curve erhalten, welcher mit dem Punkte (x_1, y_1) der ursprünglichen Curve correspondirt; denn durch Differentiiren der Gleichungen (3) mit Bezug auf die Achse s_1 dieser Curve erhält man

$$\frac{dX_1}{ds_1} = \frac{dx_1}{ds_1} - \frac{d\xi_1}{ds_1}, \qquad \frac{dY_1}{ds_1} = \frac{dy_1}{ds_1} - \frac{d\eta_1}{ds_1}$$

und folglich

$$\frac{dY_1}{dX_1} = \frac{\frac{dy_1}{ds_1} - \frac{d\eta_1}{ds_1}}{\frac{dx_1}{ds_1} - \frac{d\xi_1}{ds_1}}. \tag{4}$$

Die Differentiation von ξ_1 und η_1 nach s_1 bietet für die beiden letzten Glieder jedes Ausdruckes keine Schwierigkeiten, denn man hat nur das Integrationszeichen wegzulassen und die Differentiale auf den Punkt C zu beziehen, d. h. alle Grössen mit dem Index 1 zu versehen. Für das erste Glied jedes Ausdruckes, d. h. für jenes Glied, welches das Moment M enthält, muss man jedoch in anderer Weise vorgehen; man hat nun

$$\int_0^{s_1} \frac{M(y_1 - y)}{EI}\, ds = y_1 \int_0^{s_1} \frac{M}{EI}\, ds - \int_0^{s_1} \frac{My}{EI}\, ds$$

und erhält folglich durch Differentiation nach s_1

$$\left(\frac{dy_1}{ds_1}\int_0^{s_1} \frac{M}{EI}\, ds + y_1 \frac{M_1}{E_1 I_1}\right) - \frac{M_1 y_1}{E_1 I_1} = \frac{dy_1}{ds_1}\int_0^{s_1} \frac{M}{EI}\, ds.$$

Gleicherweise ergibt sich

$$\frac{d}{ds_1}\int_0^{s_1} \frac{M(x_1 - x)}{EI}\, ds = \frac{dx_1}{ds_1}\int_0^{s_1} \frac{M}{EI}\, ds.$$

Durch Substitution in den Ausdruck (4) findet man schliesslich

$$\frac{dY_1}{dX_1} = \frac{\frac{dy_1}{ds_1}\left(1 - \frac{P_1}{E_1 \Omega_1}\right) - \frac{dx_1}{ds_1}\left(\int_0^{s_1} \frac{M}{EI}\, ds - \frac{A_1 S_1}{F_1 \Omega_1}\right)}{\frac{dx_1}{ds_1}\left(1 - \frac{P_1}{E_1 \Omega_1}\right) + \frac{dy_1}{ds_1}\left(\int_0^{s_1} \frac{M}{EI}\, ds - \frac{A_1 S_1}{F_1 \Omega_1}\right)}. \tag{5}$$

2. Fälle, in welchen obige Formeln nicht anwendbar sind. — Damit die obigen Formeln direct anwendbar sind, muss eines der Enden des Körpers eingemauert sein, d. h. dasselbe darf sich weder parallel zu seiner Ebene verrücken, noch um seine Biegungsachse drehen; denn für die in vorhergehender Nummer gegebenen Formeln müssen die Integrale von einem Ende genommen werden.

Es kann aber vorkommen und kommt thatsächlich oft vor, dass man Körper zu betrachten hat, von welchen kein Querschnitt eingemauert ist. Dies sind im Allgemeinen jene Körper, welche die Bögen eiserner Dachstühle oder die eisernen Bogenbrücken mit cylindrischen Auflagflächen bilden.

Die für diese Fälle anwendbaren Formeln werden im Nachfolgenden gegeben.

Es sei in nebenstehender Figur AB ein fester Körper, welcher an seinen Enden durch zwei Stücke AI und BH derart abgegrenzt ist, dass sich der Körper in einem einzigen Punkte O des Stückes AI und in einem einzigen Punkte V des Stückes BH aufstützt; der erste dieser Punkte sei fix gedacht, während der zweite gezwungen sein soll, in der Horizontalebene des Stützpunktes zu bleiben, so dass derselbe nur dadurch verrückt werden kann, dass er auf dieser Ebene gleitet.

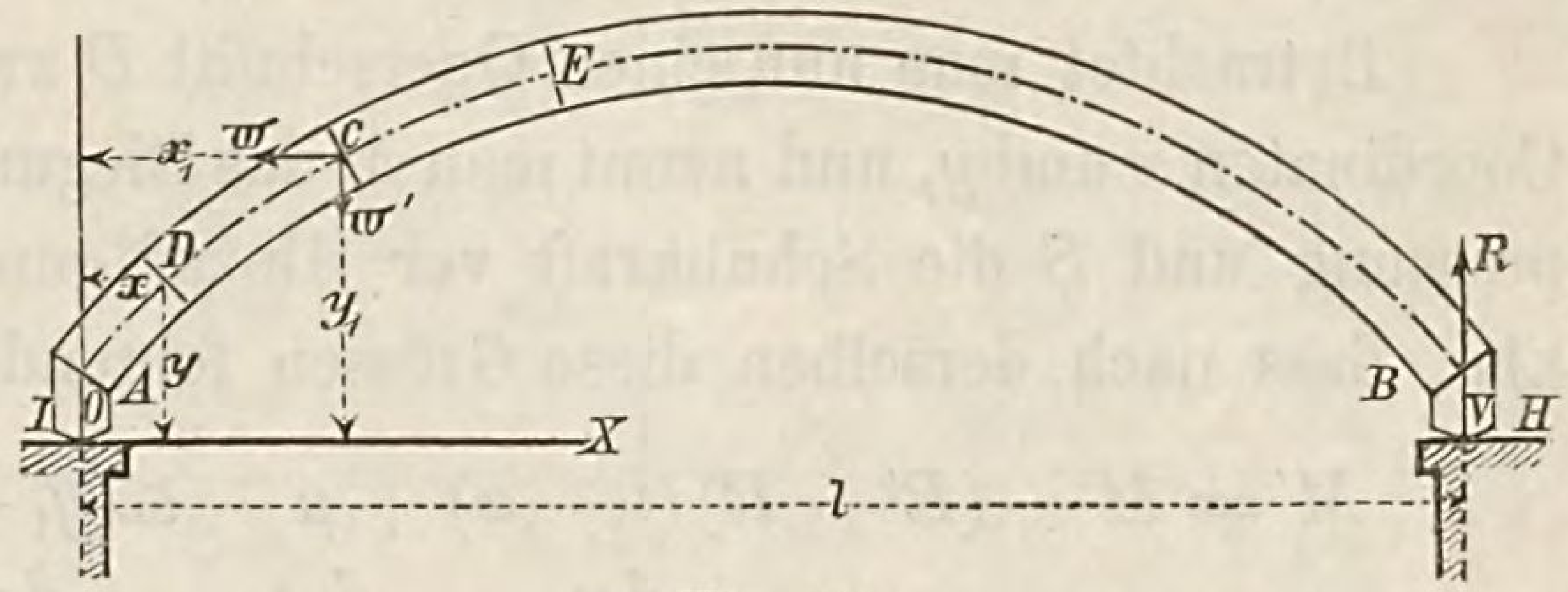


Fig. 42.

Der Körper kann also auf die Stützebenen nur verticale Drücke ausüben, derart, dass man sich die rechte Ebene unter der Voraussetzung entfernt denken kann, dass man in dem Ende V des Körpers eine Kraft oder verticale Reaction R hinzugibt, welche von unten nach oben gerichtet ist, und welche gleich ist dem Drucke auf die Stützebene.

Diesen Körper kann man auf zwei Coordinatenachsen OX und OY beziehen, welche durch den Punkt O gehen, und von welchen die erste horizontal, die zweite vertical ist.

Um die Verrückungen des Punktes C der Körperachse, dessen Coordinaten x_1 und y_1 sind, zu finden, denke man sich, dass ausser den thatsächlich auf den Körper wirkenden Kräften auf den Querschnitt C noch Hilfskräfte thätig seien, welche statisch gleich sind einem Kräftepaare, dessen Moment μ ist, und zwei Kräften ϖ und ϖ', deren eine horizontal, und deren andere vertical ist.

Es wird sich dementsprechend die Reaction R des Stützpunktes V auch ändern, und um den neuen Werth R' zu finden, muss man den Ausdruck dafür suchen, dass das Moment der Differenz $R' - R$ in Bezug auf den Fixpunkt O gleich ist der Summe der Momente der Hilfskräfte bezüglich desselben Punktes, dass nämlich

$$(R' - R)\, l = \mu - \varpi\, y_1 + \varpi'\, x_1$$

ist, woraus folgt, dass

$$R' = R + \frac{\mu - \varpi\, y_1 + \varpi'\, x_1}{l}. \tag{6}$$

Betrachtet man nun einen Querschnitt D zwischen A und C mit den Coordinaten x und y, und nennt man M das Biegungsmoment, P die Normalpressung und S die Schubkraft vor Hinzufügung der Hilfskräfte, so ist klar, dass nach derselben diese Grössen folgende Werthe haben werden:

$$\left.\begin{aligned} M' &= M - (R' - R)(l - x) + \mu - \varpi\,(y_1 - y) + \varpi'\,(x_1 - x), \\ P' &= P - (R' - R)\frac{dy}{ds} + \varpi\,\frac{dx}{ds} + \varpi'\,\frac{dy}{ds}, \\ S' &= S + (R' - R)\frac{dx}{ds} + \varpi\,\frac{dy}{ds} - \varpi'\,\frac{dx}{ds}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Für einen Querschnitt E zwischen C und B ist, wenn man der grösseren Allgemeinheit wegen x und y die Coordinaten seines Mittelpunktes, M das Biegungsmoment, P die Normalpressung und S die Schubkraft vor Hinzufügung der Kräfte ϖ und ϖ' nennt, das Biegungsmoment, die Normalpressung und die Schubkraft nach dieser Hinzufügung offenbar durch folgende Formeln ausgedrückt:

$$\left.\begin{aligned} M'' &= M - (R' - R)(l - x), \\ P'' &= P - (R' - R)\frac{dy}{ds}, \\ S'' &= S + (R' - R)\frac{dx}{ds}. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Nennt man s_1 die Länge des Bogens AC der Körperachse und s_2 die Länge der ganzen Achse AB, so wird die Deformationsarbeit des ganzen Körpers durch folgende Formel gegeben:

$$\frac{1}{2}\left[\int_0^{s_1}\frac{M'^2}{EI}ds+\int_{s_1}^{s_2}\frac{M''^2}{EI}ds\right]$$

$$+\frac{1}{2}\left[\int_0^{s_1}\frac{P'^2}{E\Omega}ds+\int_{s_1}^{s_2}\frac{P''^2}{E\Omega}ds\right]+\frac{1}{2}\left[\int_0^{s_1}\frac{AS'^2}{F\Omega}ds+\int_{s_1}^{s_2}\frac{AS''^2}{F\Omega}ds\right].$$

Man erhält sodann die Verrückungen ξ und η des Mittelpunktes des Querschnittes C und die Drehung desselben, indem man die Differentialquotienten dieses Ausdruckes mit Bezug auf ϖ, ϖ' und μ nimmt und gleichzeitig die Gleichungen (6), (7), (8) berücksichtigt; dies ergibt

$$\begin{cases}\dfrac{dM'}{d\varpi}=\dfrac{y_1}{l}(l-x)-(y_1-y), & \dfrac{dP'}{d\varpi}=\dfrac{y_1}{l}\dfrac{dy}{ds}+\dfrac{dx}{ds}, & \dfrac{dS'}{d\varpi}=-\dfrac{y_1}{l}\dfrac{dx}{ds}+\dfrac{dy}{ds},\\ \dfrac{dM''}{d\varpi}=\dfrac{y_1}{l}(l-x), & \dfrac{dP''}{d\varpi}=\dfrac{y_1}{l}\dfrac{dy}{ds}, & \dfrac{dS''}{d\varpi}=-\dfrac{y_1}{l}\dfrac{dx}{ds},\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{dM'}{d\varpi'}=-\dfrac{x_1}{l}(l-x)+(x_1-x), & \dfrac{dP'}{d\varpi}=-\dfrac{x_1}{l}\dfrac{dy}{ds}+\dfrac{dy}{ds}, & \dfrac{dS'}{d\varpi'}=\dfrac{x_1}{l}\dfrac{dx}{ds}-\dfrac{dx}{ds},\\ \dfrac{dM''}{d\varpi'}=-\dfrac{x_1}{l}(l-x), & \dfrac{dP''}{d\varpi'}=-\dfrac{x_1}{l}\dfrac{dy}{ds}, & \dfrac{dS''}{d\varpi'}=\dfrac{x_1}{l}\dfrac{dx}{ds},\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{dM'}{d\mu}=-\dfrac{1}{l}(l-x)+1, & \dfrac{dP'}{d\mu}=-\dfrac{1}{l}\dfrac{dy}{ds}, & \dfrac{dS'}{d\mu}=\dfrac{1}{l}\dfrac{dx}{ds},\\ \dfrac{dM''}{d\mu}=-\dfrac{1}{l}(l-x), & \dfrac{dP''}{d\mu}=-\dfrac{1}{l}\dfrac{dy}{ds}, & \dfrac{dS''}{d\mu}=\dfrac{1}{l}\dfrac{dx}{ds}.\end{cases}$$

Nimmt man also den Differentialquotienten der Arbeit mit Bezug auf ϖ, so hat man

$$\begin{aligned}\xi_1=&\int_0^{s_1}\frac{M'}{EI}\left[\frac{y_1}{l}(l-x)-(y_1-y)\right]ds+\int_{s_1}^{s_2}\frac{M''}{EI}\frac{y_1}{l}(l-x)\,ds\\ &+\int_0^{s_1}\frac{P'}{E\Omega}\left[\frac{y_1}{l}\frac{dy}{ds}+\frac{dx}{ds}\right]ds+\int_{s_1}^{s_2}\frac{P''}{E\Omega}\frac{y_1}{l}\frac{dy}{ds}ds\\ &+\int_0^{s_1}\frac{AS'}{F\Omega}\left[-\frac{y_1}{l}\frac{dx}{ds}+\frac{dy}{ds}\right]ds+\int_{s_1}^{s_2}\frac{AS''}{F\Omega}\left[-\frac{y_1}{l}\frac{dx}{ds}\right]ds;\end{aligned}$$

man muss nun $\varpi=0$, $\varpi'=0$, $\mu=0$ machen, wodurch M', P', S' und M'', P'', S'' auf M, P, S reducirt wird. In diesem Ausdrucke kann man sodann jene Glieder, welche die gleichen Grössen enthalten, zusammen-

fassen und erhält sodann die erste der folgenden Formeln; die beiden anderen lassen sich in ähnlicher Weise ableiten.

$$\left.\begin{aligned}
\xi_1 = & \;\frac{y_1}{l}\left[\int_0^{s_2}\frac{M(l-x)}{EI}\,ds+\int_0^{s_2}\frac{P}{E\Omega}\frac{dy}{ds}\,ds-\int_0^{s_2}\frac{AS}{F\Omega}\frac{dx}{ds}\,ds\right]\\
& +\left[-\int_0^{s_1}\frac{M(y_1-y)}{EI}\,ds+\int_0^{s_1}\frac{P}{E\Omega}\frac{dx}{ds}\,ds+\int_0^{s_1}\frac{AS}{F\Omega}\frac{dy}{ds}\,ds\right]\\
\eta_1 = & -\frac{x_1}{l}\left[\int_0^{s_2}\frac{M(l-x)}{EI}\,ds+\int_0^{s_2}\frac{P}{E\Omega}\frac{dy}{ds}\,ds-\int_0^{s_2}\frac{AS}{F\Omega}\frac{dx}{ds}\,ds\right]\\
& +\left[\int_0^{s_1}\frac{M(x_1-x)}{EI}\,ds+\int_0^{s_1}\frac{P}{E\Omega}\frac{dy}{ds}\,ds-\int_0^{s_1}\frac{AS}{F\Omega}\frac{dx}{ds}\,ds\right]\\
\theta_1 = & -\frac{1}{l}\left[\int_0^{s_2}\frac{M(l-x)}{EI}\,ds+\int_0^{s_2}\frac{P}{E\Omega}\frac{dy}{ds}\,ds-\int_0^{s_2}\frac{AS}{F\Omega}\frac{dx}{ds}\,ds\right]\\
& +\int_0^{s_1}\frac{M}{EI}\,ds.
\end{aligned}\right\}\quad(9)$$

Diese Formeln lassen sich aber vereinfachen, denn, wenn man θ_0 die Drehung des mit $s_1 = 0$ correspondirenden Querschnittes A nennt, so gibt die dritte unter ihnen

$$\theta_0 = -\frac{1}{l}\left[\int_0^{s_2}\frac{M(l-x)}{EI}\,ds+\int_0^{s_2}\frac{P}{E\Omega}\frac{dy}{ds}\,ds-\int_0^{s_2}\frac{AS}{F\Omega}\frac{dx}{ds}\,ds\right];\quad(10)$$

folglich lassen sich obige Formeln auch folgendermassen schreiben:

$$\left.\begin{aligned}
\xi_1 &= -\theta_0 y_1+\left[-\int_0^{s_1}\frac{M(y_1-y)}{EI}\,ds+\int_0^{s_1}\frac{P}{E\Omega}\frac{dx}{ds}\,ds+\int_0^{s_1}\frac{AS}{F\Omega}\frac{dy}{ds}\,ds\right],\\
\eta_1 &= \theta_0 x_1+\left[\int_0^{s_1}\frac{M(x_1-x)}{EI}\,ds+\int_0^{s_1}\frac{P}{E\Omega}\frac{dy}{ds}\,ds-\int_0^{s_1}\frac{AS}{F\Omega}\frac{dx}{ds}\,ds\right],\\
\theta_1 &= \theta_0+\int_0^{s_1}\frac{M}{EI}\,ds.
\end{aligned}\right\}\quad(11)$$

Vergleicht man diese drei Gleichungen mit der Gruppe (2), so findet man eine überraschende Beziehung, und zwar die, dass die rechten Seiten der Gleichungen (11) von jenen der Gleichungen (2) nur durch die Addition der linearen Glieder von θ verschieden sind. Man könnte in der That zeigen, dass man von der Gruppe (2) zur Gruppe (11) auf Grund einer sehr einfachen Betrachtung gelangen kann; aber der Vor-

gang, mittelst welchem die Gleichungen (11) soeben erhalten wurden, ist nicht weniger einfach und hat den Vortheil, natürlicher zu sein und die Anwendung des Lehrsatzes von den Differentialquotienten der Arbeit immer deutlicher zu zeigen.

3. Anwendung auf einen Bogen mit cylindrischen Auflagflächen. — Die Achse des zu betrachtenden Körpers sei ein Kreisbogen mit der horizontalen Sehne AB. Der Körper selbst sei an seinen Enden durch cylindrische Flächen begrenzt, deren Mittelpunkte in den Tangenten

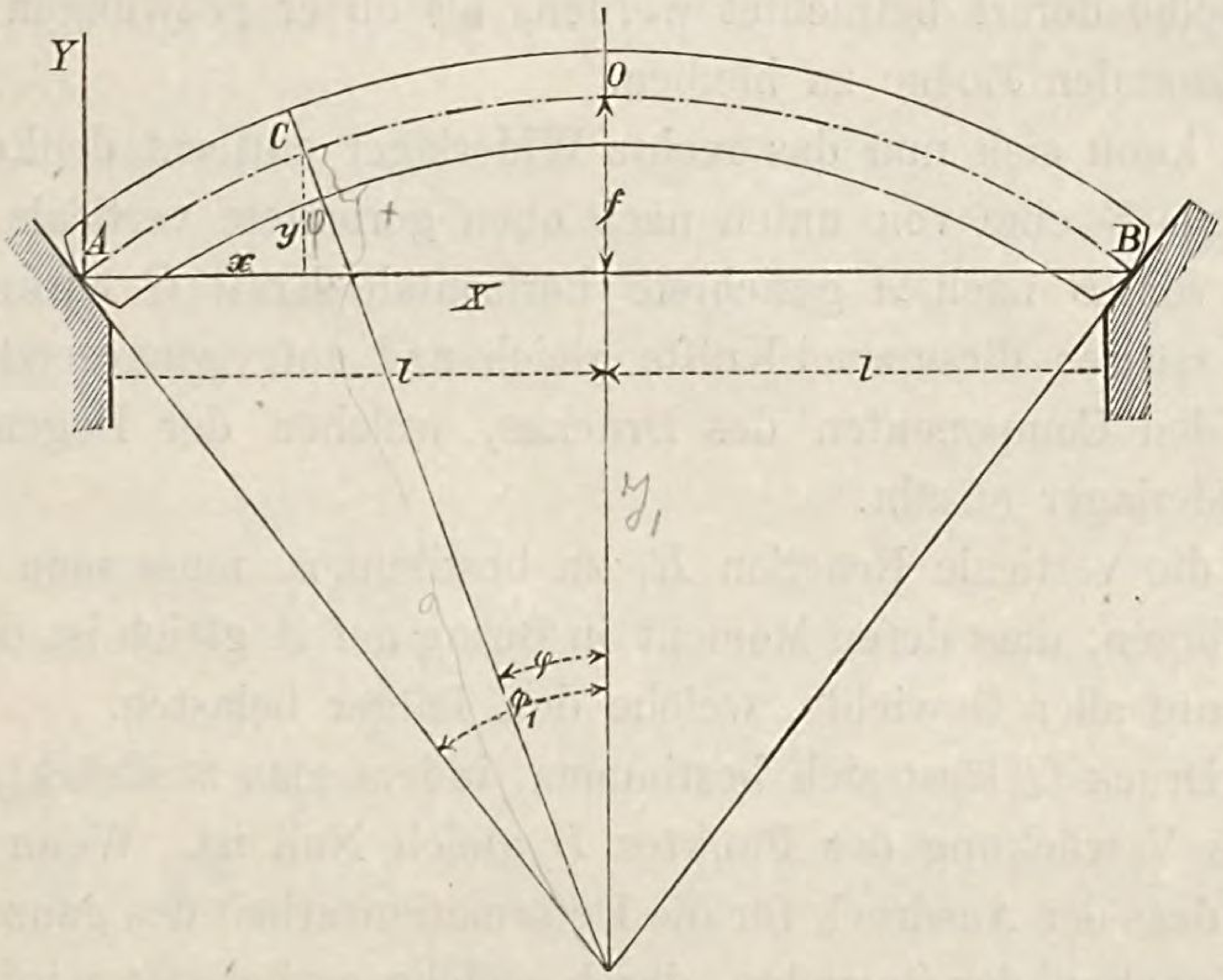


Fig. 43.

liegen, welche man an die Enden des Bogens ziehen kann; ferner seien auch die Stützebenen auf den Widerlagern senkrecht zu diesen Tangenten. In diesem Falle wird offenbar in Folge der Zusammendrückbarkeit die Berührung zwischen den Enden des Bogens und den Widerlagern nicht nur in der mit den Enden A und B correspondirenden Erzeugenden stattfinden, sondern sich ein wenig nach beiden Seiten derselben erstrecken, so dass im Allgemeinen der Druck per Quadratmeter nicht denjenigen Werth erlangen wird, welcher ein Zermalmen herbeiführen könnte.

Man sieht übrigens, dass die Berührungsfläche auf jedem Widerlager sehr klein sein wird, und dass der Mittelpunkt des Druckes beinahe genau mit dem Ende der Achse correspondirt.

Den mittleren Querschnitt des Bogens nennt man *Scheitel*; derselbe ist vertical und bildet die Symmetrieebene für den Bogen, so dass zwei von demselben gleich weit entfernte beliebige Querschnitte untereinander genau gleich sind.

Wenn die Enden des Bogens in der Weise befestigt sind, dass dieselben auf den Widerlagern nicht gleiten können, so fällt die Bestimmung der Deformationen des Bogens mit jenem Falle zusammen, welcher in der letzten Nummer untersucht wurde; denn ist der Punkt B fix, so kann derselbe derart betrachtet werden, als ob er gezwungen wäre, in einer horizontalen Ebene zu bleiben.

Man kann sich nun das rechte Widerlager entfernt denken und in dem Punkte B eine von unten nach oben gerichtete verticale Kraft R_1 und eine von B nach A gerichtete horizontale Kraft Q wirken lassen, und zwar müssen diese zwei Kräfte gleich und entgegengesetzt gerichtet sein mit den Componenten des Druckes, welchen der Bogen auf das rechte Widerlager ausübt.

Um die verticale Reaction R_1 zu bestimmen, muss man zum Ausdrucke bringen, dass deren Moment in Bezug auf A gleich ist der Summe der Momente aller Gewichte, welche den Träger belasten.

Der Druck Q lässt sich bestimmen, indem man ausdrückt, dass die horizontale Verrückung des Punktes B gleich Null ist. Wenn man nun annimmt, dass der Ausdruck für die Deformationsarbeit des ganzen Bogens in einer Function der Gewichte, durch welche er belastet wird, und der Kräfte R_1 und Q erhalten sei, so kann man hierin für R_1 den bekannten Werth einsetzen, so dass der Ausdruck für die Arbeit nur eine einzige Unbekannte Q enthalten wird. Zufolge dem Lehrsatze von den Differentialquotienten der Arbeit gibt der Differentialquotient dieses Ausdruckes mit Bezug auf Q die horizontale Verrückung des Punktes B, und da diese Verrückung Null sein muss, folgt daraus, dass man den Differentialquotienten der Deformationsarbeit des ganzen Bogens mit Bezug auf Q gleich Null setzen muss; oder in anderen Worten: *der Horizontalschub ist durch jenen Werth von Q gegeben, welcher die Deformationsarbeit des ganzen Bogens zu einem Minimum macht.*

Man kann übrigens den Werth von Q auch erhalten, indem man sich der ersten der Formeln (11) bedient.

Sobald der Werth der Unbekannten Q erhalten ist, kann man die Verrückung eines beliebigen Punktes der Achse des Bogens, sowie die Drehung eines beliebigen Querschnittes mit Hilfe der Formeln (11) finden.

Um ein Beispiel hiefür zu geben, denke man sich einen homogenen Bogen von constantem Querschnitte, welcher durch ein in der Achse des Bogens wirkendes und bezüglich deren Horizontalprojection gleichförmig vertheiltes Gewicht belastet wird. Da in diesem Falle in Bezug auf die Scheitelebene Alles symmetrisch ist, kann man sagen, dass die Deformationsarbeit des ganzen Bogens doppelt so gross ist als jene einer Hälfte. Nennt man nun

r den Halbmesser der Achse des Körpers,

φ_1 den halben Winkel am Mittelpunkte, d. h. den Winkel, welchen die äussersten Halbmesser mit der Verticalen bilden,

φ den Winkel, welchen ein beliebiger Querschnitt mit der Verticalen bildet,

M das Biegungsmoment, P die Normalpressung und S die Schubkraft für diesen Querschnitt,

so findet man zuerst für die verticale Reaction an jedem Ende

$$R = p\, r \sin \varphi_1,$$

und sodann

$$\left.\begin{aligned} M &= Q\, r (\cos \varphi - \cos \varphi_1) - \frac{1}{2} p\, r^2 (\sin^2 \varphi_1 - \sin^2 \varphi), \\ P &= Q \cos \varphi + p\, r \sin^2 \varphi, \\ S &= - Q \sin \varphi + p\, r \sin \varphi \cos \varphi. \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Da das Element des Bogens $r\, d\varphi$ ist, so wird offenbar die Deformationsarbeit des halben Bogens durch folgende Formel ausgedrückt werden:

$$\frac{r}{2}\int_0^{\varphi_1} \frac{M^2}{E\,I}\, d\varphi + \frac{r}{2}\int_0^{\varphi_1} \frac{P^2}{E\Omega}\, d\varphi + \frac{r}{2}\int_0^{\varphi_1} \frac{A\,S^2}{F\Omega}\, d\varphi\,;$$

gibt man die constanten Grössen $E\,I$, $E\,\Omega$, $F\,\Omega$ ausserhalb der Integrationszeichen, so erhält man als Formel für die Deformationsarbeit des ganzen Bogens

$$\frac{r}{E\,I}\int_0^{\varphi_1} M^2\, d\varphi + \frac{r}{E\Omega}\int_0^{\varphi_1} P^2\, d\varphi + \frac{r\,A}{F\Omega}\int_0^{\varphi_1} S^2\, d\varphi.$$

Nach dem Vorangegangenen muss man den Differentialquotienten dieses Ausdruckes nach Q gleich Null setzen, um diese Unbekannte zu finden; bei Berücksichtigung der Gleichungen (12) und nach Division durch $2r$ erhält man also

$$\frac{r}{EI}\int_0^{\varphi_1} M(\cos\varphi - \cos\varphi_1)\,d\varphi + \frac{1}{E\Omega}\int_0^{\varphi_1} P\cos\varphi\,d\varphi - \frac{A}{F\Omega}\int_0^{\varphi_1} S\sin\varphi\,d\varphi = 0,$$

oder, indem man für M, P, S deren Werthe (12) setzt und die Integration ausführt

$$\left.\begin{aligned} &Q\left[\frac{r^2}{EI}\left(\frac{\varphi_1 - 3\sin\varphi_1\cos\varphi_1}{2} + \varphi_1\cos^2\varphi_1\right) + \frac{1}{E\Omega}\,\frac{\varphi_1 + \sin\varphi_1\cos\varphi_1}{2}\right.\\ &\qquad\qquad\left. + \frac{A}{F\Omega}\,\frac{\varphi_1 - \sin\varphi_1\cos\varphi_1}{2}\right]\\ &= p\,r\left[\frac{r^2}{2EI}\left(\frac{2}{3}\sin^3\varphi_1 - \varphi_1\sin^2\varphi_1\cos\varphi_1 + \cos\varphi_1\,\frac{\varphi_1 - \sin\varphi_1\cos\varphi_1}{2}\right)\right.\\ &\qquad\qquad\left. + \left(-\frac{1}{E\Omega} + \frac{A}{F\Omega}\right)\frac{\sin^3\varphi_1}{3}\right], \end{aligned}\right\}\quad (13)$$

woraus sich der Werth von Q ergibt.

Da die Pfeilhöhe des Bogens im Verhältnisse zur Sehne desselben sehr klein ist, lässt sich diese Formel bedeutend vereinfachen; nennt man $2l$ die Sehne AB, f die Pfeilhöhe, x und y die Coordinaten des Punktes C in Bezug auf die Sehne AB und deren Senkrechte AY (Fig. 43), so erhält man, wie aus Nummer 4 des 6. Capitels zu ersehen ist, als Gleichung des Bogens AB

$$y = \frac{f}{l^2}(2lx - x^2),$$

woraus sich

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2f}{l^2}(l - x) \quad \text{ergibt.}$$

Da die Grösse $\frac{dy}{dx}$ sehr klein ist, kann man deren Quadrat im Verhältnisse zur Einheit vernachlässigen, so dass

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = 1, \quad \text{oder} \quad ds = dx,$$

und folglich $\frac{dx}{ds} = 1, \qquad \frac{dy}{ds} = \frac{2f(l-x)}{l^2}.$

Das Biegungsmoment, die Normalpressung und die Schubkraft bezüglich des Querschnittes C kann man somit durch folgende Formeln ausdrücken:

$$\left.\begin{aligned} M &= Qy - plx + \frac{1}{2}px^2 = \left(\frac{Qf}{l^2} - \frac{p}{2}\right)(2lx - x^2), \\ P &= Q\frac{dx}{ds} + pl\frac{dy}{ds} - px\frac{dy}{ds} = Q + 2p\frac{f(l-x)^2}{l^2}, \\ S &= Q\frac{dy}{ds} - pl\frac{dx}{ds} + px\frac{dx}{ds} = 2\left(\frac{Qf}{l^2} - \frac{p}{2}\right)(l-x). \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

Die Deformationsarbeit des Bogens wird ausgedrückt durch die Formel

$$\frac{1}{2EI}\int_0^{2l} M^2\, ds + \frac{1}{2E\Omega}\int_0^{2l} P^2\, ds + \frac{A}{2F\Omega}\int_0^{2l} S^2\, ds,$$

oder durch die folgende, indem man für M, P, S deren Werthe (14) substituirt, $ds = dx$ setzt, und die Integrationen ausführt

$$\frac{1}{2EI}\left(\frac{Qf}{l^2} - \frac{p}{2}\right)^2 \frac{16l^5}{15} + \frac{2l}{2E\Omega}\left(Q^2 + \frac{4}{3}Qpf + \frac{4}{5}p^2f^2\right) + \frac{A}{2F\Omega}\left(\frac{Qf}{l^2} - \frac{p}{2}\right)^2 \frac{8l^3}{3}.$$

Setzt man den Differentialquotienten dieses Ausdruckes nach Q gleich Null, so erhält man die Gleichung

$$\left(\frac{8}{15}\frac{f^2}{EI} + \frac{A}{F\Omega}\cdot\frac{4f^2}{3l^2}\right)\left(Q - \frac{pl^2}{2f}\right) + \frac{1}{E\Omega}\left(Q + \frac{2}{3}pf\right) = 0,$$

welche auch folgendermassen geschrieben werden kann:

$$\left(\frac{8}{15}\frac{f^2}{EI} + \frac{4f^2}{3l^2}\frac{A}{F\Omega}\right)\left(Q - \frac{pl^2}{2f}\right) + \frac{1}{E\Omega}\left(Q - \frac{pl^2}{2f} + \frac{pl^2}{2f} + \frac{2}{3}pf\right) = 0,$$

oder

$$\left(\frac{8}{15}\frac{f^2}{EI} + \frac{1}{E\Omega} + \frac{4f^2}{3l^2}\frac{A}{F\Omega}\right)\left(Q - \frac{pl^2}{2f}\right) + \frac{1}{E\Omega}\left(\frac{pl^2}{2f} + \frac{2}{3}pf\right) = 0, \quad (15)$$

woraus man den Werth von Q leicht erhalten kann.

Würde man das letzte Glied der linken Seite der Gleichung vernachlässigen, so ergäbe sich daraus

$$Q - \frac{p\,l^2}{2f} = 0,$$

woraus andererseits auf Grund der Gleichungen (14) folgen würde, dass das Biegungsmoment M und die Schubkraft S für alle Querschnitte gleich Null wären; eine solche Vernachlässigung darf demnach nicht stattfinden und der Werth von Q muss aus der vollständigen Gleichung (15) berechnet werden. Immerhin kann man zur Vereinfachung dieser Gleichung mit genügender Genauigkeit des Schlusswerthes den Ausdruck $\frac{4f^2}{3l^2}\frac{A}{F\Omega}$ vernachlässigen, da derselbe im Allgemeinen im Verhältnisse zu $\frac{1}{E\Omega}$ sehr klein ist, indem er den sehr kleinen Factor $\frac{f^2}{l^2}$ enthält; ferner kann auch der Ausdruck $\frac{2}{3}p\,f$ im Verhältnisse zu $\frac{p\,l^2}{2f}$ vernachlässigt werden; aus Gleichung (15) wird also

$$\left(\frac{8}{15}\frac{f^2}{EI} + \frac{1}{E\Omega}\right)\left(Q - \frac{p\,l^2}{2f}\right) + \frac{1}{E\Omega}\cdot\frac{p\,l^2}{2f} = 0,$$

und es ergibt sich daraus

$$Q = \frac{p\,l^2}{2f}\left\{1 - \frac{\frac{I}{\Omega}}{\frac{8}{15}f^2 + \frac{I}{\Omega}}\right\}. \qquad (16)$$

Diesen Werth kann man nun in die Gleichungen (14) substituiren, welche sodann zur Berechnung des Biegungsmomentes, der Normalpressung und der Schubkraft in einem beliebigen Querschnitte dienen.

Betrachtet man z. B. den Scheitelquerschnitt, d. h. setzt man $x = l$, so erhält man

$$M = -\frac{15}{8}\frac{I}{\Omega f}Q, \qquad P = Q, \qquad S = 0.$$

Man kann nun eine einfache Formel aufstellen, um hiemit sogleich die grösste specifische Pressung zu berechnen, welche im Scheitelquerschnitte stattfindet; denn nennt man v_1 und v_2 die Entfernungen der

Biegungsachse von den entferntesten Fasern an der Innen- und Aussenseite des Bogens, so ist die Spannung per Quadratmeter an der Innenseite des Bogens gleich

$$\frac{M v_1}{I} + \frac{P}{\Omega} = \frac{Q}{\Omega}\left(-\frac{15\, v_1}{8 f} + 1\right),$$

und die an der Aussenseite

$$-\frac{M v_2}{I} + \frac{P}{\Omega} = \frac{Q}{\Omega}\left(\frac{15\, v_2}{8 f} + 1\right). \qquad (17)$$

Aus der Prüfung der Formel (16) lässt sich leicht erkennen, dass bei der Anwendung mit vollkommen genügender Annäherung

$$Q = \frac{p\, l^2}{2 f}$$

genommen werden kann, so dass man zufolge der Gleichung (17) als Formel für die grösste Spannung per Quadratmeter im Scheitel

$$\frac{1}{\Omega}\frac{p\, l^2}{2 f}\left(\frac{15\, v_2}{8 f} + 1\right) \qquad (17^{b})$$

erhält.

Bisher wurden die Bögen mit kleinen Pfeilhöhen, welche bezüglich ihrer Sehne gleichförmig belastet sind, als Bögen betrachtet, bei welchen die Biegungsmomente überall gleich Null sind, d. h. bei welchen die Pressung in einem beliebigen Querschnitte gleichförmig vertheilt ist, und hat man dem Horizontalschub den Werth $\frac{p\, l^2}{2 f}$ gegeben. Für die specifische Pressung im Scheitel ergibt sich daher

$$\frac{1}{\Omega}\frac{p\, l^2}{2 f},$$

und ist dieselbe kleiner als die durch die Formel (17^{b}) genauer gegebene. Hat man z. B. $\frac{v_2}{f} = \frac{1}{8}$, so ist die grösste specifische Pressung im Scheitel zufolge der Gleichung (17^{b})

$$\left(1 + \frac{15}{64}\right)\frac{1}{\Omega}\frac{p\, l^2}{2 f} = 1{,}23 \cdot \frac{1}{\Omega}\frac{p\, l^2}{2 f},$$

so dass die alte Theorie einen Irrthum um ungefähr ein Fünftel des genauen Werthes geben würde. Dieser Irrthum wird noch grösser, wenn man $\frac{v_2}{f} > \frac{1}{8}$ nimmt.

4. Anwendung auf einen Bogen mit ebenen Auflagflächen. — In diesem Falle stützt sich der Bogen mittelst Ebenen, welche senkrecht auf dessen Achse sind, auf die Widerlager. Sind die Enden des

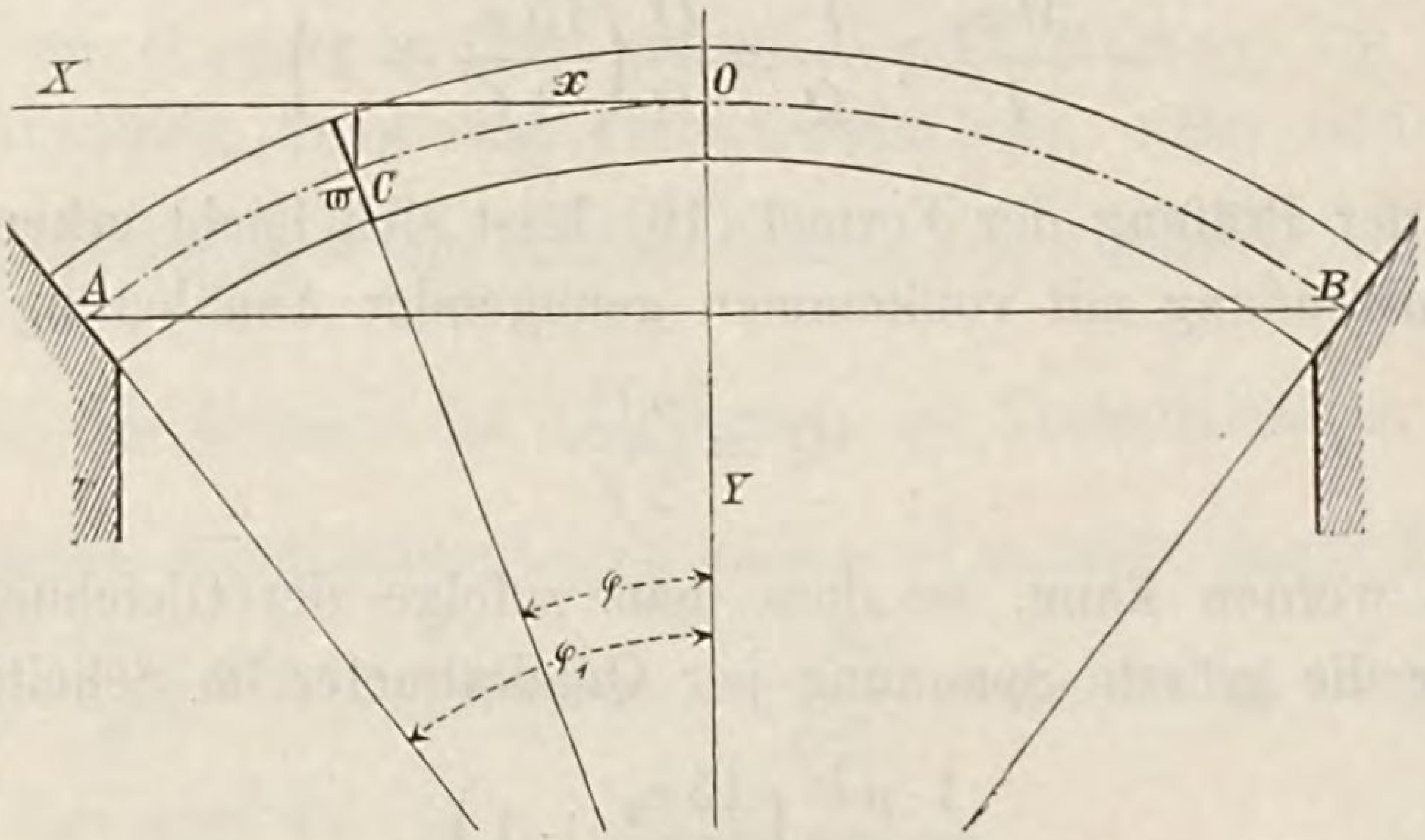


Fig. 44.

Bogens ausserdem noch in der Weise befestigt, dass sie auf den Widerlagern nicht zu gleiten vermögen, so können sich die Stützflächen auch nicht drehen und der Bogen kann als in seinen beiden Widerlagern eingemauert betrachtet werden, so dass man sich zur Bestimmung seiner Deformationen der in Nummer 1 gegebenen Formeln bedienen kann. Jedenfalls muss man die Annahme machen, dass eine der Stützen, z. B. das rechte Widerlager entfernt sei, und dass statt dessen in der äussersten Querschnittsfläche dieser Seite Normal- und Tangentialkräfte wirken, welche ein Biegungsmoment M_1, eine Normalpressung P_1 und eine Schubkraft S_1 geben; diese drei Grössen werden durch die Bedingung bestimmt, dass der Querschnitt sich weder um seine Biegungsachse drehen, noch senkrecht oder parallel zu dessen Ebene gleiten kann.

Wenn aber der Bogen seine Stützflächen in gleicher Höhe hat, und wenn er in Bezug auf die durch den Scheitel gehende Verticalebene vollkommen symmetrisch ist, so dass zwei beliebige, bezüglich dieser Ebene symmetrisch gelegene Querschnitte vollkommen gleich sind, so

kann man die Berechnung sehr vereinfachen, indem man folgenden Weg einschlägt:

Ist M_0 das Biegungsmoment, P_0 die Normalpressung und S_0 die Schubkraft für den Scheitelquerschnitt und denkt man sich den Bogen nach dieser Ebene geschnitten, so kann man die beiden Halbbögen getrennt betrachten, vorausgesetzt, dass man im Scheitel jedes derselben Kräfte wirken lässt, welche ein Biegungsmoment M_0, eine Normalpressung P_0 und eine Schubkraft S_0 geben. Natürlich müssen dieses Moment und diese Kräfte als für beide Halbbögen im entgegengesetzten Sinne wirkend angenommen werden.

Bildet man den Ausdruck für die Deformationsarbeit L des linken Halbbogens und L' des rechten Halbbogens in Functionen der auf jeden Halbbogen wirkenden Kräfte und der drei Grössen M_0, P_0, S_0, so geben die Differentialquotienten

$$\frac{dL}{dM_0}, \quad \frac{dL}{dP_0}, \quad \frac{dL}{dS_0}$$

die Drehung des Scheitelquerschnittes des linken Halbbogens und die Verrückung seines Mittelpunktes in horizontaler und verticaler Richtung; die Differentialquotienten

$$\frac{dL'}{dM_0}, \quad \frac{dL'}{dP_0}, \quad \frac{dL'}{dS_0}$$

geben hingegen die Drehung und die Verrückungen bezüglich des Scheitelquerschnittes des rechten Halbbogens. Nun müssen aber diese drei letzten Differentialquotienten numerisch gleiche Resultate geben mit jenen der drei ersteren, aber mit entgegengesetzten Zeichen; denn erstlich verrückt sich der Scheitelquerschnitt nur in der gleichen Weise, welches auch der Halbbogen sei, in welchem man diesen Querschnitt als gelegen betrachtet; sodann wurden die Grössen M_0, P_0, S_0 als für beide Halbbögen im entgegengesetzten Sinne wirkend angenommen. Man erhält also

$$\frac{dL}{dM_0} + \frac{dL'}{dM_0} = 0, \quad \text{oder} \quad \frac{d(L+L')}{dM_0} = 0,$$

$$\frac{dL}{dP_0} + \frac{dL'}{dP_0} = 0, \quad \text{oder} \quad \frac{d(L+L')}{dP_0} = 0,$$

$$\frac{dL}{dS_0} + \frac{dL'}{dS_0} = 0, \quad \text{oder} \quad \frac{d(L+L')}{dS_0} = 0;$$

woraus folgt, dass zur Bestimmung der Unbekannten M_0, P_0, S_0 man die Differentialquotienten der Deformationsarbeit des ganzen Bogens mit Bezug auf jene gleich Null setzen muss, d. h. *man muss ausdrücken, dass diese Arbeit ein Minimum ist.*

Sind die Werthe der drei Unbekannten bestimmt worden, so kann man mit Hilfe der Gleichungen (2) die Verrückungen eines beliebigen Punktes der Achse, sowie die Drehung eines beliebigen Querschnittes berechnen.

Ist z. B. der specielle Fall zu untersuchen, wo der Bogen einen constanten Querschnitt hat, und wo dessen Achse durch ein bezüglich der Horizontalprojection gleichförmig vertheiltes Gewicht belastet wird, und ist die Achse des Körpers ein Kreisbogen (Fig. 44), so dass bezüglich des Scheitelquerschnittes Alles symmetrisch ist, so wird die Schubkraft für diesen Querschnitt gleich Null. Man hat folglich hier nur zwei Unbekannte, d. h. die Normalpressung und das Biegungsmoment im Scheitel. Nachdem die Deformationsarbeit für beide Halbbögen gleich ist, genügt es, jene eines derselben zu betrachten.

Nennt man φ den Winkel, welchen der Querschnitt C mit dem verticalen Scheitelquerschnitte bildet, und M_0 das Biegungsmoment, sowie P_0 die Normalpressung im Scheitel, so hat man, um das Biegungsmoment, die Normalpressung und die Schubkraft im Querschnitte C auszudrücken, folgende Formeln:

$$\left.\begin{aligned} M &= M_0 - P_0\, r\,(1 - \cos\varphi) + \frac{1}{2}\, p\, r^2 \sin^2\varphi, \\ P &= P_0 \cos\varphi + p\, r \sin^2\varphi, \\ S &= - P_0 \sin\varphi + p\, r \sin\varphi \cos\varphi. \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

Nachdem die Deformationsarbeit eines Halbbogens durch die Formel

$$\frac{r}{2EI}\int_0^{\varphi_1} M^2\, d\varphi + \frac{r}{2E\Omega}\int_0^{\varphi_1} P^2\, d\varphi + \frac{A\, r}{2F\Omega}\int_0^{\varphi_1} S^2\, d\varphi$$

ausgedrückt wird, erhält man, indem man gleichzeitig die Differentialquotienten dieses Ausdruckes bezüglich M_0 und P_0 gleich Null setzt, die zwei Gleichungen:

$$\frac{1}{EI}\int_0^{\varphi_1} M\, d\varphi = 0, \qquad (19)$$

$$-\frac{r}{EI}\int_0^{\varphi_1} M(1-\cos\varphi)\,d\varphi+\frac{1}{E\Omega}\int_0^{\varphi_1} P\cos\varphi\,d\varphi-\frac{A}{F\Omega}\int_0^{\varphi_1} S\sin\varphi\,d\varphi=0. \quad (20)$$

Mit Rücksicht auf die erste Gleichung kann man in der zweiten den Ausdruck $\frac{r}{EI}\int_0^{\varphi_1} M\,d\varphi$ weglassen und erhält somit

$$\frac{r}{EI}\int_0^{\varphi_1} M\cos\varphi\,d\varphi+\frac{1}{E\Omega}\int_0^{\varphi_1} P\cos\varphi\,d\varphi-\frac{A}{F\Omega}\int_0^{\varphi_1} S\sin\varphi\,d\varphi=0. \quad (21)$$

Substituirt man sodann für M, P, S deren Werthe (18) und führt die Integrationen aus, so stellen sich die Gleichungen (19) und (21) folgendermassen dar:

$$M_0\,\varphi_1-P_0\,r\,(\varphi_1-\sin\varphi_1)+\frac{1}{2}\,p\,r^2\,\frac{\varphi_1-\sin\varphi_1\cos\varphi_1}{2}=0, \quad (22)$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{r}{EI}\left[M_0\sin\varphi_1-P_0\,r\left(\sin\varphi_1-\frac{\varphi_1+\sin\varphi_1\cos\varphi_1}{2}\right)+\frac{1}{6}\,p\,r^2\sin^3\varphi_1\right] \\ +\frac{1}{E\Omega}\left[P_0\,\frac{\varphi_1+\sin\varphi_1\cos\varphi_1}{2}+\frac{1}{3}\,p\,r\sin^3\varphi_1\right] \\ +\frac{A}{F\Omega}\left[P_0\,\frac{\varphi_1-\sin\varphi_1\cos\varphi_1}{2}-\frac{1}{3}\,p\,r\sin^3\varphi_1\right] \end{array}\right\}=0, \quad (23)$$

woraus man die Werthe von M_0 und P_0 ableiten kann.

Da die Pfeilhöhe im Verhältnisse zur Sehne sehr klein ist, kann man diese Formeln wesentlich vereinfachen, indem man den Sinus und Cosinus in Functionen des Bogens entwickelt und hiebei nur die ersten Glieder berücksichtigt. Da dieser Fall sehr wichtig ist, wird es besser sein, denselben direct abzuleiten.

Nimmt man als Anfangspunkt der Coordinaten den Mittelpunkt des Scheitelquerschnittes, als x-Achse die Horizontale und als y-Achse die Verticale (Fig. 44), so erhält man als Gleichung der Achse des Körpers

$$x^2=(2\,r-y)\,y,$$

oder annäherungsweise $\qquad x^2=2\,r\,y,$

indem man die Ordinate y in Bezug auf $2\,r$ vernachlässigt, da dieselbe kleiner ist als die Pfeilhöhe, welche ihrerseits im Verhältnisse zum Halbmesser sehr klein ist.

Nennt man l die halbe Sehne und f die Pfeilhöhe des Bogens, welchen die Körperachse bildet, so muss diese Gleichung $y = f$ für $x = l$ geben, so dass

$$l^2 = 2\,r\,f.$$

Zwischen dieser Gleichung und der vorhergehenden kann man den Halbmesser r eliminiren und erhält somit

$$y = f\,\frac{x^2}{l^2}, \tag{24}$$

woraus folgt, dass

$$\frac{d\,y}{d\,x} = 2\,f\,\frac{x}{l^2};$$

die Grösse $\frac{d\,y}{d\,x}$ ist demnach sehr klein, und es kann daher deren Quadrat im Verhältnisse zur Einheit vernachlässigt werden; dies gibt somit

$$\frac{d\,s}{d\,x} = \sqrt{1 + \left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)^2} = 1 \quad \text{oder} \quad d\,s = d\,x$$

und

$$\frac{d\,y}{d\,s} = \frac{d\,y}{d\,x} = 2\,f\,\frac{x}{l^2}.$$

Dies vorausgeschickt, werden das Biegungsmoment, die Normalpressung und die Schubkraft für den mit der Abscisse x correspondirenden Querschnitt durch folgende Formeln ausgedrückt:

$$\left.\begin{aligned}
M &= M_0 - P_0\,y + \frac{1}{2}\,p\,x^2 = M_0 - \left(P_0 - \frac{p\,l^2}{2\,f}\right)\frac{f\,x^2}{l^2},\\
P &= P_0\,\frac{d\,x}{d\,s} + p\,x\,\frac{d\,y}{d\,s} = P_0 + 2\,p\,f\,\frac{x^2}{l^2},\\
S &= -\,P_0\,\frac{d\,y}{d\,s} + p\,x\,\frac{d\,x}{d\,s} = -\left(P_0 - \frac{p\,l^2}{2\,f}\right)\frac{2\,f\,x}{l^2}.
\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Beachtet man, dass für den gewünschten Grad der Genauigkeit $d\,s = d\,x$ erhalten wurde, d. h. dass man die Abscisse statt des Bogens nehmen kann, so wird sich die Formel für die Deformationsarbeit des Halbbogens folgendermassen ausdrücken lassen:

$$\frac{1}{2\,E\,I}\int_0^l M^2\,d\,x + \frac{1}{2\,E\,\Omega}\int_0^l P^2\,d\,x + \frac{A}{2\,F\,\Omega}\int_0^l S^2\,d\,x;$$

die Differentialquotienten dieser Formel nach M_0 und P_0 genommen und gleich Null gesetzt geben folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^l M\,dx = 0, \\ -\frac{1}{EI}\cdot\frac{f}{l^2}\int_0^l &Mx^2\,dx + \frac{f}{E\Omega}\int_0^l P\,dx - \frac{A}{F\Omega}\cdot\frac{2f}{l^2}\int_0^l S x\,dx = 0. \end{aligned}\right\} \quad (26)$$

Substituirt man in diesen Gleichungen für M, P, S deren Werthe (25), und führt man die Integrationen durch, so ergibt dies

$$\left.\begin{aligned} &M_0 - \left(P_0 - \frac{p\,l^2}{2f}\right)\frac{f}{3} = 0; \\ -\frac{fl}{EI}\left[\frac{M_0}{3} - \left(P_0 - \frac{p\,l^2}{2f}\right)\frac{f}{5}\right] + &\frac{l}{E\Omega}\left(P_0 + \frac{2}{3}pf\right) + \frac{A\,l}{F\Omega}\frac{4f^2}{3l^2}\left(P_0 - \frac{p\,l^2}{2f}\right) = 0. \end{aligned}\right\} \quad (27)$$

Aus der ersten Gleichung erhält man

$$M_0 = \left(P_0 - \frac{p\,l^2}{2f}\right)\frac{f}{3}; \quad (28)$$

die zweite ergibt nach Substitution dieses Werthes von M_0

$$\left(\frac{4f^2}{45\,EI} + \frac{A}{F\Omega}\,\frac{4f^2}{3\,l^2}\right)\left(P_0 - \frac{p\,l^2}{2f}\right) + \frac{1}{E\Omega}\left(P_0 + \frac{2}{3}pf\right) = 0,$$

welche Formel man auch in folgender Form schreiben kann:

$$\left(\frac{4f^2}{45\,EI} + \frac{1}{E\Omega} + \frac{4f^2}{3\,l^2}\,\frac{A}{F\Omega}\right)\left(P_0 - \frac{p\,l^2}{2f}\right) + \frac{1}{E\Omega}\left(\frac{p\,l^2}{2f} + \frac{2}{3}pf\right) = 0, \quad (29)$$

woraus man leicht den Werth von P_0 ableiten kann.

Substituirt man diesen Werth in den Ausdruck für M_0, so wird das Biegungsmoment im Scheitel durch eine Function des alleinigen Gewichtes p ausgedrückt.

Um das Biegungsmoment, die Normalpressung und die Schubkraft in den Auflagflächen zu bestimmen, muss man in den Formeln (25) $x = l$ machen, so dass

$$\left.\begin{aligned} M_1 &= M_0 - \left(P_0 - \frac{p\,l^2}{2f}\right)f = \frac{2}{3}\left(P_0 - \frac{p\,l^2}{2f}\right)f, \\ P_1 &= P_0 + 2\,pf, \\ S_1 &= -\left(P_0 - \frac{p\,l^2}{2f}\right)\frac{2f}{l}. \end{aligned}\right\} \quad (30)$$

Mit Hilfe dieser Formeln lässt sich sodann der grösste Normal- und der grösste Tangentialdruck auf die Auflagflächen berechnen.

5. Anwendung auf Bögen von beliebiger Gestalt, welche nach einem continuirlichen Gesetze belastet werden. — Die zwei speciellen Fälle, welche in den beiden vorhergehenden Nummern untersucht wurden, sind, obgleich vom theoretischen Standpunkte sehr wichtig, von keinem grossen Nutzen für die Praxis, indem es selten vorkommt, dass die Querschnitte constant sind, und noch seltener, dass die Belastung auf die Achse des Körpers vertheilt ist.

Der häufigste und allgemeinste Fall ist jener, wo der Querschnitt des Bogens variabel ist, und wo die Belastung nach einem beliebigen Gesetze auf der Aussenseite des Bogens, anstatt auf dessen Achse vertheilt ist.

Die Untersuchung des Elasticitätsgleichgewichtes des Bogens ist in diesem Falle nicht schwieriger als in den beiden oben betrachteten Fällen; man kann sogar sagen, dass dieselbe leichter ist, sobald man die Deformationsarbeit des Bogens mit Hilfe der Annäherungsformel (14), welche in Nummer 6 des 6. Capitels gegeben wurde, ausdrückt.

Um die Wahrheit dieser Behauptung zu beweisen, denke man sich einen Bogen mit cylindrischer Auflage, welcher bezüglich der durch den Scheitel gehenden Verticalebene symmetrisch ist, dessen Querschnitte nach einem continuirlichen Gesetze variabel sind, und welcher nach einem beliebigen Gesetze belastet wird, und zwar continuirlich für beide Halbbögen, aber gleich oder verschieden für beide.

In diesem Falle hat man nur eine einzige Unbekannte, d. h. den Horizontalschub auf die Widerlager, welcher Q genannt wird.

Theilt man nun die Achse jedes Halbbogens in eine gerade Anzahl gleicher Theile, und betrachtet man die durch die Theilungspunkte gehenden Querschnitte, so kann man für jeden dieser Querschnitte das Biegungsmoment, die Normalpressung und die Schubkraft in Functionen der Gewichte, durch welche der Bogen belastet wird, und der Unbekannten Q ausdrücken. Berechnet man ferner für jeden Querschnitt die Fläche, das Trägheitsmoment und den Coëfficienten A der Verschiebung, so kann man mit Hilfe der Formel (14) des 6. Capitels die Deformationsarbeit des ganzen Bogens ausdrücken. Dieser Ausdruck, welcher nur

die Unbekannte Q enthalten kann und vom zweiten Grade ist, muss offenbar die Form

$$\frac{1}{2}(\alpha Q^2 + 2\beta Q + \gamma)$$

haben, wobei α, β, γ numerische Coëfficienten sind.

Der Differentialquotient dieses Ausdruckes gibt die Annäherung beider Stützpunkte des Bogens auf die Widerlager, wenn diese zwei Punkte als frei und durch die Horizontalkraft q in Anspruch genommen betrachtet werden; da in diesem Falle die Annäherung gleich Null sein muss, hat man die Gleichung

$$\alpha Q + \beta = 0,$$

woraus sich $$Q = -\frac{\beta}{\alpha}$$ ergibt.

Den nunmehr bekannten Horizontalschub Q substituirt man in die Ausdrücke für die Biegungsmomente, die Normalpressungen und die Schubkräfte für die in Betracht gezogenen Querschnitte, und erhält somit die numerischen Werthe dieser Elemente.

Der aus dieser Methode hervorgehende annäherungsweise Werth wird um so genauer sein, je grösser die Anzahl der gleichen Theile ist, in welche man die Achse des Bogens getheilt hat, und je kleiner folglich diese Theile selbst sind.

Diese Berechnungen werden nicht länger sein, als wenn man die Integrationen ausführen würde, um mit einem Male den Endwerth des Horizontalschubes zu erhalten; denn selbst in jenen Fällen, wo diese Integration möglich sein wird, muss man offenbar, nachdem der Werth von Q gefunden wurde, doch für eine genügend grosse Anzahl von Querschnitten den numerischen Werth des Biegungsmomentes, der Normalpressung und der Schubkraft suchen, was wieder zu Operationen führt, welche auch für die Anwendung obiger Methode nothwendig sind, nur mit dem Unterschiede zu Gunsten letzterer, dass diese nur sehr einfache numerische Operationen bedingt, während die Methode der Bestimmung von Q mit Hilfe von Integrationen nur in sehr einfachen Fällen der Belastung und des Bogens anwendbar ist, und dass selbst in diesen Fällen sie im Allgemeinen schwierige Rechnungsoperationen bedingt.

Wir wollen hier keine weiteren Anwendungen anfügen, denn bei den numerischen Beispielen werden mehrere vollständige Durchführungen dieser oben angeführten Rechnungsmethode gegeben werden.

6. Mittellinie des Druckes. — Es sei für einen beliebigen Querschnitt eines Körpers

M das Biegungsmoment,

P die Normalpressung.

Die in diesem Querschnitte stattfindenden und nach einem linearen Gesetze vertheilten elastischen Normalkräfte seien derartige, dass ihre Summe gleich P, und dass die Summe ihrer Momente bezüglich der Biegungsachse gleich M ist.

Theilt man dieses Moment durch die Resultirende P, so gibt der Quotient die Entfernung von der Biegungsachse, in welcher diese Resultirende angreifen müsste, um das Moment M zu geben, d. h. die Entfernung von der Biegungsachse, in welcher sich der Mittelpunkt der auf den betrachteten Querschnitt wirkenden elastischen Normalkräfte befindet.

Wir nennen *Druckmittelpunkt eines Querschnittes* den Mittelpunkt der in dem Querschnitte auftretenden elastischen Normalkräfte; und *Mittellinie des Druckes eines Körpers* den geometrischen Ort der Druckmittelpunkte der Querschnitte.

Wenn man ausser den elastischen Normalkräften noch die Tangentialkräfte betrachtet, deren Summe gleich ist der Schubkraft S, so ist offenbar die Resultirende dieser Kraft und der im Druckmittelpunkte wirkenden Normalpressung eine Kraft, welche man *absolute Pressung* nennen kann.

Diese Pressung wird im Allgemeinen bezüglich des Querschnittes eine schiefe Richtung haben. Betrachtet man zwei unendlich nahe Querschnitte, so werden jene Geraden, welche deren *absolute Pressungen* darstellen, sich in einem Punkte treffen; der geometrische Ort dieser Punkte ist eine Curve, welche für jeden beliebigen Querschnitt tangirend ist an die absolute Pressung, d. h. es ist dies die Einhüllungscurve der absoluten Pressungen für alle Querschnitte.

Diese Einhüllungslinie wird von einigen Autoren *Pressungscurve* genannt.

Dieselbe ist im Allgemeinen sehr wenig von der Mittellinie des Druckes verschieden, wenigstens für jene Körper, deren Querdimensionen im Verhältnisse zu deren Länge sehr klein sind.

Man sieht also, dass die Gerade, welche die absolute Pressung in einem Querschnitte darstellt, im Allgemeinen nicht streng tangential an die Mittellinie des Druckes ist; aber sie ist es annäherungsweise, d. h. sie schneidet die Curve unter einem ausserordentlich kleinen Winkel.

Es folgt daraus, dass die Mittellinie des Druckes für einen Körper überall sehr wenig gegen die Achse des Körpers geneigt ist, und dass die absolute Pressung in einem beliebigen Querschnitte mit der Normalen in diesem Querschnitte einen sehr kleinen Winkel bildet, so dass die Schubkraft im Verhältnisse zur Normalpressung auch sehr klein ist.

10. Capitel.

Theorie zusammengesetzter Systeme.

1. Bestimmung der unbekannten elastischen Kräfte. — In Nummer 4, 5, 6 und 8 des 2. Capitels wurde der Lehrsatz von den Differentialquotienten der Arbeit und jener von der kleinsten Arbeit für Systeme von beliebiger Form und Structur bewiesen und hiebei gezeigt, dass diese Lehrsätze, deren zweiter eigentlich nur ein Zusatz zu ersterem ist, genügen, um alle unbekannten elastischen Kräfte, welche in den Systemen stattfinden, zu bestimmen.

Wir wollen aber ausserdem noch einige Betrachtungen anstellen, um die Eigenheiten dieser Lehrsätze, sowie die Art, wie man sich derselben in den praktischen Anwendungen zu bedienen hat, besser hervortreten zu lassen.

2. Aenderung der Unbekannten. — Die Deformationsarbeit eines elastischen Systems sei in einer Function gewisser unbekannter Grössen $P, Q, R, \ldots$ ausgedrückt, welche zufolge der Theorie von den Differentialquotienten der Arbeit dadurch bestimmt werden, dass man die Differentialquotienten der Deformationsarbeit mit Bezug auf diese Unbekannten selbst gleich Null setzt.

Es kommt häufig vor, dass man diese Kräfte in Functionen anderer Unbekannten von gleicher Zahl $p, q, r, \ldots$ ausdrücken kann, welche mit den ersteren durch lineare Ausdrücke in Beziehung stehen, so dass

$$\left.\begin{array}{l} P = a_1 p + b_1 q + c_1 q + \ldots, \\ Q = a_2 p + b_2 q + c_2 q + \ldots, \\ R = a_3 p + b_3 q + c_3 q + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right\} \qquad (1)$$

wobei $a_1, b_1, c_1, \ldots a_2, b_2, c_2, \ldots a_3, b_3, c_3, \ldots$ Coëfficienten sind, welche von den Unbekannten unabhängig sind.

Wir wollen nun eine sehr wichtige Eigenschaft obiger Lehrsätze beweisen, und zwar:

Drückt man die Deformationsarbeit des Systems in einer Function der neuen Unbekannten $p, q, r, \ldots$ aus, so können diese direct bestimmt werden, indem man die Differentialquotienten der Deformationsarbeit mit Bezug auf dieselben gleich Null setzt.

Nennt man L die Deformationsarbeit des Systems, so kann man L als Function der Unbekannten $P, Q, R, \ldots$ und diese wieder als Functionen der neuen Unbekannten $p, q, r, \ldots$ betrachten. Zufolge der bekannten Regeln der Differentialberechnung hat man also

$$\frac{dL}{dp} = \frac{dL}{dP}\frac{dP}{dp} + \frac{dL}{dQ}\frac{dQ}{dp} + \frac{dL}{dR}\frac{dR}{dp} + \ldots;$$

substituirt man hierin für $\frac{dP}{dp}, \frac{dQ}{dp}, \frac{dR}{dp}, \ldots$ deren Werthe $a_1, a_2, a_3 \ldots,$ so erhält man die erste der nachfolgenden Relationen und die anderen ergeben sich in gleicher Weise:

$$\begin{aligned}
\frac{dL}{dp} &= a_1 \frac{dL}{dP} + a_2 \frac{dL}{dQ} + a_3 \frac{dL}{dR} + \ldots, \\
\frac{dL}{dq} &= b_1 \frac{dL}{dP} + b_2 \frac{dL}{dQ} + b_3 \frac{dL}{dR} + \ldots, \\
\frac{dL}{dr} &= c_1 \frac{dL}{dP} + c_2 \frac{dL}{dQ} + c_3 \frac{dL}{dR} + \ldots, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Nachdem zufolge der Annahme

$$\frac{dL}{dP} = 0, \qquad \frac{dL}{dQ} = 0, \qquad \frac{dL}{dR} = 0, \ldots \quad \text{ist,}$$

hat man auch $\frac{dL}{dp} = 0, \quad \frac{dL}{dq} = 0, \quad \frac{dL}{dr} = 0, \ldots;$

dies gibt den Beweis für den oben angeführten Lehrsatz.

Man könnte diesen Lehrsatz direct aus der Betrachtung über das Minimum ableiten; denn wenn die Deformationsarbeit bezüglich der ursprünglichen Unbekannten $P, Q, R, \ldots,$ welche als veränderlich betrachtet werden, ein Minimum sein soll, so muss dies auch bezüglich der

neuen Unbekannten p, q, r, . . . sein, da diese von den ersteren abhängig sind. Wir glauben aber, dass der directe und sehr einfache Beweis, welcher soeben gegeben wurde, als genügend befunden wird.

3. Berechnung symmetrischer Systeme. — Wir haben schon gesehen, dass die in den Constructionen verwendeten elastischen Systeme fast immer eben sind, d. h., dass sie den in Nummer 11 des 4. Capitels ausgedrückten Bedingungen entsprechen.

Ferner kommt es fast immer vor, dass diese Systeme aus zwei vollkommen gleichen und symmetrischen Theilen zusammengesetzt sind.

In diesem Falle kann die Berechnung der unbekannten elastischen Kräfte bedeutend vereinfacht werden; dies tritt ebenfalls ein, wenn die auf das System wirkenden elastischen Kräfte gleich und symmetrisch für beide Hälften sind.

Um den Vorgang zu zeigen, wie man zu diesen Vereinfachungen gelangen kann, untersuchen wir einen speciellen Fall, denn, was man in diesem einen Falle thut, kann man ohne Schwierigkeiten auf alle anderen anwenden.

Man denke sich also ein System, welches aus einem Bogen ACB (in einem Stücke) und aus den Zugstangen AD, DE, etc. zusammengesetzt

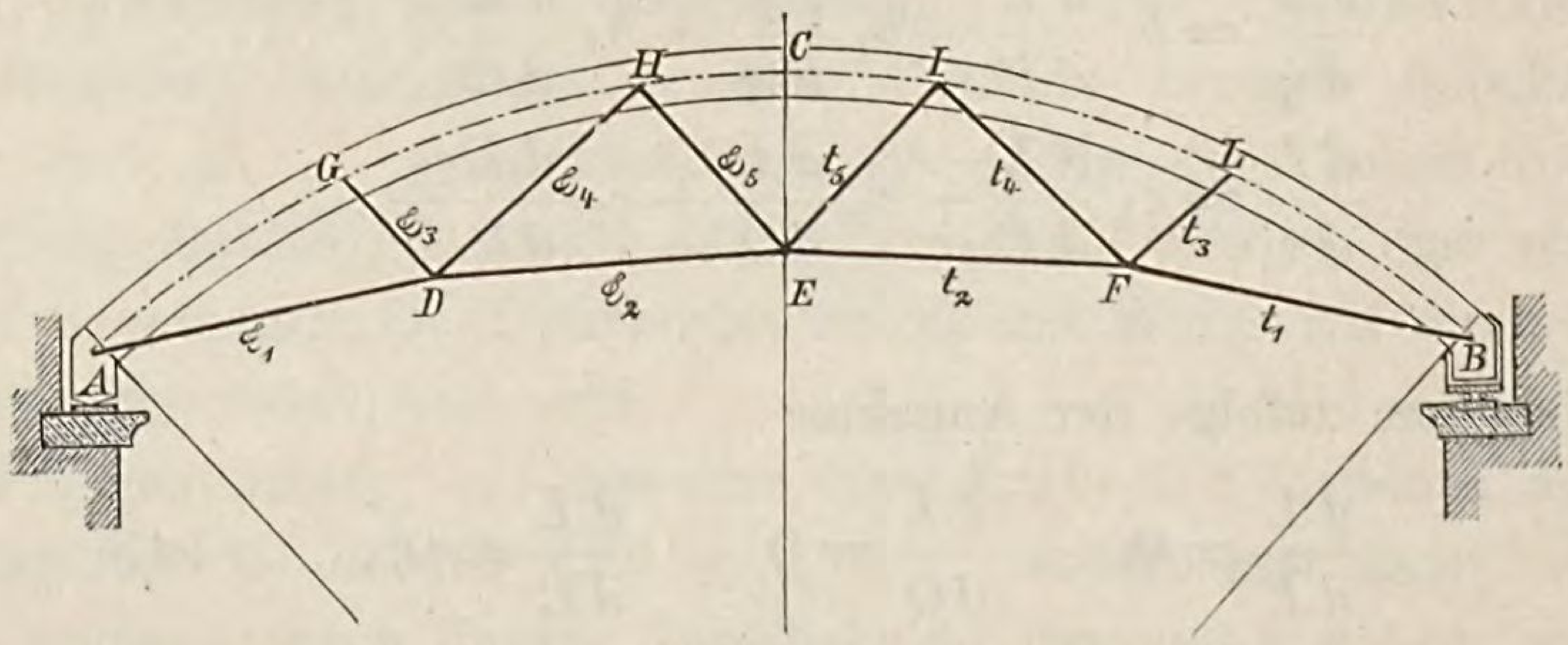


Fig. 45.

ist; die Verbindung derselben unter einander und mit dem Bogen sei mittelst Charnieren bewerkstelligt. Dieses System sei bezüglich der Verticalen CE symmetrisch und an seinen Enden durch cylindrische Flächen abgeschlossen, in Folge welcher es sich auf jeden Pfeiler nur in einem Punkte aufstützt. Ferner denke man sich, dass auf dem rechten Pfeiler in B das Lager durch eine auf eisernen Cylindern ruhende Platte

gebildet wird, welche dem Ende B das freie Gleiten gestattet, so dass dort kein Horizontaldruck stattfinden kann.

Dies vorausgeschickt, seien $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$, $\mathfrak{T}_3$, $\mathfrak{T}_4$, $\mathfrak{T}_5$ die Spannungen in den linksseitigen Zugstangen und t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 die Spannungen in den symmetrisch gelegenen rechtsseitigen Zugstangen.

Da die Spannungen der vier in dem Punkte D zusammenkommenden Zugstangen sich das Gleichgewicht halten müssen, hat man zwischen denselben zwei Gleichungen, aus welchen man $\mathfrak{T}_3$ und $\mathfrak{T}_4$ in Functionen von $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ ausdrücken kann; dasselbe muss auch für den Punkt F stattfinden, und da die Winkel der vier im Punkte D zusammenkommenden Zugstangen gleich sind mit jenen der vier im Punkte F zusammenkommenden Stangen, so folgt daraus, dass die zwei Paare von Gleichungen dieselben Coëfficienten haben, so dass

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{T}_3 &= \alpha\,\mathfrak{T}_1 + \beta\,\mathfrak{T}_2\,, \\ \mathfrak{T}_4 &= \gamma\,\mathfrak{T}_1 + \delta\,\mathfrak{T}_2\,, \end{aligned}\right\} (2), \qquad \left.\begin{aligned} t_3 &= \alpha\,t_1 + \beta\,t_2\,, \\ t_4 &= \gamma\,t_1 + \delta\,t_2\,, \end{aligned}\right\} (3),$$

wobei α, β, γ, δ numerische Coëfficienten sind.

Drückt man ferner aus, dass sich die Spannungen der vier im Punkte E zusammenkommenden Zugstangen das Gleichgewicht halten, so erhält man zwei Gleichungen, aus welchen man $\mathfrak{T}_5$ und t_5 in Functionen von $\mathfrak{T}_2$ und t_2 ableiten kann; auf Grund der Symmetrie des Systems erkennt man, dass die so erhaltenen Gleichungen symmetrisch sind, d. h. dass eine in die andere übergeht, wenn man $\mathfrak{T}$ für t und umgekehrt t für $\mathfrak{T}$ setzt. Nennt man λ und μ zwei bekannte numerische Coëfficienten, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{T}_5 &= \lambda\,\mathfrak{T}_2 + \mu\,t_2\,, \\ t_5 &= \lambda\,t_2 + \mu\,\mathfrak{T}_2\,. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Man sieht also, dass mit Hilfe der Gleichungen (2), (3) und (4) die Spannungen in den zehn Zugstangen in Functionen von vier derselben, d. h. in Functionen von $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$, t_1, t_2 ausgedrückt werden können.

Nennt man nun

l_1, l_2, l_3, l_4, l_5 die Längen der fünf Paare von Zugstangen,

ω_1, ω_2, ω_3, ω_4, ω_5 die entsprechenden Querschnitte,

E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 die Elasticitätscoëfficienten,

so wird offenbar die Deformationsarbeit der Zugstangen durch die Formel

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\mathfrak{S}^2_1 + t^2_1}{E_1\,\omega_1} l_1 + \frac{\mathfrak{S}^2_2 + t^2_2}{E_2\,\omega_2} l_2 + \frac{\mathfrak{S}^2_3 + t^2_3}{E_3\,\omega_3} l_3 + \frac{\mathfrak{S}^2_4 + t^2_4}{E_4\,\omega_4} l_4 + \frac{\mathfrak{S}^2_5 + t^2_5}{E_5\,\omega_5} l_5\right)$$

ausgedrückt. Eliminirt man aus dieser Formel die Spannungen $\mathfrak{S}_3$, $\mathfrak{S}_4$, $\mathfrak{S}_5$, t_3, t_4, t_5 mit Hilfe der Gleichungen (2), (3), (4), so erhält man einen Ausdruck von der Form

$$\frac{1}{2}\left[A\,(\mathfrak{S}^2_1 + t^2_1) + B\,(\mathfrak{S}^2_2 + t^2_2) + 2\,C\,(\mathfrak{S}_1\,\mathfrak{S}_2 + t_1\,t_2) + 2\,D\,\mathfrak{S}_2\,t_2\right], \qquad (5)$$

welcher bezüglich $\mathfrak{S}$ und t symmetrisch ist, und in welchem A, B, C, D numerische Coëfficienten sind.

Wenn man sich nun die Zugstange $A\,D$ weggenommen denkt und statt derselben zwei Kräfte gleich $\mathfrak{S}_1$ wirken lässt, welche in A und D angreifen und gegeneinander gerichtet sind, so erkennt man leicht, dass das Biegungsmoment, die Normalpressung und die Schubkraft in einem beliebigen Querschnitte des Bogenstückes $A\,G$ in Functionen der verticalen Reaction im Stützpunkte A, der Gewichte, durch welche das Stück $A\,G$ belastet wird, und der Spannung $\mathfrak{S}_1$ ausgedrückt werden kann: es wird also die Deformationsarbeit des Stückes $A\,G$ eine Function zweiten Grades von $\mathfrak{S}_1$ sein, in welcher der Coëfficient von $\mathfrak{S}^2_1$ nur von den Hebelarmen der Kräfte und von ihrer Richtung abhängt, während der Coëfficient der ersten Potenz von $\mathfrak{S}_1$ auch von dem Gewichte, durch welches der Bogen belastet wird, abhängig und hievon eine lineare Function ist.

Wenn man sich dann die Zugstangen $D\,E$ und $D\,H$ entfernt denkt, wobei jene $A\,D$ neuerdings an ihren Platz gesetzt worden ist, und wenn man annimmt, dass in den Punkten D, E, H Kräfte wirken, welche gleich sind mit den Spannungen in den entfernten Stangen und welche auch dieselbe Richtung haben, so kann man das Biegungsmoment, die Normalpressung und die Schubkraft in einem beliebigen Querschnitte des Stückes $G\,H$ in Functionen der Reaction im Stützpunkte A, der Gewichte, durch welche der Bogen zwischen A und H belastet wird, und schliesslich der Spannungen $\mathfrak{S}_2$ und $\mathfrak{S}_4$ ausdrücken.

In den so erhaltenen Ausdrücken kann man $\mathfrak{S}_4$ mittelst der zweiten der Gleichungen (2) eliminiren und die Deformationsarbeit des Stückes $G\,H$ wird sich sodann als eine Function zweiten Grades von $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$

ergeben, in welcher die Quadrate und die Producte von $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ Coëfficienten haben, welche von den Gewichten unabhängig sind, durch welche der Bogen belastet wird, während die Glieder des ersten Grades von $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ als Coëfficienten lineare Functionen dieser Gewichte haben.

Denkt man sich endlich die zwei Zugstangen DH und DE wieder an ihre Stelle gesetzt und statt deren die zwei anderen Streben EI und EF entfernt, indem man dieselben in den Punkten E, I, F durch gleichwerthige Kräfte ersetzt, so kann man das Biegungsmoment, die Normalpressung und die Schubkraft in einem beliebigen Querschnitte des Stückes HC in Functionen der Reaction des Stützpunktes A, der Gewichte, durch welche der Halbbogen AC belastet ist, und der Spannungen t_2 und t_3 ausdrücken. Aus den so erhaltenen Ausdrücken kann man t_3 mittelst der zweiten der Gleichungen (4) eliminiren und somit die Deformationsarbeit des Stückes HC durch eine Function zweiten Grades von $\mathfrak{T}_2$ und t_2 ausdrücken.

Addirt man schliesslich die für die Deformationsarbeit der Stücke AG, GH und HC des linken Halbbogens gefundenen Ausdrücke, so erhält man für die Deformationsarbeit des Halbbogens einen Ausdruck von der Form

$$\frac{1}{2}\left(\begin{array}{c} G\,\mathfrak{T}^2_1 + H\,\mathfrak{T}^2_2 + K\,t^2_2 + 2\,J\,\mathfrak{T}_1\,\mathfrak{T}_2 + 2\,L\,\mathfrak{T}_2\,t_2 \\ + 2\,N\,\mathfrak{T}_1 + 2\,Q\,\mathfrak{T}_2 + 2\,R\,t_2 + S, \end{array}\right),$$

wobei die Coëfficienten G, H, K, I, L von den Spannungen in den Zugstangen und von den Gewichten, welche den Bogen belasten, unabhängig sind und nur allein von den Hebelarmen der Zugstangen und von ihrer Richtung abhängen, während N, Q, R lineare Functionen jener Gewichte sind.

Die Deformationsarbeit des rechten Halbbogens wird offenbar durch eine mit der vorhergehenden ganz analoge Formel ausgedrückt, und zwar bildet man diese aus jener, indem man $\mathfrak{T}$ in t und umgekehrt t in $\mathfrak{T}$ verwandelt und indem man die von den Gewichten abhängigen Coëfficienten N, Q, R durch andere Coëfficienten N', Q', R' ersetzt, welch' letztere ebenfalls lineare Functionen dieser Gewichte sind.

Die Deformationsarbeit des ganzen Bogens wird also durch folgende Formel ausgedrückt:

$$\frac{1}{2}\left[\begin{array}{l} G(\mathfrak{S}^2{}_1+t^2{}_1)+(H+K)(\mathfrak{S}^2{}_2+t^2{}_2)+2J(\mathfrak{S}_1\mathfrak{S}_2+t_1t_2)+4L\mathfrak{S}_2t_2 \\ \quad +2N\mathfrak{S}_1+2N't_1+2(Q+R')\mathfrak{S}_2+2(Q'+R)t_2+S+S' \end{array}\right]. \qquad (6)$$

Die Deformationsarbeit des ganzen Systems ergibt sich, wenn man die Formel (6) mit jener (5) vereinigt, und zwar wie folgt:

$$\frac{1}{2}\left[\begin{array}{l} (A+G)(\mathfrak{S}^2{}_1+t^2{}_1)+(B+H+K)(\mathfrak{S}^2{}_2+t^2{}_2)+2(C+J)(\mathfrak{S}_1\mathfrak{S}_2+t_1t_2) \\ +2(D+2L)\mathfrak{S}_2t_2+2N\mathfrak{S}_1+2N't_1+2(Q+R')\mathfrak{S}_2+2(Q'+R)t_2+S+S' \end{array}\right]$$

oder zur Vereinfachung

$$\frac{1}{2}\left[\begin{array}{l} a(\mathfrak{S}^2{}_1+t^2{}_1)+b(\mathfrak{S}^2{}_2+t^2{}_2)+2c(\mathfrak{S}_1\mathfrak{S}_2+t_1t_2) \\ +2d\mathfrak{S}_2t_2+2N\mathfrak{S}_1+2N't_1+2f\mathfrak{S}_2+2gt_2+h \end{array}\right], \qquad (7)$$

wobei a, b, c etc. numerische Coëfficienten sind.

Um die vier unbekannten Spannungen $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$, t_1, t_2 zu bestimmen, muss man die Differentialquotienten des obigen Ausdruckes mit Bezug auf diese Grössen gleich Null setzen. Hiebei ist leicht zu erkennen, dass der Differentialquotient nach $\mathfrak{S}_1$ nur die zwei Unbekannten $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$, jener nach t_1 nur die Unbekannten t_1 und t_2 enthalten wird, dass hingegen die Differentialquotienten nach $\mathfrak{S}_2$ und t_2 drei Unbekannte enthalten werden.

Man kann aber die Rechnung sehr vereinfachen, indem man

$$\left.\begin{array}{ll} \mathfrak{S}_1+t_1=\tau_1, & \mathfrak{S}_2+t_2=\tau_2, \\ \mathfrak{S}_1-t_1=\theta_1, & \mathfrak{S}_2-t_2=\theta_2 \end{array}\right\} \qquad (8)$$

setzt; aus diesen Relationen ergibt sich

$$\left.\begin{array}{ll} \mathfrak{S}_1=\dfrac{\tau_1+\theta_1}{2}, & \mathfrak{S}_2=\dfrac{\tau_2+\theta_2}{2}, \\[2ex] t_1=\dfrac{\tau_1-\theta_1}{2}, & t_2=\dfrac{\tau_2-\theta_2}{2} \end{array}\right\} \qquad (9)$$

und folglich

$$\left.\begin{array}{ll} \mathfrak{S}^2{}_1+t^2{}_1=\dfrac{\tau^2{}_1+\theta^2{}_1}{2}, & \mathfrak{S}^2{}_2+t^2{}_2=\dfrac{\tau^2{}_2+\theta^2{}_2}{2}, \\[2ex] \mathfrak{S}_1\mathfrak{S}_2+t_1t_2=\dfrac{\tau_1\tau_2+\theta_1\theta_2}{2}, & \mathfrak{S}_2t_2=\dfrac{\tau^2{}_2-\theta^2{}_2}{4}. \end{array}\right\} \qquad (10)$$

Substituirt man dies in die Formel (7), so trennt sich dieselbe in zwei Partien, deren eine nur τ_1 und τ_2, deren andere nur θ_1 und θ_2 enthält. Es ergibt sich demnach

$$\frac{1}{4}\left\{\begin{array}{l}[a\tau^2_1+(b+d)\tau^2_2+2c\tau_1\tau_2+2(N+N')\tau_1+2(f+g)\tau_2]\\+[a\theta^2_1+(b-d)\theta^2_2+2c\theta_1\theta_2+2(N-N')\theta_1+2(f-g)\theta_2]+h\end{array}\right\}. \quad (11)$$

Zufolge dem schon in Nummer (2) bewiesenen Lehrsatze über die Aenderung der Unbekannten kann man die Differentialquotienten dieses Ausdruckes mit Bezug auf τ_1, τ_2, θ_1, θ_2 gleich Null setzen, anstatt dies bei den Differentialquotienten des Ausdruckes (7) mit Bezug auf $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$, t_1, t_2 zu thun, so dass man die zwei folgenden Gruppen von Gleichungen mit je zwei Unbekannten erhält, und zwar:

$$\left.\begin{array}{l}a\tau_1+c\tau_2+(N+N')=0,\\c\tau_1+(b+d)\tau_2+(f+g)=0,\end{array}\right\} \quad (12)$$

$$\left.\begin{array}{l}a\theta_1+c\theta_2+(N-N')=0,\\c\theta_1+(b-d)\theta_2+(f-g)=0.\end{array}\right\} \quad (13)$$

Aus diesen Gleichungen kann man mit Leichtigkeit die Werthe von τ_1, τ_2, θ_1, θ_2 ableiten, womit sich dann mittelst der Gleichungen (8) die Werthe von $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$, t_1, t_2 ergeben.

In der Mehrzahl der später zu machenden Anwendungen werden wir uns der soeben angeführten Vereinfachungen bedienen; denn alle Systeme, welche wir zu betrachten haben, sind symmetrisch.

4. Anwendung des Princips der Summirung der Wirkungen bei der Untersuchung der zusammengesetzten Systeme. — Es wurde in Nummer 19 des 1. Capitels und in Nummer 2 des 2. Capitels gezeigt, dass in allen elastischen Systemen, gegliedert oder nicht, ebensowohl die inneren oder elastischen Kräfte, als auch die Verrückungen der verschiedenen Punkte und die Drehungen der Querschnitte lineare Functionen der äusseren Kräfte sind, und dass daher das Princip der Summirung der Wirkungen statthat; d. h. dass, wenn zum Beispiel das System durch verschiedene Gewichte P, Q, R etc. belastet wird, die Spannung in einer Zugstange gleich ist der Summe der Spannungen, welche dieselbe erleiden würde, wenn die Kräfte P, Q, R etc. einzeln auf das System thätig wären.

Dasselbe findet statt für das Biegungsmoment, für die Normalpressung und für die Schubkraft in einem beliebigen Querschnitte.

Dieses Princip ist sehr wichtig, denn es gestattet das Gleichgewicht elastischer Systeme zu studiren, indem man jede der auf dasselbe wirkenden Kräfte für sich untersucht.

Folgende sehr einfache Betrachtung zeigt, welcher Vortheil behufs Vereinfachung der Berechnungen durch den oben angedeuteten Vorgang geboten wird.

Man denke sich, dass zur Berechnung der Unbekannten man das Quadrat der Function p der äusseren Kräfte zu bilden hätte. Da

$$p = \alpha P + \beta Q + \gamma R + \dots \tag{14}$$

ist, so ist es klar, dass, wenn man die äusseren Kräfte jede für sich betrachtet, man in jeder Rechnung nur die Quadrate der Mononome αP, βQ, $\gamma R, \dots$ zu machen hat; wenn aber alle Kräfte gleichzeitig betrachtet werden müssten, so hätte man das Quadrat des allgemeinen Ausdruckes von p zu bilden, und folglich hätte man ausser den Quadraten dieser Mononome alle mögliche Combination der Producte von je zwei dieser Mononome zu machen.

Ein anderer Vortheil des Princips der Summirung der Wirkungen ergibt sich aus folgender Betrachtung: Man denke sich, dass behufs Untersuchung der Gleichgewichtsbedingungen eines bezüglich der Mitte symmetrischen Gespärres man zuerst die unbekannten elastischen Kräfte für die zwei folgenden Fälle bestimmt habe:

1. indem man nur das permanente Gewicht, welches als symmetrisch zur Mitte vertheilt angesehen wird, in Betracht gezogen hat;

2. indem man von dem permanenten Gewichte abgesehen und nur eine zufällige Belastung von p Kilogramm per Quadratmeter der Bedachung auf der linken Hälfte des Dachstuhles betrachtet hat.

Mit Hilfe dieser Resultate kann man offenbar die unbekannten elastischen Kräfte in den verschiedenen Fällen bestimmen, welche in der Praxis von Wichtigkeit sind und welche wir später untersuchen wollen.

Zur grösseren Deutlichkeit wenden wir unsere Betrachtungen auf zwei symmetrische Zugstangen an, welche wir in einem System als vorhanden annehmen, und nennen T' die Spannung dieser zwei Zugstangen, wie sie in der ersten Berechnung erhalten wurde, wo das alleinige permanente Gewicht in Betracht gezogen wurde, und $\mathfrak{T}$ und t die bezie-

hungsweise für die linke und für die rechte Zugstange nach der zweiten Berechnung erhaltenen Spannungen, d. h. für eine Belastung von p Kilogramm per Quadratmeter auf der linken Hälfte des Gespärres, wobei man von dem permanenten Gewichte Abgang nimmt.

Es folgt aus der Symmetrie des Systems, dass, wenn die Belastung von p Kilogramm per Quadratmeter der Bedachung nur für die rechte Seite des Dachstuhles angenommen wird, wobei man immer von dem permanenten Gewichte absieht, die linke Strebe die Spannung t und jene rechts die Spannung $\mathfrak{T}$ haben wird.

Aus dem Principe der Summirung der Wirkungen folgt nun, dass, wenn die Belastung von p Kilogramm per Quadratmeter der Bedachung sowohl auf die linke, als auch auf die rechte Seite des Gespärres vertheilt ist, jede der beiden betrachteten Zugstangen die Spannung

$$\mathfrak{T} + t \tag{15}$$

haben wird.

Wenn man, wie oben, die vollkommene Belastung und das permanente Gewicht gleichzeitig betrachtet, so wird die Spannung in beiden Streben durch

$$T = T' + \mathfrak{T} + t \tag{16}$$

ausgedrückt.

Betrachtet man das permanente Gewicht und die Belastung auf der linken Hälfte als gleichzeitig, so ist

$$T' + \mathfrak{T} \tag{17}$$

die Spannung der linken Zugstange und

$$T' + t \tag{18}$$

jene der rechten Zugstange.

Man kann auch noch den Fall betrachten, wo die Belastung auf der linken Seite p' Kilogramm per Quadratmeter und jene auf der rechten Seite p'' Kilogramm beträgt. Das alleinige permanente Gewicht gibt dann für beide Zugstangen die Spannung T'; die Belastung p', links, gibt für die Zugstange links und für jene rechts die Spannungen

$$\frac{p'}{p}\mathfrak{T}, \qquad \frac{p'}{p}t, \tag{19}$$

die Belastung p'', rechts, gibt für dieselben Zugstangen die Spannungen

$$\frac{p''}{p}t, \qquad \frac{p''}{p}\mathfrak{T}; \tag{20}$$

folglich wird die Endspannung in der linken Zugstange

$$T' + \frac{p'}{p}\mathfrak{T} + \frac{p''}{p}t \tag{21}$$

sein und jene in der rechten

$$T' + \frac{p'}{p}t + \frac{p''}{p}\mathfrak{T}. \tag{22}$$

Wenn in einem symmetrischen Gespärre eine horizontale Zugstange vorkommt, welche in der Mitte von der durch den First gehenden Verticalebene getroffen wird, so wird dieselbe die gleiche Spannung haben, sowohl für eine nur auf die linke Hälfte wirkende Belastung, als auch für eine gleich grosse nur auf die rechte Hälfte wirkende Belastung; folglich wird deren Spannung, im Falle der beiderseitigen Belastung (von dem permanenten Gewichte abgesehen) das Doppelte derjenigen sein, welche sie durch die Belastung auf einer Seite erleidet.

In vielen, im Verlaufe dieses Werkes vorkommenden, praktischen Anwendungen werden die Berechnungen derart gemacht, dass man zuerst die *complete Belastung* betrachtet, d. h. das permanente Gewicht und die zufällige Belastung, sowohl auf der linken, als auch auf der rechten Hälfte und sodann die alleinige Belastung der linken Hälfte, indem man von dem permanenten Gewichte absieht, worauf sich zeigen lässt, dass man aus diesen zwei Fällen den dritten ableiten kann, d. h. jenen Fall, wo man das permanente Gewicht und die nur auf die linke Seite des Gespärres wirkende Belastung in Rechnung zieht. Oben wurde die Formel

$$T = T' + \mathfrak{T} + t$$

erhalten, welche die Spannung der betrachteten zwei symmetrisch gelegenen Zugstangen in dem Falle gibt, als die Belastung sich auf das ganze Gespärre erstreckt, und indem hiebei auch das permanente Gewicht berücksichtigt wird. Aus dieser Formel ergibt sich

$$T' + \mathfrak{T} = T - t, \tag{23}$$

$$T' + t = T - \mathfrak{T}; \tag{24}$$

da $T' + \mathfrak{T}$ und $T' + t$ die Spannungen zweier Zugstangen sind für den Fall eines permanenten Gewichtes und einer Belastung nur auf die linke Hälfte, so folgt daraus:

Für den Fall eines permanenten Gewichtes und einer linksseitigen Belastung erhält man die Spannung in einer von zwei Zugstangen, indem man von der Spannung, welche dieselbe Zugstange bei der completen Belastung haben würde, jene abzieht, welche die symmetrisch gelegene Zugstange bei der alleinigen linksseitigen Belastung haben würde.

Alles soeben für die Spannungen zweier symmetrischer Zugstangen Gesagte lässt sich auch auf die Biegungsmomente, die Normalpressungen und die Schubkräfte in symmetrisch gelegenen Querschnitten anwenden.

Nennt man z. B. für einen in Bezug auf den Scheitel symmetrischen Bogen M und P das Biegungsmoment und die Normalpressung für den Scheitelquerschnitt in dem Falle einer alleinigen Belastung der linken Hälfte des Bogens, wobei man von dem permanenten Gewichte absieht, so wird offenbar in dem Falle, als auch auf der rechten Seite des Bogens die gleiche Belastung stattfindet, das Biegungsmoment und die Normalpressung im Scheitel gleich sein $2M$ und $2P$; deren Verhältniss bleibt aber $\frac{M}{P}$ wie in dem ersten Falle. Es wird also *die Mittellinie des Druckes sowohl bei der Belastung einer einzigen Seite, als auch bei der Belastung beider Seiten durch denselben Punkt im Scheitel gehen.*

5. Beweisführung für den geringen Einfluss, welchen die von der Verschiebung herrührenden Glieder auf die Bestimmung der unbekannten Kräfte oder Spannungen in elastischen Systemen haben. — Alle Systeme, welche wir in der Folge zu untersuchen haben, werden aus einem festen Körper, welcher der Compression, der Biegung und der Abscheerung unterworfen ist, und aus geraden Stäben zusammengesetzt, welche mit diesem Körper und untereinander durch Charniere verbunden sind. Diese Stäbe können also nur Spannungen oder Compressionen unterworfen sein, welche in die Richtung ihrer Achsen fallen.

Oft bildet das der Biegung unterworfene Stück allein das ganze System wie bei den Bögen mit cylindrischer und ebener Auflagfläche,

welche in den Nummern 3 und 4 betrachtet wurden und bei welchen die Widerlager die Verrückung der Bogenenden verhindern.

Für die soeben definirten Systeme hat man offenbar die *Mittellinie des Druckes* nur für das der Biegung unterworfene Stück zu bestimmen; denn für die gegliederten Stäbe fällt diese Curve mit der Achse zusammen.

Durch Prüfung aller numerischer Beispiele, welche später gegeben werden, kann man sich überzeugen, dass die Mittellinie des Druckes für das der Biegung unterworfene Object theils rechts, theils links von der Achse desselben geht, jedoch stets sehr nahe an derselben bleibt und bezüglich dieser Achse sehr wenig geneigt ist, d. h. dass die Tangente an die Mittellinie des Druckes in einem beliebigen Punkte einen sehr kleinen Winkel bildet mit der Tangente in dem correspondirenden Punkte an die Achse des Objectes.

Aus dem in Nummer 6 des vorhergehenden Capitels Gesagtem ist zu ersehen, dass die in einem beliebigen Querschnitte stattfindende absolute Pressung, d. h. die Resultirende aus der Normalpressung und der Schubkraft beinahe tangirend an die Mittellinie des Druckes ist, woraus folgt, dass die Normalpressung überall beinahe gleich sein wird mit der absoluten Pressung, während die Schubkraft in Bezug auf dieselbe sehr klein ist.

Da ferner die Mittellinie des Druckes theils rechts, theils links von der Achse geht, so sieht man, dass nicht nur die Schubkraft überall sehr klein sein wird im Verhältnisse zur Normalpressung, sondern dass dieselbe auch für gewisse Abschnitte positiv, für andere aber negativ ist. Die Normalpressung ist hingegen für alle Querschnitte positiv.

Es werden also für die der Biegung unterworfenen Objecte *die den Schubkräften entsprechenden Deformationen im Verhältnisse zu jenen, welche von den Normalpressungen herrühren, sehr klein sein;* ferner sind, wie aus Nummer 8 des 4. Capitels zu ersehen ist, im Allgemeinen sowohl die einen als auch die anderen im Verhältnisse zu jenen, welche der Biegung entsprechen, sehr klein; da andererseits die in dem elastischen System statthabenden unbekannten Kräfte und Spannungen von den Deformationen abhängen, so kann man den Schluss ziehen, dass es fast immer unnöthig ist, den Einfluss der Schubkräfte, d. h. der

Verschiebungen in Rechnung zu ziehen, sobald es sich darum handelt, die unbekannten Spannungen oder Reactionen zu bestimmen.

Da dieser Schluss für die Abkürzung der Berechnungen sehr wichtig ist, und da man bei allen numerischen Anwendungen daraus Nutzen zieht, erachten wir es für nützlich, durch einige specielle Beispiele die Wahrheit desselben zu zeigen, was auch vorzüglich dazu dient, klarzulegen, wovon es abhängt, dass der Einfluss jener Glieder, welche der Verschiebung entsprechen, sehr klein ist im Verhältnisse zu jenem der von der Compression herrührenden Glieder, obgleich die ersteren, jedes für sich genommen, grösser sein können als die letzteren.

Für den in Nummer 3 des 9. Capitels betrachteten Fall eines Bogens mit cylindrischen Auflagflächen wurde zur Bestimmung der einzigen Unbekannten des Problems, welche der Horizontalschub ist, die Formel (13) gefunden; wenn der Winkel φ gleich $\frac{\pi}{2}$ ist, d. h. wenn die Bogenachse eine halbe Kreislinie ist, so gibt diese Formel

$$Q = \frac{4\,p\,r}{3\,\pi} \frac{\frac{r^2}{EI} - \frac{1}{E\Omega} + \frac{A}{F\Omega}}{\frac{r^2}{EI} + \frac{1}{E\Omega} + \frac{A}{F\Omega}} \tag{25}$$

oder
$$Q = \frac{4\,p\,r}{3\,\pi} \frac{a - x}{a + y},$$

indem man $\frac{r^2}{EI} = a, \quad \frac{1}{E\Omega} - \frac{A}{F\Omega} = x, \quad \frac{1}{E\Omega} + \frac{A}{F\Omega} = y$ macht.

Die Grössen x und y sind im Verhältnisse zur Grösse a sehr klein, wie schon mehrfach gezeigt wurde; man erhält also, wenn man die Grössen von $\frac{x}{a}$ und $\frac{y}{a}$ vom höheren Grade als vom ersten vernachlässigt,

$$\frac{a - x}{a + y} = \frac{a - x}{a}\left(1 + \frac{y}{a}\right)^{-1} = \frac{(a - x)\left(1 - \frac{y}{a}\right)}{a} = \frac{a - x - y}{a};$$

der Ausdruck für den Horizontalschub wird dann, wenn man für a, x, y deren Werthe setzt,

$$Q = \frac{4\,p\,r}{3\,\pi} \frac{\frac{r^2}{EI} - \frac{2}{E\Omega}}{\frac{r^2}{EI}}.$$

Zu diesem Resultate würde man offenbar auch gekommen sein, wenn man von der Formel

$$Q = \frac{4\,p\,r}{3\,\pi} \frac{\frac{r^2}{EI} - \frac{1}{E\Omega}}{\frac{r^2}{EI} + \frac{1}{E\Omega}}$$

ausgegangen wäre, wobei sowohl im Nenner, als auch im Zähler das Glied $\frac{A}{F\Omega}$, welches der Verschiebung entspricht, ausgelassen wurde, und ergibt sich daraus, dass dieses Glied einen unbedeutenden Einfluss auf den Werth von Q hat.

Man muss wohl beachten, dass das Glied $\frac{A}{F\Omega}$ im Verhältnisse zu dem Gliede $\frac{1}{E\Omega}$ nicht sehr klein ist, sondern im Allgemeinen grösser sein wird; wenn dasselbe nichtsdestoweniger geringen Einfluss auf den Werth von Q hat, so hat dies seinen Grund darin, dass dieses Glied sowohl im Nenner als auch im Zähler dasselbe Zeichen hat wie das Glied $\frac{r^2}{EI}$, welches der Biegung entspricht, während das Glied $\frac{1}{E\Omega}$ verschiedene Zeichen hat.

Da die Pfeilhöhe im Verhältnisse zur Sehne des Bogens sehr klein ist, wird der Horizontalschub Q durch die Gleichung (15) bestimmt, d. h. durch

$$\left(\frac{8}{15}\frac{f^2}{EI} + \frac{1}{E\Omega} + \frac{4f^2}{3\,l^2}\frac{A}{F\Omega}\right)\left(Q - \frac{p\,l^2}{2f}\right) + \frac{1}{E\Omega}\left(\frac{p\,l^2}{2f} + \frac{2}{3}\,p\,f\right) = 0; \quad (26)$$

da ferner die Grösse $\frac{A}{FA}$ von demselben Grade ist wie die Grösse $\frac{1}{E\Omega}$, und der Bruch $\frac{f^2}{l^2}$ sehr klein ist, kann man das Glied $\frac{4f^2}{3\,l^2}\,\frac{A}{F\Omega}$ im Verhält-

nisse zu jenem $\frac{1}{E\Omega}$ vernachlässigen, so dass obige Gleichung sich folgendermassen darstellt:

$$\left(\frac{8}{15}\frac{f^2}{EI}+\frac{1}{E\Omega}\right)\left(Q-\frac{p\,l^2}{2f}\right)+\frac{1}{E\Omega}\left(\frac{p\,l^2}{2f}+\frac{2}{3}p\,f\right)=0,$$

d. h. dass sie kein von der Verschiebung herrührendes Glied enthält.

Wäre nunmehr ein Bogen mit ebenen Auflagflächen zu betrachten, wie derselbe in Nummer 4 des vorhergehenden Capitels untersucht wurde, so hat man die zwei Unbekannten M_0 und P_0, welche durch die beiden Gleichungen (22) und (23) bestimmt sind.

Ist der Winkel φ wieder gleich $\frac{\pi}{2}$, so ergeben diese zwei Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}&M_0\frac{\pi}{2}-P_0\,r\left(\frac{\pi}{2}-1\right)+\frac{\pi}{8}p\,r^2=0,\\ &\frac{r}{EI}\left[M_0-P_0\,r\left(1-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{6}p\,r^2\right]+\frac{1}{E\Omega}\left(P_0\frac{\pi}{4}+\frac{1}{3}p\,r\right)\\ &\qquad+\frac{A}{F\Omega}\left(P_0\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}p\,r\right)=0;\end{aligned}\right\}\tag{27}$$

substituirt man in die zweite Gleichung den Werth von M_0 aus der ersten, so erhält man, indem man gleichzeitig die ähnlichen Ausdrücke vereinigt,

$$\left[\frac{r^2}{EI}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\right)+\frac{1}{E\Omega}\frac{\pi}{4}+\frac{A}{F\Omega}\frac{\pi}{4}\right]P_0=\left(\frac{r^2}{12\,EI}-\frac{1}{3E\Omega}+\frac{A}{3F\Omega}\right)p\,r;$$

bei Berücksichtigung, dass annäherungsweise

$$\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}=\frac{10}{53}\frac{\pi}{4}$$

ist, ergibt obige Formel

$$P_0=\frac{4\,p\,r}{3\,\pi}\cdot\frac{\dfrac{r^2}{4EI}-\dfrac{1}{E\Omega}+\dfrac{A}{F\Omega}}{\dfrac{10\,r^2}{53\,EI}+\dfrac{1}{E\Omega}+\dfrac{A}{F\Omega}}\tag{28}$$

oder auch
$$P_0=\frac{4\,p\,r}{3\,\pi}\,\frac{a-x}{b+y},$$

wenn man

$$\frac{r^2}{4EI}=a,\quad \frac{10\,r^2}{53\,EI}=b,\quad \frac{1}{E\Omega}-\frac{A}{F\Omega}=x,\quad \frac{1}{E\Omega}+\frac{A}{F\Omega}=y$$

macht.

Da die Grössen x und y im Verhältnisse zu den Grössen a und b sehr klein sind, kann man nehmen

$$\frac{a-x}{b+y}=\frac{a-x}{b}\left(1+\frac{y}{b}\right)^{-1}=\frac{(a-x)\left(1-\frac{y}{b}\right)}{b}=\frac{a-x-\frac{a}{b}y}{b},$$

indem man die Grössen von $\frac{x}{a}$ und $\frac{y}{b}$ vom höheren als vom ersten Grade vernachlässigt; substituirt man sodann für a, b, x, y wieder deren Werthe, so erhält man

$$P_0=\frac{4\,p\,r}{3\,\pi}\cdot\frac{\frac{r^2}{4EI}-\frac{93}{40}\frac{1}{E\Omega}-\frac{13}{40}\frac{A}{F\Omega}}{\frac{10\,r^2}{53\,EI}}.$$

Um diese Formel zu discutiren, genügt es, den Zähler des Ausdruckes von P_0 zu betrachten oder besser noch die alleinige Grösse

$$\frac{r^2}{4EI}-\frac{93}{40}\frac{1}{E\Omega}-\frac{13}{40}\frac{A}{F\Omega},$$

und die zwei letzten Glieder, welche als im Verhältnisse zu dem ersten sehr klein schon bekannt sind, unter einander zu vergleichen.

Nimmt man nun an, dass der Bogen nicht allein homogen, sondern auch isotrop, und dass sein Querschnitt rechteckig sei, so hat man

$$A=\frac{6}{5},\qquad F=\frac{2}{5}E,\qquad \frac{13}{40}\frac{A}{F\Omega}=\frac{39}{40}\cdot\frac{1}{E\Omega},$$

so dass obiger Ausdruck folgende Form annimmt:

$$\frac{r^2}{4EI}-\frac{93}{40}\cdot\frac{1}{E\Omega}-\frac{39}{40}\cdot\frac{1}{E\Omega}=\frac{r^2}{4EI}-\frac{132}{40}\cdot\frac{1}{E\Omega};$$

da das Glied $\qquad \frac{13}{40}\cdot\frac{A}{F\Omega}=\frac{39}{40}\cdot\frac{1}{E\Omega}$

beinahe zwei Siebentel des Gliedes $\frac{132}{40} \cdot \frac{1}{E\Omega}$ beträgt, so sieht man, dass das von der Verschiebung herrührende Glied nur zwei Siebentel der Summe dieses und des der Normalpressung entsprechenden Gliedes ist; da andererseits diese Summe im Verhältnisse zu dem von der Biegung herrührenden Gliede $\frac{r^2}{4EI}$ sehr klein ist, folgt daraus, dass man diese zwei Siebentel vernachlässigen kann, ohne einen zu grossen Fehler zu begehen.

Ausserdem muss man beachten, dass der Bogen mit ebenen Auflagflächen, welcher als Achse einen Halbkreis hat, einen bezüglich der Verschiebung sehr ungünstigen Fall darstellt; denn die Mittellinie des Druckes ergibt sich für einen grossen Theil ihrer Länge als sehr geneigt gegen die Körperachse, d. h. die Schubkräfte sind im Verhältnisse zu den Normalpressungen nicht sehr klein.

Mit Hilfe der Formeln (22) und (23) kann man leicht erkennen, dass, wenn die Achse des Körpers wohl ein Kreisbogen, aber kleiner als ein Halbkreis ist, die Wirkung der Verschiebung im Verhältnisse zu jener, welche der Normalpressung entspricht, vernachlässigt werden kann, und zwar mit einem um so grösseren Grade von Genauigkeit, je kleiner die Pfeilhöhe in Bezug auf die Sehne ist.

Betrachtet man z. B. den Fall, wo die Pfeilhöhe im Verhältnisse zur Sehne sehr klein ist, so ist der Werth des Horizontalschubes P_0 durch die Gleichung (29) gegeben, welche von der schon oben in Betracht gezogenen Gleichung (15) nur durch den Coëfficienten des der Biegung entstammenden Gliedes differirt; hiedurch gelangt man wieder zu dem Schlusse, dass der Einfluss der Verschiebung auf den Werth von P_0 unbedeutend ist, und dass es folglich nicht nothwendig ist, denselben in Rechnung zu ziehen.

Zusammenfassend sieht man, dass unter den vier in Betracht gezogenen Fällen für drei derselben die Wirkung der Verschiebung beinahe absolut Null ist, und dass nur für einen derselben diese Wirkung mit jener der Compression zu vergleichen ist, dass aber auch diese noch viel kleiner ist.

Man kann also in den praktischen Anwendungen zuerst die Unbekannten bestimmen, indem man den Einfluss der Verschiebungen vernach-

lässigt, und sodann die Mittellinie des Druckes zeichnen. Hat dieselbe überall eine sehr kleine Abweichung gegen die Körperachse, so können die erhaltenen Resultate als absolut genau betrachtet werden; ist aber diese Abweichung für einen grossen Theil der Curve bedeutend, so kann man die Berechnung wieder aufnehmen, indem man auch die Deformationsarbeit, welche den Schubkräften entspricht, in Rechnung zieht.

Dieser letzte Fall kommt aber in den numerischen Anwendungen, welche später folgen werden, niemals vor.

6. Lehrsatz über den Einfluss der Aenderung der Temperatur. — Hat man ein elastisches System bei einer gewissen Temperatur zusammengesetzt, so werden sich beim Uebergang zu einer anderen Temperatur im Allgemeinen elastische Kräfte entwickeln, welche zu den durch die äusseren Kräfte erzeugten hinzukommen.

Wenn sich z. B. die Temperatur eines metallischen Bogens ändert, so wird sich dessen Sehne zu verlängern oder zu verkürzen trachten; ist derselbe aber in seinen Enden befestigt und kann daher die Verlängerung oder Verkürzung seiner Sehne nicht stattfinden, so werden sich in dem Bogen elastische Kräfte entwickeln, welche zu jenen durch die Belastung erzeugten hinzukommen.

Man nehme nun an, dass ein elastisches System bei einer gewissen Temperatur t zusammengesetzt worden wäre, für welche die einzelnen Theile genau den zur Zusammensetzung des Systems nothwendigen geometrischen Längen entsprechen; ferner mache man ein Ende jener Theile frei, welche zur Bildung eines Systems von unveränderlicher Form nicht unerlässlich sind, deren Längen sich somit nicht ungehindert ändern können und welche die freie Bewegung der anderen Theile hindern.

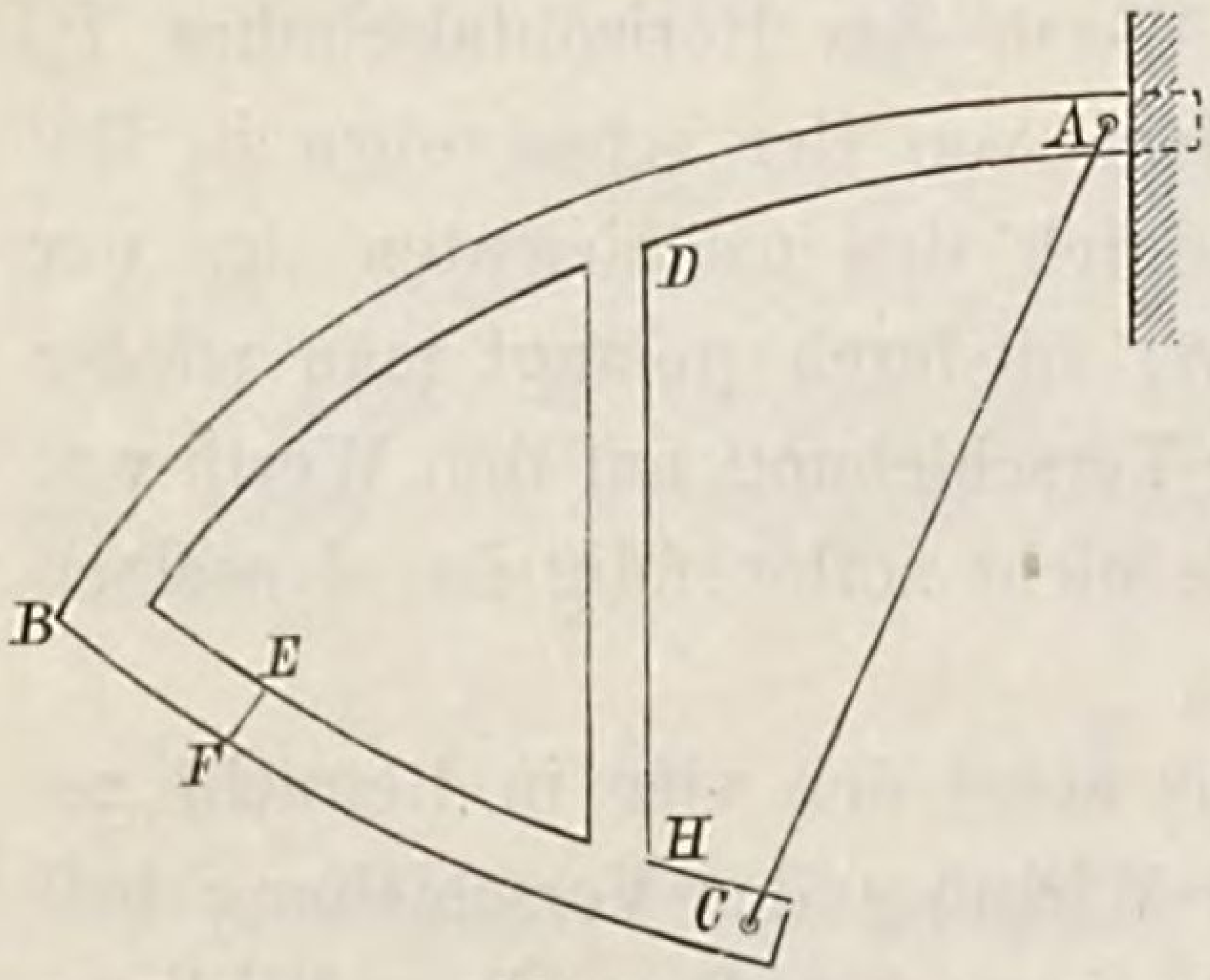


Fig. 46.

Ist z. B. in nebenstehender Figur $A\,B\,C\,D$ ein System, welches aus den ineinander gefügten Körpern $A\,B$, $B\,C$, $D\,H$ und der an den Enden gegliederten Stange $A\,C$ zusammengesetzt ist, so sieht man leicht, dass, wenn sich die Temperatur ändert, diese Körper sich nicht ungehindert

deformiren können, denn jeder derselben ist an seinen beiden Enden mit den anderen verbunden. Schneidet man den Körper BC in der Richtung EF und denkt man sich das Ende C der Stange AC frei, so ist jeder der Körper des Systems nur an einem Ende mit den anderen verbunden und kann daher ungehindert den Aenderungen der Temperatur folgen.

Zufolge der gemachten Annahme werden sich bei der ursprünglichen Temperatur t die beiden Körper $DBEF$ und CEF genau nach dem Querschnitte EF treffen, und die Stange wird genau die Länge haben, welche gleich ist der Entfernung der zu verbindenden Punkte A und C. Bei einer anderen Temperatur t' aber werden die Querschnitte EF der Körper $DBEF$ und CEF sich in $E'F'$ und $E''F''$ befinden, und ferner wird die Entfernung der Punkte A und C gleich AC', die Länge der Zugstange hingegen gleich AC'' sein.

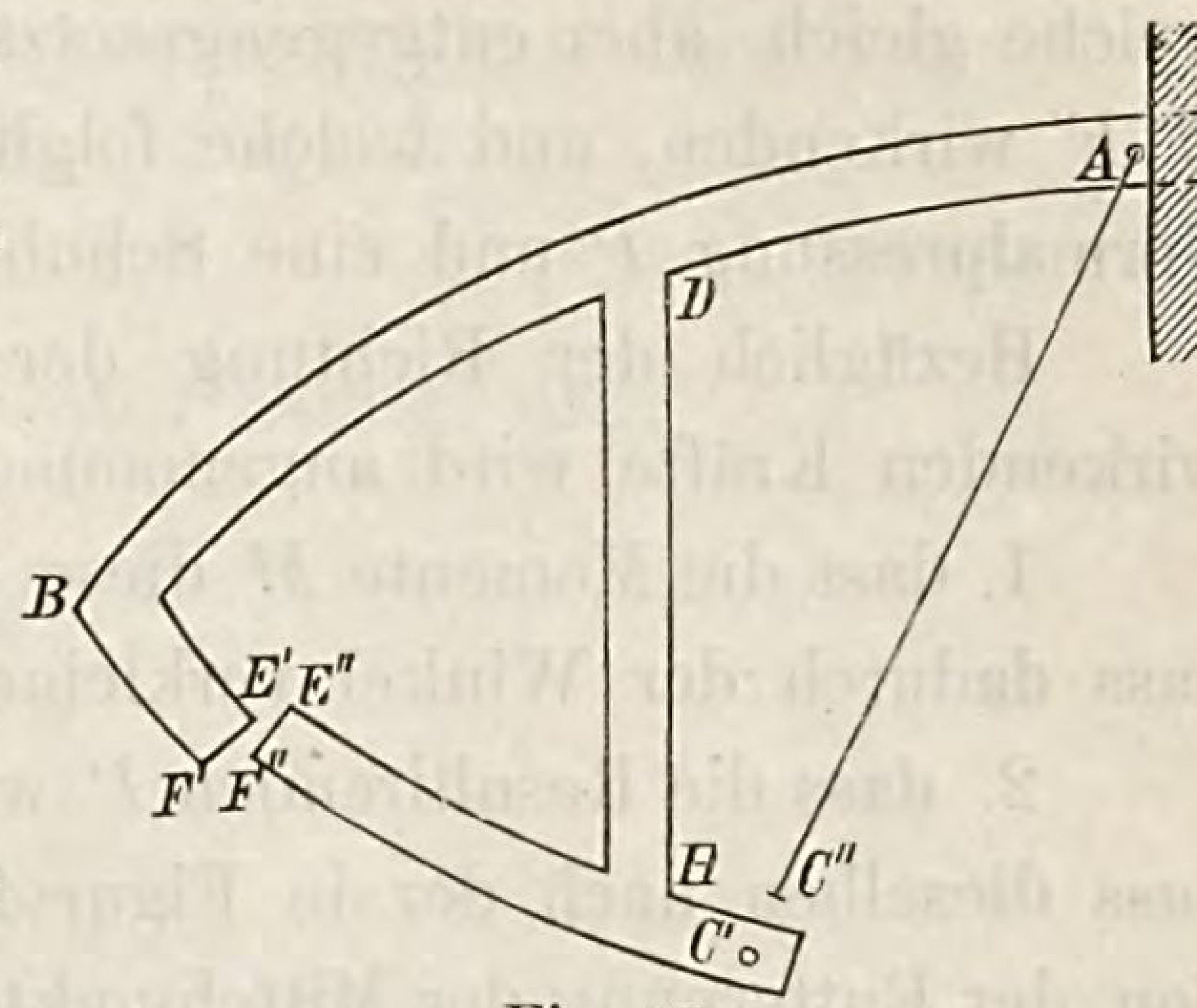


Fig. 47.

Nennt man

λ die Differenz zwischen der Entfernung AC' und der Länge AC'',

θ den sehr kleinen Winkel der beiden Flächen $E'F'$ und $E''F''$,

ξ und η die Projectionen der Verbindungsgeraden der Mittelpunkte der Flächen $E'F'$ und $E''F''$ auf die ursprüngliche Lage des Querschnittes EF,

und nimmt man an, dass auf das in Figur 46 dargestellte System, wofür alle ursprünglichen Verbindungen wieder hergestellt zu betrachten sind, beliebige äussere Kräfte wirken, so wird sich das System deformiren, wobei die Deformationen, sowie die inneren Kräfte variabel sind, und zwar nach Functionen der Temperatur. Für eine beliebige Temperatur kann man offenbar die elastischen Kräfte in allen Punkten des Systems ausdrücken, sobald man die Spannung T der Stange AC und ferner das Biegungsmoment M, die Normalpressung P und die Schubkraft S für den Querschnitt EF kennt.

Um den Werth dieser vier Unbekannten bei der Temperatur t' zu bestimmen, nehme man an, dass sich das System in den durch die Figur 47 dargestellten Bedingungen befinde und lasse sodann darauf die gegebenen äusseren Kräfte und ausserdem noch folgende Kräfte wirken:

im Punkte C' eine von C' nach A gerichtete Kraft T;

in dem Ende C'' der Stange eine andere Kraft T von C'' nach C;

in der Schnittfläche $E' F'$ Normal- und Tangentialkräfte, welche ein Biegungsmoment M, eine Normalpressung P und eine Schubkraft S geben;

endlich in der Schnittfläche $E'' F''$ Normal- und Tangentialkräfte, welche gleich, aber entgegengesetzt gerichtet sind mit den auf die Fläche $E' F'$ wirkenden, und welche folglich auch ein Biegungsmoment M, eine Normalpressung P und eine Schubkraft S geben.

Bezüglich der Richtung der in den Flächen $E' F'$ und $E'' F''$ wirkenden Kräfte wird angenommen:

1. dass die Momente M diese Querschnitte derart zu drehen suchen, dass dadurch der Winkel verkleinert wird;

2. dass die Resultirenden P wirkliche Normalpressungen seien, d. h. dass dieselben nach der in Figur 46 angeführten Disposition die Projection der Entfernung der Mittelpunkte der beiden Flächen $E' F'$ und $E'' F''$ auf die Normale zur Fläche $E F$ zu vergrössern strebt;

3. dass die Schubkräfte S in der Weise wirken, dass sie die Projection dieser Entfernung auf die Fläche $E F$ zu vermindern trachten.

Die vier Grössen T, M, P, S müssen derartig sein, dass unter ihrer Wirkung und unter der Wirkung der gegebenen äusseren Kräfte die Punkte C' und C'', sowie die Flächen $E' F'$ und $E'' F''$ nach der Deformation zur Uebereinstimmung kommen.

Der grösseren Deutlichkeit halber bezeichnen wir mit T' und T'' die beiden in den Punkten C' und C'' wirkenden Kräfte T; mit M', P', S' das Moment M und die Kräfte P und S in der Fläche $E' F'$; endlich mit M'', P'', S'' dieselben Grössen bezüglich der Fläche $E'' F''$.

Zufolge dem schon früher Gesagten kann man das Biegungsmoment, die Normalpressung und die Schubkraft für einen beliebigen Querschnitt der das System bildenden Stücke und folglich auch die Deformationsarbeit in Functionen der äusseren Kräfte und der Grössen T', T''; M', P', S'; M'', P'', S'' ausdrücken.

Bezeichnet man mit L diesen Ausdruck für die Deformationsarbeit, so sind die Summen

$$\frac{dL}{dT'} + \frac{dL}{dT''}, \quad \frac{dL}{dM'} + \frac{dL}{dM''}, \quad \frac{dL}{dP'} + \frac{dL}{dP''}, \quad \frac{dL}{dS'} + \frac{dL}{dS''}$$

nichts Anderes als die Differentialquotienten der Function L mit Bezug auf die Grössen T, M, P, S; denn betrachtet man z. B. T' und T'' als Functionen von T, wie sie durch die Gleichungen

$$T' = T, \quad \text{und} \quad T'' = T$$

gegeben sind, so erhält man

$$\frac{dL}{dT} = \frac{dL}{dT'} \cdot \frac{dT'}{dT} + \frac{dL}{dT''} \cdot \frac{dT''}{dT},$$

und da $\frac{dT'}{dT} = 1$, $\frac{dT''}{dT} = 1$ ist, resultirt daraus, dass

$$\frac{dL}{dT} = \frac{dL}{dT'} + \frac{dL}{dT''}.$$

Da die Formel $$\frac{dL}{dT'} + \frac{dL}{dT''}$$

die Summe der Verrückungen der Punkte C' und C'' gegen einander, d. h. die *Verminderung* der Entfernung $C'\,C''$ ausdrückt, so muss für das Zusammenfallen dieser Punkte nach der Deformation

$$\frac{dL}{dT'} + \frac{dL}{dT''} = \lambda \quad \text{oder} \quad \frac{dL}{dT} = \lambda \quad \text{sein.} \qquad (29)$$

Die Formel $$\frac{dL}{dM'} + \frac{dL}{dM''}$$

gibt die Summe der Drehungen der beiden Flächen $E'\,F'$ und $E''\,F''$, d. h. die *Verminderung* des Winkels, welchen diese Flächen unter einander bilden. Damit nun dieselben nach der Deformation zusammenfallen, muss

$$\frac{dL}{dM'} + \frac{dL}{dM''} = \theta \quad \text{oder} \quad \frac{dL}{dM} = \theta \quad \text{sein.} \qquad (30)$$

Die Formel $$\frac{dL}{dP'} + \frac{dL}{dP''}$$

drückt die Grösse aus, um welche während der Deformation die Projection der Geraden, welche die Mittelpunkte der Flächen $E'\,F'$ und $E''\,F''$ verbindet, auf die Normale auf die Fläche $E\,F$ *vergrössert* wird; damit nach der Deformation diese Flächen übereinstimmen, muss diese Grösse negativ und gleich ξ sein, d. h. es muss folgende Gleichung bestehen:

$$\frac{dL}{dP'} + \frac{dL}{dP''} = -\xi \quad \text{oder} \quad \frac{dL}{dP} = -\xi. \tag{31}$$

Endlich gibt die Formel $\frac{dL}{dS'} + \frac{dL}{dS''}$ die Grösse, um welche während der Deformation die Projection der Geraden, welche die Mittelpunkte der Flächen $E' F'$ und $E'' F''$ verbindet, auf die Fläche $E F$ *vermindert* wird; damit diese Flächen nach der Deformation zusammenfallen, muss folgende Gleichung bestehen:

$$\frac{dL}{dS'} + \frac{dL}{dS''} = \eta \quad \text{oder} \quad \frac{dL}{dS} = \eta. \tag{32}$$

Die vier Gleichungen (29), (30), (31) und (32) dienen zur vollständigen Bestimmung der vier Unbekannten T, M, P, S.

Bis jetzt wurden die Betrachtungen nur auf ein elastisches System von besonderer Form angewendet; man erkennt aber leicht, dass sich dieselben auf alle Fälle ausdehnen lassen. Bezieht man dieselben z. B. auf ein System mit mehreren Zugstangen und aus mehreren eingefügten Körpern, welche weggelassen, respective geschnitten werden können, ohne dass das System aufhört ein solches von unveränderlicher Form zu sein, so hat man für jede dieser Zugstangen eine unbekannte Spannung T und für jeden dieser Körper drei Unbekannte M, P, S. Um alle diese Unbekannten zu bestimmen, hat man für jede Zugstange eine Gleichung, ähnlich jener (29), und für jeden Körper drei Gleichungen, ähnlich jenen (30), (31), (32).

Es ist zu beachten, dass die Gleichungen (29), (30), (31) und (32) erhalten werden können, indem man die Differentialquotienten der Function

$$L - T\lambda - (M\theta - P\xi + S\eta)$$

mit Bezug auf T, M, P, S gleich Null setzt.

In dem allgemeinen Falle, als mehrere Zugstangen und mehrere eingefügte Körper vorhanden sind, welche man weglassen, respective durchschneiden kann, ohne dass das System aufhört eines von unveränderlicher Form zu bleiben, erhält man die zur Bestimmung der Unbekannten nothwendigen Gleichungen, indem man die Differentialquotienten der Function

$$L - \Sigma T\lambda - \Sigma(M\theta - P\xi + S\eta)$$

mit Bezug auf diese Unbekannten gleich Null setzt.

Man gelangt auf diese Weise zu folgendem Lehrsatze: *Die elastischen Kräfte, welche in dem bei der Temperatur t' betrachteten System auftreten, sind jene, welche die Deformationsarbeit des Systems zu einem* Minimum *machen, sofern man dieselbe um so viele Ausdrücke ähnlich jenem $T\lambda$ und jenem $M\theta - T\xi + S\eta$ vermindert, als Zugstangen vorhanden sind, welche entfernt werden können, respective als eingefügte Körper existiren, welche in einem Querschnitte durchschnitten werden können, ohne dass das System aufhört eines von unveränderlicher Form zu sein.*

Es ist wohl zu beachten, dass dieser Lehrsatz als speciellen Fall jenen von der kleinsten Arbeit enthält; denn bei der ursprünglichen Temperatur müssen die Grössen λ, θ, ξ, η Null sein, und es ist also die Deformationsarbeit des Körpers allein, welche ein *Minimum* wird.

Ferner ist noch zu beachten, dass die Grössen λ, θ, η, ξ Functionen der Differenz $t' - t$ der Temperatur sind, sowie gleichzeitig der Form und der Natur der einzelnen Bestandtheile des Systems, dass sie aber vollständig unabhängig sind von den äusseren Kräften.

Man kann dieselben im Allgemeinen auch durch die Formel $\alpha\,(t' - t)$ ausdrücken, wobei α ein numerischer Coëfficient ist, welcher wohl verschieden ist für jede dieser Grössen, aber bezüglich der Aenderung der Temperatur constant ist, d. h. unabhängig von $t' - t$.

7. Einfache graphische Constructionen, welche man an Stelle der numerischen Berechnung setzen kann. — In den numerischen Aufgaben über das Gleichgewicht elastischer Systeme hat man immer die Ausdrücke für die Biegungsmomente, die Normalpressungen und die Schubkräfte für verschiedene Querschnitte der das System zusammensetzenden Körper zu bilden; es kommt auch öfter vor, dass, wenn man vier in einem Punkte zusammenkommende Zugstangen hat, man die Spannungen in zwei von denselben in Functionen der Spannungen in den beiden anderen ausdrücken soll.

Um alle diese Operationen strenge durchzuführen, könnte man alle nothwendigen Elemente, d. h. die Hebelarme der Kräfte, die Winkel dieser Kräfte mit den verschiedenen Querschnitten, die Winkel der Zugstangen unter einander etc., mit Hilfe der Geometrie und der Trigonometrie berechnen. In der Praxis genügt es aber im Allgemeinen, alle

diese Elemente von einer mit Sorgfalt und im genügend grossen Massstabe gemachten Zeichnung abzunehmen.

Wir geben zu diesem Behufe einige Belehrungen über das graphische Verfahren, wofür man die Anwendung im zweiten Theile findet.

Biegungsmomente. — Um den Ausdruck des Biegungsmomentes für einen gegebenen Querschnitt eines Körpers zu bilden, muss man die Hebelarme jeder der einerseits des betrachteten Querschnittes auf den Körper wirkenden Kräfte kennen, wobei unter diese Kräfte nicht nur die Belastungen, sondern auch die Spannungen in den Zugstangen, die Reactionen in den Auflagpunkten etc. einzubeziehen sind. In der Zeichnung, welche das zu untersuchende System darstellt, muss man also die Querschnitte, für welche man den Ausdruck für das Biegungsmoment bilden will, ziehen und sodann vom Mittelpunkte jedes Querschnittes Perpendikel auf alle bekannten und unbekannten Kräfte fällen, welche in diesem Querschnitte ein Biegungsmoment erzeugen können. Zu jedem Perpendikel schreibe man schliesslich die auf der Zeichnung gemessene Länge.

Normalpressungen und Schubkräfte. — Um den Ausdruck für die Normalpressung und jenen für die Schubkraft in einem Querschnitte eines Körpers zu erhalten, muss man dieselben Kräfte betrachten, welche ein Biegungsmoment erzeugen können, und sodann deren Projectionen auf die Normale in dem Querschnitte addiren, wenn man die Normalpressung erhalten will, hingegen deren Projectionen auf die Fläche selbst addiren, wenn man die Schubkraft erhalten will. Die Werthe dieser Projectionen ergeben sich, indem man jede Kraft mit dem Sinus oder dem Cosinus, welchen sie mit der Querschnittsfläche bildet, multiplicirt.

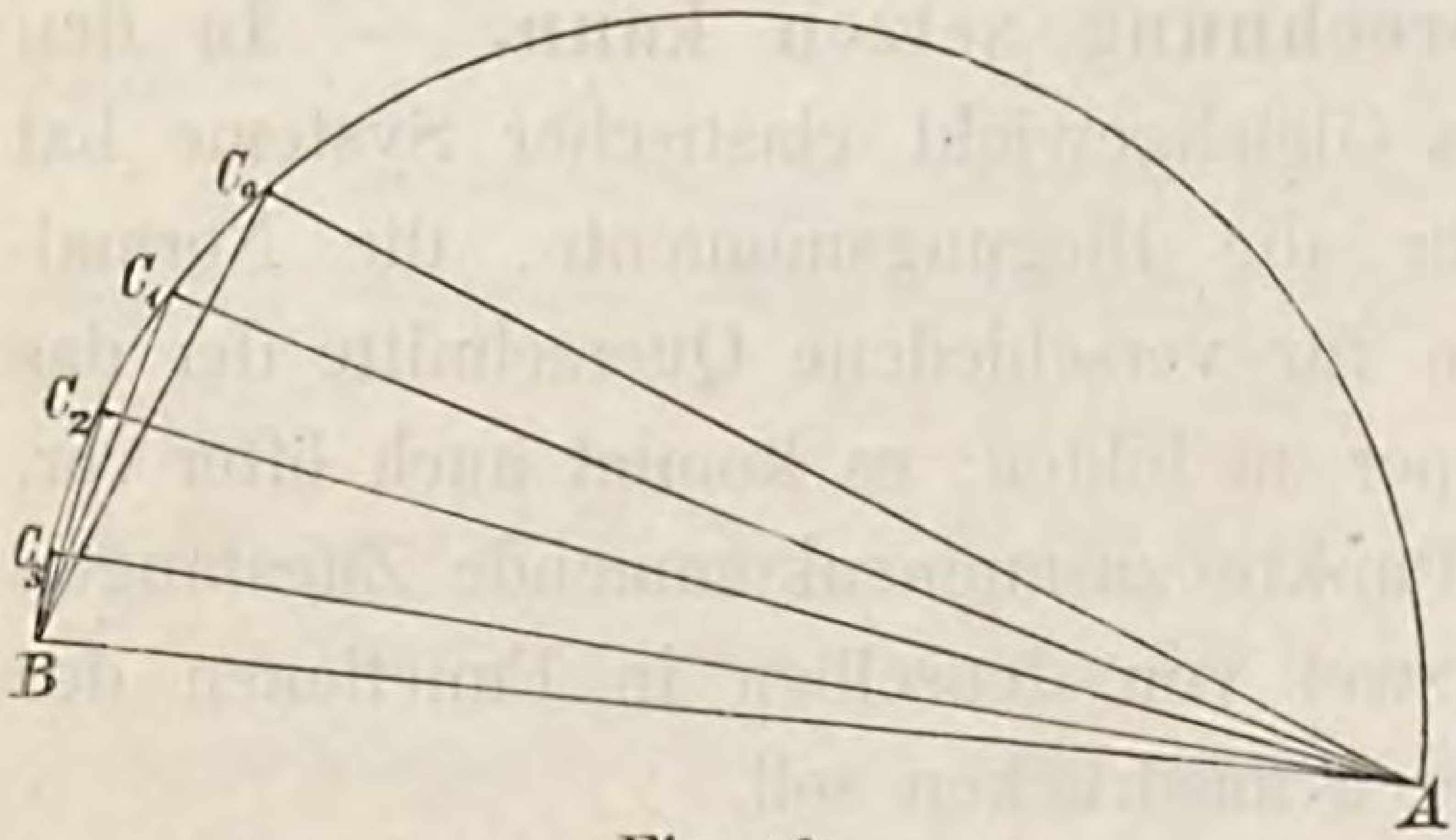


Fig. 48.

Den Sinus und Cosinus der Winkel, welche eine Kraft mit den verschiedenen Querschnitten bildet, kann man mit Hilfe einer einzigen graphischen Operation finden. Zu dem Zwecke mache man, wie in obiger Figur zu ersehen ist, auf einer zur Richtung der Kraft parallelen Geraden die Länge AB gleich einer Einheit in einem beliebigen

Massstabe und beschreibe über dieser Linie als Durchmesser einen Halbkreis; sodann ziehe man vom Punkte B die Sehnen BC_0, BC_1, BC_2, BC_3 parallel zu den in Betracht zu ziehenden Querschnitten und vom Punkte A die Sehnen AC_0, AC_1, AC_2, AC_3, welche senkrecht auf die ersteren sind. Misst man nun die Längen aller dieser Sehnen mit dem Massstab, dessen Einheit gleich AB ist, so erhält man in AC_0, AC_1, AC_2, AC_3 die Sinus der Winkel, welche die Richtung AB mit den betrachteten Querschnitten einschliesst, und in BC_0, BC_1, BC_2, BC_3 die Cosinus derselben Winkel.

Bei der praktischen Anwendung wird sich Gelegenheit ergeben, diese graphische Construction durchzuführen.

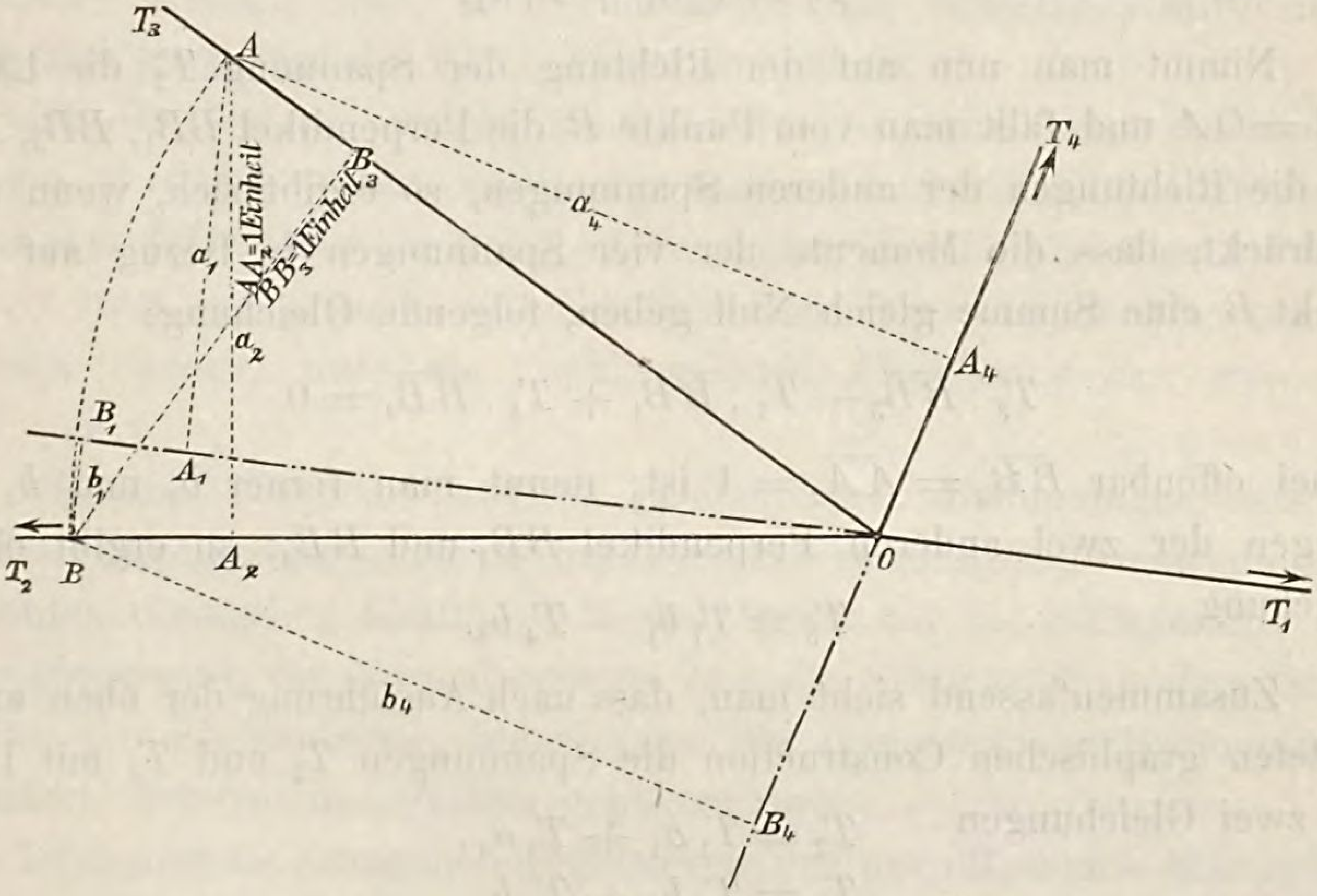


Fig. 49.

Zerlegung der Kräfte. — Ist O in vorstehender Figur der Knotenpunkt, wo sich vier gegliederte Stäbe vereinigen, welche einem System angehören, das unter der Wirkung der äusseren Kräfte sich im Gleichgewichte befindet, und nennt man T_1, T_2, T_3, T_4 die Spannungen in diesen Stäben, so kann man offenbar zwei dieser Kräfte in Functionen der anderen zwei ausdrücken, so dass, wenn diese letzteren bekannt sind, die ersten daraus leicht abgeleitet werden können.

Hätte man z. B. T_2 und T_3 in Functionen von T_1 und T_4 auszudrücken, so nimmt man auf der Richtung der Spannung T_3 einen

beliebigen Punkt A und fällt von diesem Punkte Senkrechte AA_1, AA_2, AA_4 auf die Richtung der Spannungen T_1, T_2, T_4. Da die algebraische Summe der Momente der vier Punkte in Bezug auf einen beliebigen Punkt gleich Null sein muss, so ist klar, dass, wenn man die Momente in Bezug auf den Punkt A nimmt, das Moment der Spannung T_3 gleich Null ist, und dass man folgende Gleichung erhält:

$$T_2 . \overline{AA_2} - T_1 . \overline{AA_1} - T_4 . \overline{AA_4} = 0;$$

nimmt man als Einheit die Länge des Perpendikels AA_2 und nennt man a_1 und a_4 die Längen der zwei anderen Perpendikel AA_1 und AA_4, so ergibt obige Gleichung

$$T_2 = T_1 a_1 + T_4 a_4.$$

Nimmt man nun auf der Richtung der Spannung T_2 die Länge $OB = OA$ und fällt man vom Punkte B die Perpendikel BB_1, BB_3, BB_4 auf die Richtungen der anderen Spannungen, so ergibt sich, wenn man ausdrückt, dass die Momente der vier Spannungen in Bezug auf den Punkt B eine Summe gleich Null geben, folgende Gleichung:

$$T_3 . \overline{BB_3} - T_1 . \overline{BB_1} + T_4 . \overline{BB_4} = 0,$$

wobei offenbar $\overline{BB_3} = \overline{AA_2} = 1$ ist; nennt man ferner b_1 und b_4 die Längen der zwei anderen Perpendikel BB_1 und BB_4, so ergibt obige Gleichung

$$T_3 = T_1 b_1 - T_4 b_4.$$

Zusammenfassend sieht man, dass nach Ausführung der oben angedeuteten graphischen Construction die Spannungen T_2 und T_3 mit Hilfe der zwei Gleichungen

$$T_2 = T_1 a_1 + T_4 a_4,$$
$$T_3 = T_1 b_1 - T_4 b_4$$

in Functionen der zwei anderen T_1 und T_4 ausgedrückt werden können.

11. Capitel.

Unvollkommen elastische Systeme, wie gemauerte Gewölbe.

1. Betrachtungen über unvollkommen elastische Systeme. — Wir nennen jene Körper unvollkommen elastisch, welche, falls sie comprimirt worden sind, nach Entfernung der äusseren Kräfte nicht genau ihre ursprüngliche Form wieder annehmen.

Da die Systeme, welche aus diesen nicht vollkommen elastischen Körpern zusammengesetzt werden, zusammendrückbar sind und in Folge dessen sich deformiren können, und da ferner ihre Deformationen um so grösser sind, je grösser die dieselben hervorrufenden Kräfte waren, so folgt daraus, dass die Deformationen Functionen der äusseren Kräfte sind.

Hat man also ein gewissen geometrischen Bedingungen entsprechendes, unvollkommen elastisches System, so bestimmt man die unbekannten elastischen Kräfte, d. h. den Druck auf die Stützpunkte, das Biegungsmoment, die Normalpressung und die Schubkraft in dem Querschnitte der Einmauerung, indem man die geometrischen Bedingungen ausdrückt, welchen das System genügen muss.

Ist ferner die Zusammendrückbarkeit der unvollkommen elastischen Körper, welche das zu betrachtende System bilden, proportional zu den Pressungen, wie dies zwischen gewissen Grenzen für die vollkommen elastischen Körper der Fall ist, so kann man leicht ersehen, dass die Vertheilung der äusseren Kräfte in derselben Weise stattfinden wird wie bei den letztgenannten Körpern. Daraus folgt, dass die Formeln und Lehrsätze, welche für die vollkommen elastischen Körper und Systeme bewiesen wurden, auch für die unvollkommen elastischen Körper Geltung haben. Der in der Praxis am häufigsten vorkommende Fall ist jener der gemauerten Bögen, so lange der Mörtel noch keine feste Verbindung gebildet hat.

Der Mörtel muss als jeder Widerstandskraft gegen Zug vollständig entbehrend angesehen werden, so dass an Orten, an welchen Zugspannungen stattfinden, dieselben sich durch Risse kenntlich machen werden. Man erkennt aber leicht, dass nichtsdestoweniger alle Formeln und alle Lehrsätze, welche im Obigen gegeben wurden, streng anwendbar sind; nur werden die Berechnungen etwas länger sein, da diesfalls nicht alle Querschnitte des festen Körpers im Vorhinein bekannt sind.

Dasselbe gilt auch für Gewölbe aus Hausteinen, welche ohne Hilfe von Mörtel aufgeführt werden.

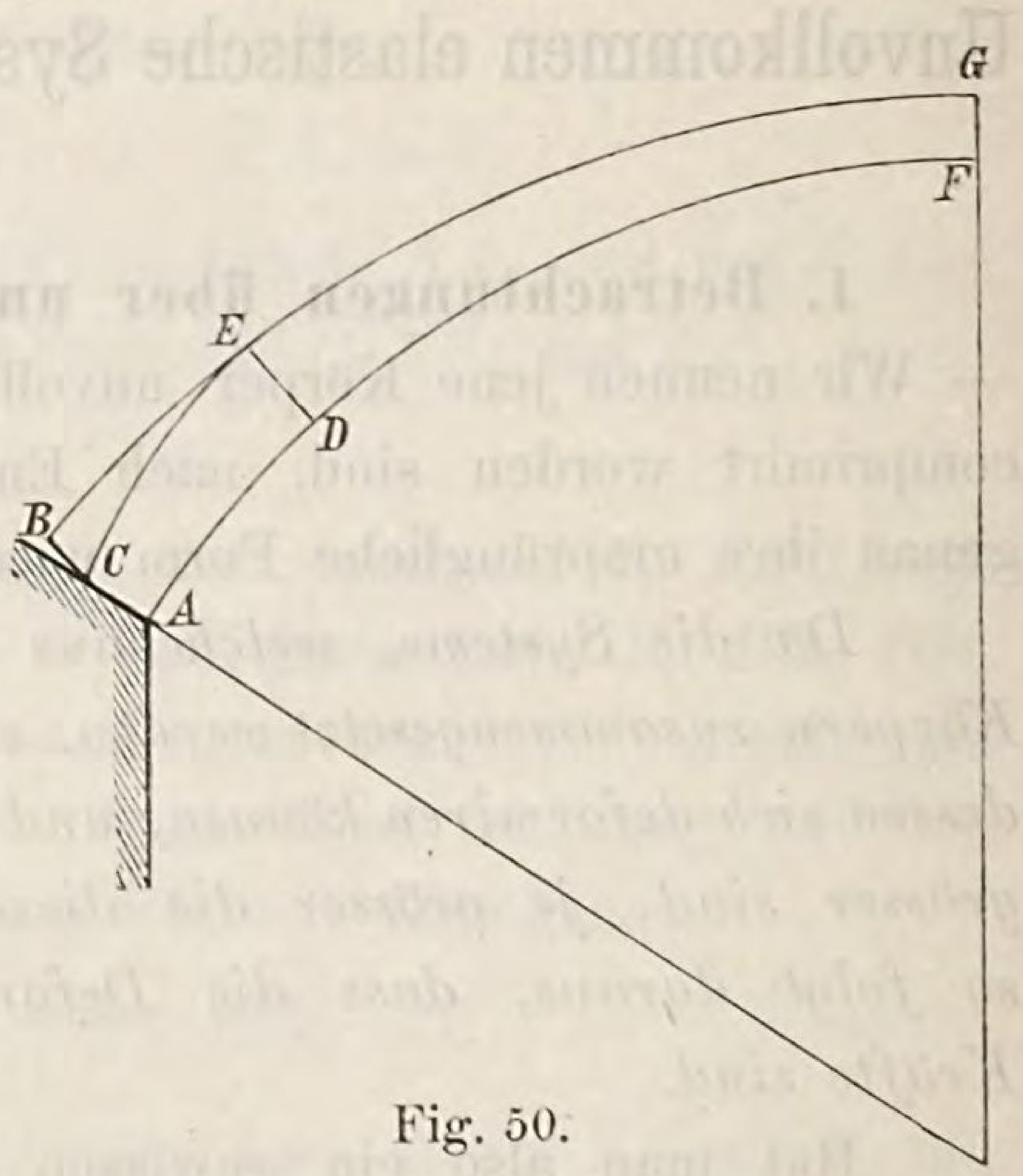


Fig. 50.

Wenn z. B. ein Gewölbe eine im Verhältnisse zu dessen Oeffnung sehr kleine Pfeilhöhe hat, so kommt es fast immer vor, dass in allen Querschnitten eines Theiles $ABDE$ nahe an den Widerlagern die Tendenz herrscht, am Gewölberücken Zugspannungen zu erzeugen; von dem Querschnitte ED aber bis zum Schlussstein wird jeder Querschnitt seiner ganzen Ausdehnung nach comprimirt. Hiedurch ist auch die Erklärung dafür gegeben, dass beim Wegnehmen der Gerüste sehr flacher Gewölbe sich am Bogenanfang immer Risse zeigen, welche vom Gewölberücken ausgehend mehr oder weniger tief in das Gewölbe eindringen.

Betrachtet man in diesem Falle einen beliebigen Querschnitt des Theiles $ABED$, so wird derselbe in der ganzen zwischen der inneren Laibung und einer gewissen Curve CE befindlichen Partie comprimirt, während zwischen dieser Curve und dem Gewölberücken weder Druck- noch Zugspannungen stattfinden können.

Wenn man also die Gleichgewichtsbedingungen eines derartigen Gewölbes zu untersuchen hat, kann man wohl die Formeln und Lehrsätze darauf anwenden, welche für die vollkommen elastischen Körper und Systeme entwickelt wurden, nur für das Stück $ABED$ muss man sich den widerstandsfähigen Querschnitt des Gewölbes durch die Curve CE und nicht durch den Gewölberücken begrenzt vorstellen.

Der Theil BCE des Gewölbes darf nur als eine Last betrachtet werden.

Die Schwierigkeit besteht also in der Bestimmung der Curve CE, welche von vornherein unbekannt ist, aber auch diese Schwierigkeit kann ohne zu lange Berechnungen durch die Methode der successiven Annäherung bewältigt werden, wofür wir später in der Betrachtung einer Brücke aus Hausteinen ein Beispiel geben werden. Der ausserordentlich kühne Bogen dieser vom Ingenieur C. Mosca im Jahre 1827 über die Doire bei Turin erbauten Brücke wurde theils ohne Anwendung von Mörtel, theils mit einer Zwischenlage von Mörtel zwischen den einzelnen Granitsteinen construirt.

Wir erachten es nicht für nothwendig, noch andere Betrachtungen hinzuzufügen, um zu zeigen, dass die Berechnung der unvollkommen elastischen Systeme auf Grund derselben Principien gemacht werden kann, wie sie für vollkommen elastische Systeme dienen; denn in allen Körpern der Natur sind die innern oder elastischen Kräfte Functionen der durch die äusseren Kräfte hervorgerufenen Deformationen.

Man könnte wohl einwenden, dass, wenn die auf einen unvollkommen elastischen Körper wirkenden äusseren Kräfte zuerst von Null bis zu einem gewissen Werthe wachsen und sodann wieder bis auf Null abnehmen, um ein anderes Mal zu wachsen, der Zustand des Körpers bezüglich der Deformationen nicht vollkommen derselbe ist wie in der ersten Periode, selbst für ein gleiches System von äusseren Kräften, so wie dies bei vollkommen elastischen Körpern stattfindet.

Diese Einwendung ist ohne Zweifel richtig, aber sie kann im Allgemeinen das oben Bemerkte nicht entkräftigen.

Man muss übrigens wohl beachten, dass dieser Wechsel in den äusseren Kräften in der Praxis nur in sehr beschränkten Grenzen stattfindet. Z. B. kann sich bei einer Brücke aus Mauerwerk nur die zufällige Belastung ändern; dieselbe ist aber immer nur ein sehr kleiner Theil des Eigengewichtes der Brücke.

THEORIE
DES GLEICHGEWICHTES ELASTISCHER SYSTEME
UND DEREN ANWENDUNG.

Zweiter Theil. — Anwendungen.

1. Capitel.

Betrachtung eines durch zwei Zugstangen aus Schmiedeisen und einer Druckstrebe aus Gusseisen armirten Balkens.*)

(Tafel I, Figuren 1 und 2.)

1. Allgemeine Angaben. — Der in Figur 1 (Tafel I) dargestellte Träger hat eine lichte Spannweite zwischen den Stützen von $8^m,00$;

die Entfernung zwischen dem Durchschnittspunkte der Mittellinien der beiden Zugstangen und der Achse des Balkens beträgt $0^m,60$;

der Querschnitt des Balkens $0^m,20 \times 0^m,20 = 0^{qm},04$;

der Durchmesser der Zugstangen $0^m,026$.

Die Druckstrebe besteht aus Gusseisen, hat einen kreuzförmigen Querschnitt und kann wegen ihrer geringen Länge und der geringen Pressung, welcher sie unterworfen ist, als absolut starr betrachtet werden.

Die Belastung des Trägers, das Eigengewicht desselben mit inbegriffen, beträgt 180 Kilogramm per Längenmeter.

*) Die Mehrzahl der hier zur Betrachtung kommenden Anwendungen wurde einem Werke entnommen, welches seitens des Constructionsbureaus der oberitalienischen Eisenbahnen unter dem Titel: „*Applications pratiques de la théorie sur l'équilibre des systèmes élastiques*" (Praktische Anwendungen der Theorie des Gleichgewichtes elastischer Systeme) veröffentlicht wurde. Dieselben wurden nur insoferne ein wenig geändert, um sie mit der im Vorhergehenden entwickelten Theorie in bessere Uebereinstimmung zu bringen.

2. Berechnung der Spannung in den Zugstangen. — Nennt man
T die Spannung in den Zugstangen,
T_1 die Pressung in der Druckstrebe,
β der Winkel, welchen die Zugstangen mit der Achse des Balkens bilden,

so hat man
$$\sin\beta = \frac{0{,}60}{\sqrt{4{,}00^2 + 0{,}60^2}} = 0{,}1482$$
$$\cos\beta = \frac{4{,}00}{\sqrt{4{,}00^2 + 0{,}60^2}} = 0{,}9889$$

und folglich
$$T_1 = 2\,T \sin\beta = 0{,}2964\,.\,T. \tag{1}$$

Die Normalpressung hat für alle Querschnitte des Balkens den constanten Werth
$$T\cos\beta = 0{,}9889\,.\,T.$$

Die Reaction der Stützen beträgt
$$R = 180 \times 4{,}00 = 720.$$

Das Biegungsmoment in Bezug auf die Enden des Trägers ist $M_1 = 0$, und bezüglich des mittleren Querschnittes C ist es
$$M_2 = -R \times 4{,}00 + \frac{1}{2}\,p\,.\,4{,}00^2 + T \times 4{,}00 \times \sin\beta$$
oder
$$M_2 = -1440 + 0{,}5928\,.\,T.$$

Die Fläche und das Trägheitsmoment des Balkenquerschnittes haben die Werthe
$$\Omega = 0{,}20 \times 0{,}20 = 0{,}04,$$
$$I = \frac{1}{12}\,0{,}20 \times 0{,}20^3 = 0{,}000133;$$

bezeichnet man mit E den Elasticitätscoëfficienten des Holzes, so ist die Deformationsarbeit, welche der Zusammendrückung des Balkens entspricht, durch die Formel
$$\frac{8{,}00}{2\,E\,\Omega} \times (T\cos\beta)^2 = \frac{1}{2\,E} \times 195{,}58\,.\,T^2, \tag{2}$$

und jene, welche der Biegung entspricht, durch folgende Formel ausgedrückt:

$$2\times\frac{4,00}{2EI}\left(\frac{M^2_2}{3}-\frac{M_2}{12}.p\times 4,00^2\right)=\frac{1}{2E}\times(7046.T^2-21\,395\,000.2T).\ (3)$$

Nennt man schliesslich E' den Elasticitätscoëfficienten des Eisens, und beachtet man, dass

$4^m,045$ die Länge jeder Zugstange ist und

$\omega = 0^{qm},000531$ die Fläche ihres Querschnittes, so erhält man als Ausdruck für die Deformationsarbeit der Zugstangen die Formel

$$2\times\frac{4,045}{2E'\omega}.T^2=\frac{1}{2E'}\times 15235.T^2,$$

und bei der Annahme, dass der Elasticitätscoëfficient des Eisens zwölfmal grösser ist als jener des Holzes,

$$\frac{1}{2E}\times 1270.T^2. \qquad (4)$$

Die Deformationsarbeit des ganzen Systems ergibt sich durch Vereinigung der drei Formeln (2), (3), (4), wie folgt:

$$\frac{1}{2E}(8512.T^2-21\,395\,000\times 2\,T). \qquad (5)$$

Um den Werth der Spannung T zu erhalten, muss man den Differentialquotienten dieses Ausdruckes nach T gleich Null setzen, d. h. man erhält

$$8512.T-21\,395\,000=0,$$

woraus

$$T=\underline{\underline{2514}}.$$

3. Grösste Beanspruchung der Zugstangen und des Balkens per Quadratmeter. — Die Spannung der Zugstangen per Quadratmeter der Querschnittsfläche ist

$$\frac{2514}{0,000531}=4\,730\,000.$$

Das Biegungsmoment bezüglich eines Querschnittes, dessen Entfernung vom nächst gelegenen Stützpunkte x ist, wird gegeben durch

$$M=-Rx+T\sin\beta.x+\frac{1}{2}px^2=-347.x+90.x^2.$$

Das *Maximum* dieses Ausdruckes findet statt für

$$x = \frac{347}{180} = 1{,}93, \quad \text{und ist dessen Werth} \quad M = -335,$$

woraus folgt, dass die grösste Pressung des Balkens per Quadratmeter des Querschnittes durch die Formel

$$\frac{T\cos\beta}{\Omega} - \frac{Mv}{I} = \frac{2486}{0{,}04} + \frac{335 \times 0{,}10}{0{,}000133} = 313\,000$$

gegeben ist, d. h. dass dieselbe $31^{\text{kg}},30$ per Quadratcentimeter beträgt.

4. Einfluss der Aenderung der Temperatur. — Die obigen Resultate gelten, wenn die Temperatur gleich bleibt mit jener im Momente der Montirung; dieselbe wollen wir *mittlere Temperatur* nennen.

Steigt oder fällt die Temperatur um t Grade, so würde sich jede Zugstange, wenn sie frei wäre, um die Grösse

$$\frac{4{,}045\,.\,t}{82500} = 0{,}000\,049\,.\,t$$

verlängern oder verkürzen, angenommen, dass $\frac{1}{82500}$ der Ausdehnungscoëfficient des Eisens ist.

In Betreff des Balkens kann man annehmen, dass, selbst wenn derselbe frei wäre, die aus der Aenderung der Temperatur hervorgehenden Längenänderungen gleich Null wären.

Endlich kann man auch die Verlängerung der Druckstrebe vernachlässigen, sei es auf Grund der geringen Länge, sei es wegen der Art, wie sie in dem System wirkt.

Dies vorausgeschickt, ist es klar, dass, wenn die Montirung des Balkens bei einer Temperatur von t Graden über oder unter der mittleren geschehen würde, die Länge jeder Zugstange um $0{,}000\,049\ t$ grösser oder kleiner sein würde, als geometrisch nothwendig wäre.

Um also die Spannung der Zugstangen bei dieser Temperatur zu bestimmen, wohl vorausgesetzt, dass der Balken bei der mittleren Temperatur montirt und belastet wurde, muss man zur Formel (5) noch den Ausdruck

$$\pm 2 \times 0{,}000\,049\,.\,t\,.\,T = \pm 0{,}000\,098\,.\,t\,.\,T$$

hinzugeben, womit man

$$\frac{1}{2E}(8512 \,.\, T^2 - 21\,395\,000 \,.\, 2\,T) \pm 0{,}000\,098\; t \,.\, T$$

erhält; setzt man sodann den Differentialquotienten dieses Ausdruckes nach T gleich Null, so erhält man die Gleichung

$$\frac{1}{E}(8512 \,.\, T - 21\,395\,000) \pm 0{,}000098 \,.\, t \,. = 0,$$

woraus sich

$$T = 2514 \mp 17{,}27 \,.\, t \qquad (6)$$

ergibt, wenn man $E = 1\,500\,000\,000$ nimmt.

Das obere Zeichen bezieht sich auf eine höhere, das untere auf eine niedere Temperatur.

Nimmt man an, dass die mittlere Temperatur $+ 15^0$ ist, die höchste $+ 40^0$ und die niedrigste $- 10^0$, so ist der grösste Werth von t 25, und man kann nun die Bedingungen des Widerstandes des Balkens für die zwei äussersten Temperaturen einzeln betrachten.

Erster Fall. — *Temperatur von* 40^0.

Macht man in der Formel (6) $t = 25$ und nimmt das obere Zeichen, so erhält man

$$T = 2514 - 432 = 2082.$$

In den Zugstangen beträgt die Spannung per Quadratmeter des Querschnittes

$$\frac{2082}{0{,}000531} = 3\,920\,000,$$

die Normalpressung ist für alle Querschnitte des Balkens

$$T \cos\beta = 2082 \times 0{,}9889 = 2059,$$

ferner ist das Biegungsmoment in Bezug auf einen in der Entfernung x vom nächst gelegenen Stützpunkte befindlichen Querschnitt

$$M = - R x + T \sin\beta \,.\, x + \frac{1}{2} p x^2 = - 411\, x + 90 x^2;$$

dessen grösster Werth ergibt sich für

$$x = \frac{411}{180} = 2{,}28 \quad \text{mit} \quad M = - 469.$$

Bei der Temperatur von 40^0 hat die grösste Pressung des Holzes per Quadratmeter den Werth

$$\frac{2059}{0,04} + \frac{469 \times 0,10}{0,000133} = 405\,000,$$

d. h. $40^{\text{kg}}, 50$ per Quadratcentimeter.

Zweiter Fall. — *Temperatur von* 10^0.

In diesem Falle muss man in der Formel (6) $t = 25$ machen und das obere Zeichen nehmen; man erhält dann

$$T = 2514 + 432 = 2946,$$

und die Spannung der Zugstangen per Quadratmeter ergibt sich mit

$$\frac{2946}{0,000531} = 5\,548\,000.$$

Die für alle Querschnitte des Balkens constante Normalpressung ist

$$T \cos \beta = 2946 \times 0,9889 = 2913;$$

das Biegungsmoment für den in der Entfernung x von dem nächst gelegenen Stützpunkte befindlichen Querschnitt ist

$$M = - R x + T \sin \beta \,.\, x + \frac{1}{2} p x^2 = - 283\, x + 90 x^2;$$

dessen grösster Werth, welcher mit der Mitte des Balkens, d. h. mit $x = 4,00$ correspondirt, beträgt

$$M = + 308.$$

Es folgt daraus, dass die grösste Pressung des Balkens per Quadratmeter

$$\frac{2913}{0,04} + \frac{308 \times 0,10}{0,000133} = 304\,400$$

ist, d. h. $30^{\text{kg}}, 44$ per Quadratcentimeter.

5. Schlussfolgerung. — Fasst man obige Resultate zusammen, so erkennt man, dass, wenn die Temperatur sich zwischen $- 10^0$ und $+ 40^0$ ändert, die grösste Spannung der Zugstange per Quadratmeter zwischen

$$5\,548\,000 \quad \text{und} \quad 3\,920\,000^{\text{kg}}$$

und die grösste Pressung des Holzes per Quadratcentimeter zwischen

$$30^{\text{kg}},44 \quad \text{und} \quad 40^{\text{kg}},50$$

variirt.

Es folgt daraus, dass bei Berechnung der aus Holz und Eisen zusammengesetzten Systeme es unbedingt nothwendig ist, den Aenderungen der Temperatur Rechnung zu tragen.*)

*) Figur 2 der Tafel I stellt die Curven der Biegungsmomente für den in Figur 1 skizzirten Träger dar, und zwar für die mittlere, sowie für die beiden äussersten Temperaturen. Diese Curven sind Parabeln, deren Parameter gleich ist der Hälfte des Gewichtes der Längeneinheit, und dienen selbe hauptsächlich dazu, das Gesetz anschaulich zu machen, nach welchem die elastischen Kräfte in den verschiedenen Querschnitten vertheilt sind.

2. Capitel.

Betrachtung eines durch drei Zugstangen aus Schmiedeisen und ~~einer~~ Druckstrebe aus Gusseisen armirten Balkens.

zwei

(Tafel I, Figuren 3 und 4.)

1. Allgemeine Angaben. — Ausser den in Figur 3 (Tafel I) ersichtlich gemachten Massen hat der betreffende Träger noch folgende Abmessungen:

Querschnitt des Balkens $0^m,20 \times 0^m,20 = 0^m,04$;

Durchmesser der Zugstangen $0^m,024$.

Die Druckstreben sind aus Gusseisen und haben einen kreuzförmigen Querschnitt; man kann dieselben als vollkommen starr betrachten, sei es wegen ihrer geringen Länge, sei es wegen der geringen Pressung, welcher sie unterworfen sind.

Die Belastung des Trägers, dessen Eigengewicht mit inbegriffen, beträgt 180 Kilogramm per Längenmeter.

2. Berechnung der Spannung in den Zugstangen. — Nennt man

T die Spannung in den geneigten Zugstangen,

T_1 jene der horizontalen Zugstange,

T_2 die Pressung in den Druckstreben,

β den Winkel, welchen die seitlichen Zugstangen mit der Achse des Balkens bilden,

so hat man

$$\sin\beta = \frac{0,60}{\sqrt{2,75^2 + 0,60^2}} = 0,2131,$$

$$\cos\beta = \frac{2,75}{\sqrt{2,75^2 + 0,60^2}} = 0,9734$$

und folglich

$$\left.\begin{aligned} T_1 &= 0,9734 \,.\, T \\ T_2 &= 0,2131 \,.\, T. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Für alle Querschnitte des Balkens ist die Normalpressung constant und ist deren Werth gleich T_1.

Die Reaction der Stützen ist

$$R = 180 \times 4{,}00 = 720.$$

Die Biegungsmomente in Bezug auf die Enden des Balkens und auf die mit den Druckstreben correspondirenden Querschnitte sind beziehungsweise

$$M_1 = 0,$$

$$M_2 = -R\,.\,2{,}75 + T\,.\,0{,}60\,.\,\cos\beta + \frac{1}{2}p\,.\,2{,}75^2 = -1299{,}4 + 0{,}584\,.\,T.$$

Nennt man nun

E den Elasticitätscoëfficienten des Holzes,

$\Omega = 0{,}20 \times 0{,}20 = 0{,}04$ die Querschnittsfläche des Balkens,

$I = \frac{1}{12}\,0{,}20 \times 0{,}20^3 = 0{,}000\,133$ das Trägheitsmoment dieses Querschnittes, so kann man die Deformationsarbeit des Balkens in folgender Weise ausdrücken:

für die alleinige Compression

$$\frac{8{,}00}{2\,E\,\Omega}\cdot T^2{}_1 = \frac{1}{2\,E}\cdot\frac{8{,}00 \times 0{,}9734^2}{0{,}04}\cdot T^2 = \frac{1}{2\,E}\cdot 189{,}48\,.\,T^2; \qquad (2)$$

für die Biegung der seitlichen Balkenstücke

$$2 \times \frac{2{,}75}{2EI}\left(\frac{M^2{}_2}{3} - \frac{M_2}{12}\cdot p\,.\,2{,}75^2\right);$$

für die Biegung des zwischen den beiden Druckstreben befindlichen Stückes

$$\frac{2{,}50}{2EI}\left(M^2{}_2 - \frac{M_2}{6}\cdot p\,.\,2{,}50^2\right).$$

Wenn man diese zwei letzten Formeln summirt, für M_2 dessen Werth in einer Function von T substituirt und für I und p deren Werthe einsetzt, so erhält man als Ausdruck der Arbeit, welche der Biegung des ganzen Balkens entspricht, folgende Formel:

$$\frac{1}{2EI}\left(\frac{13{,}00}{3}M^2{}_2 - \frac{2{,}75^3 + 2{,}50^3}{6}p\,.\,M_2\right) = \frac{1}{2E}(11084\,.\,T^2 - 27055054 \times 2T).\ (3)$$

Die Deformationsarbeit der Zugstangen wird durch die Formel

$$\frac{1}{2\,E'\,\omega}(2 \times 2{,}815\,.\,T^2 + 2{,}50 \times T^2{}_1)$$

ausgedrückt; substituirt man in dieser Formel für T_1 dessen Werth in einer Function von T, wie derselbe durch die erste der Gleichungen 1 gegeben wurde, beachtet man, dass die Querschnittsfläche der Zugstangen $\omega = 0,000\,452$ beträgt, und nimmt man schliesslich an, dass der Elasticitätscoëfficient des Eisens zwölfmal grösser ist als jener des Holzes, d. h. dass $E' = 12 \,.\, E$ ist, so erhält man

$$\frac{1}{2\,E} \,.\, 1475 \,.\, T^2. \tag{4}$$

Summirt man die drei Formeln (2), (3) und (4), so ergibt dies als Ausdruck der Deformationsarbeit des ganzen Systems die Formel

$$\frac{1}{2\,E}\,(12\,748 \,.\, T^2 - 27\,055\,054 \,.\, 2\,T). \tag{5}$$

Um nun den Werth der Spannung T zu bekommen, hat man den Differentialquotienten dieses Ausdruckes nach T gleich Null zu setzen, daher

$$12\,748 \,.\, T - 27\,055\,054 = 0$$

zu machen und erhält $T = \dfrac{27\,055\,054}{12\,748} = 2122{,}2.$

3. Grösste Beanspruchung der Zugstangen und des Balkens per Quadratmeter. — Setzt man in den Gleichungen (1) für T dessen Werth, so erhält man

$$T_1 = 2065{,}7; \quad T_2 = 452{,}2;$$

somit ist die Spannung der Zugstangen per Quadratmeter

für die seitlichen Zugstangen $= \dfrac{2122{,}2}{0{,}000\,452} = 4\,700\,000$ Kilogramm,

für die mittlere Zugstange $= \dfrac{2065{,}7}{0{,}000\,452} = 4\,570\,000$ Kilogramm.

Was die Druckstreben betrifft, so ist es unnöthig, sich weiters mit denselben zu befassen, denn man weiss, dass deren totale Spannung, resp. Pressung, so klein ist, dass derselben stets eine grössere Widerstandskraft entgegensteht.

Um nun die grösste Pressung des Holzes per Quadratmeter zu finden, muss man zuerst beachten, dass für alle Querschnitte des Balkens die Normalpressung gleich T_1 ist.

Das Biegungsmoment ist variabel und ergibt sich dessen Werth für einen Querschnitt der seitlichen Balkenstücke, d. h. für einen in einer Entfernung $x < 2^{m},75$ von einem Stützpunkte gelegenen Querschnitt, aus der Formel

$$M = -Rx + T\sin\beta \,.\, x + \frac{1}{2}\, p x^2 = -267{,}8 \,.\, x + 90 \,.\, x^2.$$

Den grössten numerischen Werth ergibt diese Formel zwischen $x = 0$ und $x = 2^{m},75$ für

$$x = \frac{267{,}8}{180} = 1{,}49,$$

und zwar ist derselbe $M = -199.$

Für das zwischen den Druckstreben befindliche Stück findet man, dass das grösste Biegungsmoment in dem mittleren Querschnitte stattfindet, und ist dessen Werth

$$M = -R \times 4{,}00 + \frac{1}{2}\, p \times 4{,}00^2 \times T_1 + 0{,}60 = -200{,}58.$$

Man sieht also, dass der grösste Werth des Biegungsmomentes für den mittleren Querschnitt des Balkens gilt; daraus folgt, dass die grösste Pressung des Holzes per Quadratmeter auch in diesem Querschnitte stattfinden wird, und dass deren Werth

$$\frac{T_1}{\Omega} - \frac{M\,v}{I} = \frac{2065{,}7}{0{,}04} + \frac{200{,}58 \times 0{,}10}{0{,}000133} = 201702$$

ist, d. h. $20^{kg},17$ per Quadratcentimeter.

4. Einfluss der Aenderung der Temperatur. — Da die Aenderungen der Temperatur beinahe gar keinen Einfluss auf das Holz haben, kann man annehmen, dass der einfache Holzbalken, selbst wenn er frei wäre, bei einer Aenderung der Temperatur sich weder verlängern noch verkürzen würde; die Zugstangen hingegen werden, wenn sie frei sind, sich verlängern oder verkürzen. Die Wirkung der Aenderung der Temperatur auf die Druckstreben kann man, sei es wegen ihrer geringen Länge, sei es wegen der Art, wie dieselben in dem System wirken, vernachlässigen.

Steigt oder fällt nun bezüglich der mittleren Temperatur die factische Temperatur um t Grade, so wird sich die mittlere Zugstange,

wenn sie frei wäre, um die Grösse $\frac{2{,}50\,.\,t}{82500}$, und jede der beiden seitlichen Zugstangen um $\frac{2{,}815\,.\,t}{82500}$ verlängern oder verkürzen, vorausgesetzt, dass man wie im 1. Capitel und wie in der Folge den Ausdehnungscoëfficienten des Eisens mit $\frac{1}{82500}$ annimmt.

Wenn man nun die Montirung der verschiedenen Constructionstheile des Systems bei der betrachteten Temperatur ausführen wollte, so würde man bald erkennen, dass, nachdem die horizontale Zugstange an ihre Stelle gebracht worden ist, jede der seitlichen Zugstangen um die Grösse

$$\frac{1}{2}\,\frac{2{,}50\,.\,t}{82500}\cdot\cos\beta + \frac{2{,}815\,.\,t}{82500} = 0{,}000049\,.\,t$$

zu lang oder zu kurz wäre.

Ist das System bei der mittleren Temperatur montirt worden, so hat man, zufolge eines im theoretischen Theile bewiesenen Lehrsatzes, zur Bestimmung der Spannung T der seitlichen Zugstangen bei der Temperatur t ober- oder unterhalb jener, bei welcher obige Belastung angenommen wurde, zu der Formel (5), welche die Deformationsarbeit des ganzen Systems ausdrückt, noch den Ausdruck

$$\pm\, 2 \times 0{,}000049\,.\,t\,.\,T = \pm\, 0{,}000098\,.\,t\,.\,T$$

hinzuzufügen und erhält somit

$$\frac{1}{2\,E}\,(12\,748\,.\,T^2 - 27\,055\,054\,.\,2\,T) \pm 0{,}000098\,.\,t\,.\,T;$$

sodann muss man den Differentialquotienten dieses Ausdruckes nach T gleich Null setzen, was folgende Gleichung ergibt:

$$\frac{1}{E}\,(12\,748\,.\,T - 27\,055\,054) \pm 0{,}000\,098\,.\,t = 0.$$

Nimmt man $E = 1\,500\,000\,000$, so erhält man

$$T = 2122{,}2 \mp 11{,}53\,.\,t. \qquad (6)$$

Dabei muss das obere Zeichen beim Steigen, das untere beim Sinken der Temperatur genommen werden.

Wir nehmen nun an, dass die Montirung des Trägers bei der mittleren Temperatur von 15^0 geschehen sei, und dass die Temperatur

zwischen — 10^0 und + 40^0 veränderlich sei; die Untersuchung der beiden äussersten Fälle ergibt sodann:

Erster Fall. — *Temperatur von 40⁰.*

In der Formel (6) muss man $t = 25$ machen und das obere Zeichen nehmen; es ergibt sich dann

$$T = 2122{,}2 - 11{,}53 \times 25 = 1833{,}9,$$

woraus folgt, dass die Spannung der seitlichen Zugstangen $\frac{1833{,}9}{0{,}000452}$ $= 4\,057\,000$ Kilogramm per Quadratmeter beträgt.

Um die grösste Spannung im Balken zu finden, beachte man, dass für alle Querschnitte desselben die Normalpressung

$$T_1 = T \cos \beta = 1785$$

ist, und dass ferner das Biegungsmoment, welches von einem Querschnitte zum anderen variabel ist, seinen grössten numerischen Werth in dem mittleren Querschnitte des Balkens hat, und zwar ist dieser Werth

$$M = - R \times 4{,}00 + \frac{1}{2} p \,.\, 4{,}00^2 + T_1 \,.\, 0{,}60 = - 369.$$

Die grösste Pressung des Holzes per Quadratmeter ergibt sich demnach mit

$$\frac{1785}{0{,}40} + \frac{369 \times 0{,}10}{0{,}000133} = 322\,069,$$

d. h. $32^{kg},21$ per Quadratcentimeter.

Zweiter Fall. — *Temperatur von — 10⁰.*

Auch in diesem Falle muss man $t = 25$ machen, nur ist das untere Zeichen zu nehmen, so dass

$$T = 2122{,}2 + 11{,}53 \times 25 = 2410{,}4;$$

es ist also die Spannung der seitlichen Zugstangen per Quadratmeter

$$\frac{2410{,}4}{0{,}000452} = 5\,332\,000.$$

Die Normalpressung in dem Balken hat für alle Querschnitte den constanten Werth $T \cos \beta = 2410{,}4 \times 0{,}9734 = 2346;$

für einen in der Entfernung x vom nächst gelegenen Stützpunkte befindlichen Querschnitt, wobei $x < 2^m{,}75$, wird das Biegungsmoment durch die Formel

$$M = -Rx + T\sin\beta \,.\, x + \frac{1}{2}px^2 = -206{,}4 \,.\, x + 90 \,.\, x^2$$

ausgedrückt, deren numerisches Maximum, welches mit

$$x = \frac{206{,}4}{180} = 1{,}15 \quad \text{correspondirt,} \quad M = -118{,}3 \quad \text{ist.}$$

Für den mittleren Querschnitt des Balkens erhält man auf leichte Art das Biegungsmoment $M = -42{,}4$, woraus folgt, dass die grösste Pressung des Holzes in den seitlichen Theilen stattfindet, und zwar ist deren Werth

$$\frac{2346}{0{,}04} + \frac{118{,}3 \times 0{,}10}{0{,}000133} = 147\,600,$$

d. h. $14^{kg},76$ per Quadratcentimeter.*)

5. Schlussfolgerung. — Die vorhergehenden Resultate zeigen, wie gross für die aus Holz und Eisen zusammengesetzten Systeme der Einfluss der Temperatur auf die Vertheilung der Spannungen und Pressungen sein kann.

In der That werden bei einer Veränderlichkeit der Temperatur von -10^0 bis zu $+40^0$ auch die elastischen Kräfte per Quadratmeter zwischen folgenden Grenzen variiren:

für die seitlichen Zugstangen zwischen 4 057 000 und 5 332 000 Kilogramm,
für den Holzbalken zwischen 322 069 und 147 600 Kilogramm.

*) Figur 4 (Tafel I) stellt die Curven der Biegungsmomente für die mittlere, sowie für die beiden äussersten Temperaturen dar, und zwar sind dies Parabelbögen.

3. Capitel.

Betrachtung eines durch drei Zugstangen aus Schmiedeisen und einer Druckstrebe aus Gusseisen armirten Balkens.

(Tafel I, Figuren 5 und 6.)

1. Allgemeine Angaben. — Ausser den in Figur 5 (Tafel I) ersichtlich gemachten Massen hat der in Rede stehende Träger noch folgende Abmessungen:

Entfernung der inneren Kanten der beiden Auflager, d. h. freie Tragweite des Trägers $6^{m},70$;

Entfernung jeder Druckstrebe von dem zunächst gelegenen Auflager $2^{m},18$;

Entfernung der horizontalen Zugstange von der Achse des Balkens $0^{m},60$;

Verticalprojection der Zugstangen $0^{m},60 - 0^{m},13 = 0^{m},47$;

Querschnitt des Balkens $0^{m},20 \times 0^{m},20$;

Durchmesser der Zugstangen $0^{m},025$.

Die Druckstreben sind aus Gusseisen und haben einen kreuzförmigen Querschnitt; man kann dieselben hier als vollkommen starr betrachten.

Die Belastung des Trägers, dessen Eigengewicht mit inbegriffen, beträgt per Längenmeter

$$p = 250 \text{ Kilogramm.}$$

2. Berechnung der Spannung in den Zugstangen. — Nennt man

T die Spannung in den seitlichen Zugstangen,

T_1 die Spannung in der horizontalen Zugstange,

T_2 die Pressung in den Druckstreben,

β den Winkel, welchen die seitlichen Zugstangen mit der Horizontalen bilden,

so hat man

$$\sin\beta = \frac{0,47}{\sqrt{2,07^2 + 0,47^2}} = 0,2214,$$

$$\cos\beta = \frac{2,07}{\sqrt{2,07^2 + 0,47^2}} = 0,9752$$

und folglich
$$\left.\begin{array}{l} T_1 = 0{,}9752\,.\,T, \\ T_2 = 0{,}2214\,.\,T. \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Die Normalpressung ist für alle Querschnitte des Balkens zwischen den äussersten Knotenpunkten der seitlichen Zugstangen constant und gleich T_1.

In den zwei kleinen seitlichen Stücken zwischen diesen Knotenpunkten und den Auflagflächen, deren jedes die Länge von $0^m,11$ hat, ist die Normalpressung gleich Null.

Die Biegungsmomente für die Querschnitte, welche die verschiedenen Stücke des Balkens trennen, werden durch folgende Formeln gegeben:

Für die mit den inneren Kanten der Auflager correspondirenden Querschnitte ist
$$M_0 = \frac{1}{2}\,p\,.\,0{,}15^2 = 2{,}81;$$

für die in der Entfernung von $0^m,11$ von den vorhergehenden befindlichen Querschnitte, d. h. für die mit den äussersten Knotenpunkten der seitlichen Zugstangen correspondirenden Querschnitte ist
$$M_1 = -R\,.\,0{,}11 + \frac{1}{2}\,p\,.\,0{,}26^2 + 0{,}13\,.\,T\cos\beta = -87{,}80 + 0{,}1268\,.\,T;$$

für die mit den Druckstreben correspondirenden Querschnitte ist
$$M_2 = -R\,.\,2{,}18 + \frac{1}{2}\,p\,.\,2{,}33^2 + 0{,}60\,.\,T\cos\beta = -1228{,}89 + 0{,}5851\,.\,T.$$

Nennt man nun

E den Elasticitätscoëfficienten des Holzes,

$\Omega = 0{,}20 \times 0{,}20 = 0{,}04$ die Querschnittsfläche des Balkens,

$I = \frac{1}{12}\,0{,}20 \times 0{,}20^3 = 0{,}000\,133$ das Trägheitsmoment dieses Querschnittes,

so kann man die Deformationsarbeit des Balkens leicht ausdrücken. Denn für jenen Theil dieser Arbeit, welcher der alleinigen Compression, d. h. den Normalpressungen entspricht, hat man die Formel
$$\frac{2{,}07 \times 2 + 2{,}34}{2\,E\,\Omega}\cdot T^2_1 = \frac{1}{2\,E}\cdot\frac{6{,}48 \times 0{,}9752^2}{0{,}04}\cdot T^2 = \frac{1}{2\,E}\cdot 154{,}06\,.\,T^2, \quad (2)$$

und für den von der alleinigen Biegung abhängigen Theil, d. h. für jenen Theil, welcher den Biegungsmomenten entspricht, hat man folgende Formeln:

Für die zwei äussersten Stücke zwischen den Auflagern und den äussersten Knotenpunkten der seitlichen Zugstangen

$$\left.\begin{aligned} 2 \cdot \frac{0,11}{2EI}\left[\frac{M^2_0 + M_0 M_1 + M^2_1}{3} - \frac{1}{12} p \,.\, 0,11^2 (M_0 + M_1)\right] \\ = \frac{1}{2E}(9 \,.\, T^2 - 607 \times 2\,T); \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

für die zwei Stücke von $2^m,07$ Länge zwischen den obgenannten äussersten Knotenpunkten und den Druckstreben

$$\left.\begin{aligned} 2 \cdot \frac{2,07}{2EI}\left[\frac{M^2_1 + M_1 M_2 + M^2_2}{3} - \frac{1}{12} p \,.\, 2,07^2 (M_1 + M_2)\right] \\ = \frac{1}{2E}(4488 \,.\, T^2 - 9\,640\,068 \times 2\,T); \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

für das zwischen den Druckstreben befindliche Stück

$$\frac{2,34}{2EI}\left[M^2_2 - \frac{1}{6} p \,.\, 2,34^2 \,.\, M_2\right] = \frac{1}{2E}(6021 \,.\, T^2 - 13\,842\,407 \,.\, 2\,T). \quad (5)$$

Die Deformationsarbeit der Zugstangen wird durch die Formel

$$\frac{1}{2\,E'\omega}(2 \times 2,123 \,.\, T^2 + 2,34 \,.\, T^2) = \frac{13179}{2\,E'}\,T^2$$

ausgedrückt, wenn man mit $\omega = 0,000\,491$ die Querschnittsfläche der Zugstangen und mit E' den Elasticitätscoëfficienten des Eisens bezeichnet. Man kann nun

$$E' = 18\,000\,000\,000 \quad \text{und} \quad E = 1\,500\,000\,000$$

nehmen, womit $E' = 12\,E$ ist, so dass obige Formel zu folgender wird:

$$\frac{1}{2\,E}\,1098 \,.\, T^2. \quad (6)$$

Summirt man die Formeln (2), (3), (4), (5), (6), so erhält man

$$\frac{1}{2\,E}(11\,770 \,.\, T^2 - 23\,483\,082 \,.\, 2\,T), \quad (7)$$

d. h. den Ausdruck für die Deformationsarbeit des ganzen Systems.

Um nun den Werth der Spannung T zu finden, muss man den Differentialquotienten dieses Ausdruckes nach T gleich Null setzen, d. h.

$$11\,770\,.\,T - 23\,483\,082 = 0$$

machen, so dass $$T = 1995.$$

3. Grösste Beanspruchung der Zugstangen und des Balkens per Quadratmeter. — Setzt man diesen Werth von T in die Gleichungen (1), so erhält man

$$T_1 = 1945{,}5 \quad \text{und} \quad T_2 = 441{,}7.$$

Die seitlichen Zugstangen sind die am meisten beanspruchten und ist deren Spannung per Quadratmeter

$$\frac{1995}{0{,}000491} = 4\,063\,000.$$

Um die grösste Pressung des Balkens per Quadratmeter zu erhalten, muss man zuerst das grösste Biegungsmoment kennen. Setzt man nun in den in vorhergehender Nummer gegebenen Ausdrücken von M_1 und M_2 $T = 1995$, so erhält man

$$M_1 = 170{,}2 \quad \text{und} \quad M_2 = -61{,}6;$$

bedenkt man aber, dass die Curven der Biegungsmomente für die drei Stücke des Balkens, welche mit den drei Zugstangen correspondiren, Parabelbögen sind, welche alle die Hälfte der Gesammtbelastung per Längenmeter, d. h. 125, zum Parameter haben, so erkennt man, dass das grösste Biegungsmoment in dem mittleren Querschnitte des Balkens auftritt. Dieses Moment hat also den Werth

$$M = -R\,.\,3{,}35 + \frac{1}{2}\,250 \times 3{,}50^2 + T_1\,.\,0{,}60 = -232.$$

Da die Normalpressung in dem mittleren Querschnitte des Trägers gleich ist T_1 oder 1946 Kilogramm, so resultirt für die grösste Pressung des Holzes per Quadratmeter

$$\frac{1946}{0{,}04} + \frac{232 \times 0{,}10}{0{,}000133} = 223\,490,$$

d. h. $22^{kg},35$ per Quadratcentimeter.

4. Einfluss der Aenderung der Temperatur. — Die obigen Resultate gelten für die Temperatur, bei welcher das System montirt wurde und welche *mittlere Temperatur* genannt wird.

Bei einer Temperatur von t Graden ober- und unterhalb der mittleren Temperatur haben die verschiedenen Stücke nicht mehr die proportionalen Längen, wie dieselben sie früher gehabt haben, weshalb die Montirung nicht durchgeführt werden kann, ohne schon vor der Belastung des Trägers Pressungen und Spannungen hervorzurufen.

Da für Holz die dem Wechsel der Temperatur entsprechenden Längenänderungen gleich Null angesehen werden können, kann man annehmen, dass die Länge des Balkens constant bleibt, wenn auch die Temperatur sich ändert.

Ferner kann man den Einfluss einer Aenderung der Temperatur auf die Druckstreben vernachlässigen, denn diese haben im Verhältnisse zur Länge der Zugstangen eine minimale Länge und ihre Lage in dem System ist eine derartige, dass eine Aenderung ihrer Länge nur einen sehr kleinen Einfluss auf die Berechnung hat, selbst wenn deren Länge mit jener der Zugstangen zu vergleichen wäre.

Wenn die Temperatur bezüglich der mittleren Temperatur um t Grade steigt oder fällt, so verlängern oder verkürzen sich die Zugstangen um folgende Grössen:

die mittlere Zugstange um $\frac{2{,}34\,t}{82500}$,

jede der seitlichen Zugstangen um . . $\frac{2{,}123\,t}{82500}$.

Geschieht nun die Montirung bei der Temperatur von t Graden ober- oder unterhalb der mittleren Temperatur, so wird, nachdem die mittlere Zugstange an ihren Platz gebracht wurde, jede der seitlichen Zugstangen zu lang oder zu kurz sein, und zwar um eine Länge, deren Grösse durch die Formel

$$\frac{1}{2}\,\frac{2{,}34\,.\,t}{82500}\cos\beta + \frac{2{,}123\,.\,t}{82500} = 0{,}000040\,.\,t$$

ausgedrückt wird.

Geschieht hingegen die Montirung bei der mittleren Temperatur, so muss man, um den Werth der Spannung T bei der Temperatur von

t Graden ober- oder unterhalb derselben bei Berücksichtigung der Belastung zu finden, zur Formel (7), welche die Deformationsarbeit des ganzen Systems gibt, noch den Ausdruck

$$\pm 2 \times 0{,}000040 \, . \, t \, . \, T = \pm 0{,}000080 \, . \, t \, . \, T$$

hinzufügen, womit man

$$\frac{1}{2E}(11\,770 \, . \, T^2 - 23\,483\,082 \, . \, 2\,T) \pm 0{,}000080 \, . \, t \, . \, T$$

erhält; sodann muss man den Differentialquotienten dieses Ausdruckes nach T gleich Null setzen. Dies ergibt somit die Gleichung

$$T = 1995 \pm 10{,}20 \, . \, t, \tag{8}$$

indem man $E = 1\,500\,000\,000$ macht und das obere Zeichen für das Steigen der Temperatur und das untere für das Sinken derselben nimmt.

Wir nehmen nun an, dass die mittlere Temperatur, bei welcher der Träger montirt wurde, 15^0 sei, und dass die Grenzen, zwischen welchen die Temperatur sich ändert, 40^0 und -10^0 sind, und wollen diese beiden Fälle getrennt betrachten.

Erster Fall. *Temperatur von* 40^0.

In der Formel (8) muss man $t = 25$ machen und das obere Zeichen nehmen; dies ergibt $T = 1995 - 255 = 1740$

und folglich $T_1 = T \cos \beta = 1697,$

d. h. geringere Spannungen als jene, welche bei der mittleren Temperatur stattfinden.

Um den Werth der grössten Pressung per Quadratmeter des Balkens zu erhalten, hat man zuerst zu beachten, dass im vorliegenden Falle das grösste Biegungsmoment im mittleren Querschnitte des Trägers stattfindet, und dass dessen Werth

$$M = - R \, . \, 3{,}35 + \frac{1}{2} \cdot 250 \times 3{,}50^2 + T_1 \, . \, 0{,}60 = - 382$$

ist; da ferner die Normalpressung in diesem Querschnitte gleich $T_1 = 1697$ ist, so ergibt sich für die grösste Pressung des Holzes per Quadratmeter der Werth

$$\frac{1697}{0{,}04} + \frac{382 \times 0{,}10}{0{,}000133} = 329\,643,$$

d. h. $32^{\text{kg}},96$ per Quadratcentimeter.

Zweiter Fall. — *Temperatur von* — 10°.

Auch in diesem Falle muss man in der Formel (8) $t = 25$ machen, nur ist das untere Zeichen zu nehmen; dies ergibt

$$T = 1995 + 255 = 2250$$

und folglich $$T_1 = 2250 \,.\, \cos\beta = 2194.$$

Die grösste Spannung des Eisens findet in den seitlichen Zugstangen statt und beträgt deren Werth per Quadratmeter

$$\frac{2250}{0{,}000491} = 4\,583\,000.$$

In Betreff des Balkens ist es unnöthig, den Werth der grössten Spannung per Quadratmeter zu suchen, da man leicht erkennt, dass diese Pressung geringer ist als im vorhergehenden Falle.*)

5. Schlussfolgerung. — Aus den in den oben betrachteten Fällen erhaltenen Resultaten ergibt sich, dass die grösste Spannung der Zugstangen bei der Temperatur von — 10° eintritt und dass deren Werth $4^{kg},58$ per Quadratmillimeter ist, während die grösste Pressung des Holzes bei der Temperatur von 40° stattfindet, und deren Werth $32^{kg},96$ per Quadratcentimeter beträgt.

Man kann also hieraus folgern, dass den Stabilitätsbedingungen des Trägers vollkommen entsprochen wird.

*) Figur 6 (Tafel I) stellt die Curven der Biegungsmomente für die mittlere, sowie für die beiden äussersten Temperaturen dar, und zwar sind dies Parallelbögen. Dieselben zeigen, dass bei der Temperatur von —10° die grössten Biegungsmomente geringere sind als jene, welche bei der Temperatur von 40° stattfinden.

4. Capitel.

Betrachtung einer Halle aus schmiedeisernen Bundgespärren ohne Zugstangen.*)

(Tafel II.)

1. Allgemeine Angaben. — Lichte Weite $48^m,00$;
Pfeilhöhe . $24^m,00$;
Durchmesser der inneren Wölbung $24^m,00$;
Centriwinkel $= 180^0$;
Entwickelte Länge der inneren Wölbung $75^m,398$;
Höhe des Bogens in der Richtung eines Durchmessers . . . $1^m,816$;
Entfernung der Bundgespärre $7^m,00$.

Der Fuss jedes Bundgespärres, welcher bis zur Höhe von $5^m,48$ (an der Innenseite gemessen) aus Gusseisen besteht, dient als Widerlagsplatte und ist in dem Mauerwerke des Widerlagers verankert. Oberhalb dieser Widerlagsfläche besteht das Bundgespärre aus Schmiedeisen, und nur dieser Theil ist für die Berechnung in Betracht zu ziehen und kann als an seinen Enden eingemauert (eingespannt) betrachtet werden.

Der Centriwinkel des aus Schmiedeisen construirten Theiles des Bogens beträgt $153^0 36'$.

2. Belastungen. — Es ist zu beachten, dass die Bedachung der Halle nicht gleichförmig ist, denn seitwärts wird sie durch Zinkblech gebildet, welches auf Latten von $0^m,03$ Dicke aufruht, während sie oben aus Glas besteht.

Da aber diese zwei Arten der Bedachung beinahe dasselbe Gewicht per Quadratmeter haben, so kann man annehmen, dass das

*) Die Bundgespärre der grossen Bahnhofhalle in Turin haben im Allgemeinen dieselbe Form, dieselbe Sehne und dieselbe Pfeilhöhe wie die hier zu betrachtenden; jene differiren von diesen nur durch die Höhe, welche bei jenen $2^m,00$ statt $1^m,816$ beträgt, durch die Dimensionen der Eisengattungen und durch die Art der Unterstützung der Enden. Der Vergleich der vorliegenden Bundgespärre mit jenen der Halle in Turin zeigt, dass diese letzteren eine genügende, wenn nicht eine etwas zu grosse Stabilität besitzen.

permanente Gewicht der Halle über die ganze Fläche gleichförmig vertheilt ist.

Unter dieser Voraussetzung ergibt sich das Gewicht der Bedachung per Quadratmeter aus folgender Zusammenstellung:

Schnee- und Winddruck	= 60	Kilogr.
Bedachung aus Zinkblech oder Glas . .	= 28	„
Fetten	= 18	„
Windstreben	= 1	„
Summe zur Berechnung der Fetten . .	107	Kilogr.
Eigengewicht des Bogens	19	„
Summe zur Berechnung des Bogens . .	126	Kilogr.

Last per Längenmeter auf die äussere Wölbung des Bogens:

permanentes Gewicht	$= (126 - 60) \times 7{,}00 = 462$	Kilogr.
zufällige Belastung	$60 \times 7{,}00 = 420$	„
Summe . . .	882	Kilogr.

3. Allgemeine Formeln für den Fall, als das Bundgespärre nur auf der linken Hälfte belastet ist, und wobei von dem permanenten Gewichte abgesehen wird. — Die Hälfte des eigentlichen Bogens kann man, wie aus Figur 1 ersichtlich ist, in sechs gleiche Abschnitte*) theilen, deren jeder, in der Achse des Bogens gemessen, eine Länge von $5^m,565$ und, auf der äusseren Wölbung gemessen, eine solche von $5^m,769$ hat.

Annäherungsweise kann man annehmen, dass der Schwerpunkt der von jedem dieser sechs Bogenstücke getragenen Last im Mittelpunkte der äusseren Wölbung des betreffenden Bogenstückes sich befinde.

Ferner kann man annehmen, dass nur die fünf oberen Bogenstücke belastet sind, während dies bei dem Stücke 0,1, dessen äussere Wölbung

*) Es ist unerlässlich, dass die Zahl der Abschnitte, in welche man den Halbbogen theilt, eine *gerade* ist, denn wenn es auch zufolge den im 4. Capitel gegebenen Formeln erlaubt ist, den Halbbogen in eine beliebige Anzahl von Abschnitten zu theilen, so muss man doch für jeden derselben den mittleren Querschnitt betrachten, d. h. man muss jeden Abschnitt in zwei andere theilen, wodurch die Anzahl der Abschnitte immer eine gerade wird.

sich beinahe ganz im Mauerwerk befindet, nicht der Fall ist. Für dieses Stück hätte man also nur das Eigengewicht des Bogens zu berücksichtigen; dieses ist jedoch im Verhältnisse zur Bedachung und zur Belastung sehr klein, so dass man dasselbe umsomehr vernachlässigen kann, als das Gewicht des Stückes 0,1, welches am Bogenanfange sich befindet, selbst wenn es nicht sehr klein wäre, immerhin nur einen geringen Einfluss auf das Resultat der Berechnung hätte.

Die Unbekannten des Problems sind:

M das Biegungsmoment,

P die Normalpressung,

S die Schubkraft im Scheitel;

in Functionen dieser Unbekannten kann man das Biegungsmoment, die Normalpressung und die Schubkraft für einen beliebigen Querschnitt, sei es links, sei es rechts vom Scheitel, ausdrücken. In der That wird, wenn man sich den Bogen in zwei gleiche Hälften getheilt denkt, jede derselben im Gleichgewichte bleiben, sobald in dem Querschnitte 6 zwei Kräfte P und S im Mittelpunkte und ein Kräftepaar wirken, dessen Moment M ist; demnach sind, z. B. für den linken Querschnitt 4, die rechts davon wirkenden Kräfte die folgenden: die zwei Kräfte P und S, das auf den Querschnitt 6 wirkende Biegungsmoment M und das Gewicht von 420 Kilogramm per Längenmeter auf die äussere Wölbung (obere Gurte) der beiden Stücke 4,5 und 5,6.

Um das Biegungsmoment M_4, die Normalpressung P_4 und die Schubkraft S_4 für den linken Querschnitt 4 auszudrücken, hat man also folgende Formeln:*)

$$M_4 = M - 2{,}45 \,.\, Q - 10{,}76 \,.\, S + 2423 \times 7{,}84 + 2423 \times 2{,}25,$$
$$P_4 = 0{,}902 \,.\, Q - 0{,}432\,(S - 2423 \times 2),$$
$$S_4 = 0{,}432 \,.\, Q + 0{,}902\,(S - 2423 \times 2).$$

*) Die Längen der Hebelarme, welche zur Bildung der Biegungsmomente nothwendig sind, kann man in Figur 1 ersehen. Um die Ausdrücke für die Normalpressungen und die Schubkräfte bilden zu können, muss man die Sinus und Cosinus der Winkel kennen, welche die Querschnitte mit der Verticalen einschliessen; alle diese Sinus und Cosinus erhält man aber auf einmal mit Hilfe der sehr einfachen, in Figur 2 dargestellten Construction.

Für den Querschnitt 4 des rechten Halbbogens werden das Biegungsmoment, die Normalpressung und die Schubkraft durch die gleichen Formeln ausgedrückt, wenn man darin das Zeichen der Glieder mit S ändert und die rein numerischen Glieder weglässt, da zufolge der Annahme der rechte Halbbogen nicht belastet ist. Man erhält demnach

$$M'_4 = M - 2{,}45 \,.\, Q + 10{,}76 \,.\, S,$$
$$P'_4 = 0{,}902 \,.\, Q + 0{,}432 \,.\, S,$$
$$S'_4 = 0{,}432 \,.\, Q - 0{,}902 \,.\, S.$$

Bildet man nun die analogen Formeln auch für die Querschnitte 0, 1, 2, . . . 6, sowohl links als auch rechts, und führt man die numerischen Operationen aus, so lässt sich nebenstehende Tabelle zusammenstellen.

4. Bestimmung des Werthes der Unbekannten. — Die zwei getrennt betrachteten Halbbögen werden sich unter der Einwirkung der Kräfte, welche auf dieselben thätig sind, deformiren; diese Deformationen müssen aber derartig sein, dass der Querschnitt 6 des einen Halbbogens jenem des anderen folgt, so dass diese zwei Querschnitte fortwährend in Contact bleiben. Man hat also die folgenden drei geometrischen Bedingungen:

1. und 2. Die horizontale und die verticale Verrückung des Mittelpunktes des Scheitelquerschnittes müssen für den linken und für den rechten Halbbogen gleich sein, aber entgegengesetzte Zeichen haben.

3. Die Drehung des Scheitelquerschnittes für den linken Halbbogen muss entgegengesetzt gleich sein der Drehung des Scheitelquerschnittes für den rechten Halbbogen.

Die Werthe von M, Q, S, welche diesen Bedingungen entsprechen, findet man, indem man die Deformationsarbeit des ganzen Bogens in Functionen dieser Unbekannten ausdrückt und sodann die Differentialquotienten mit Bezug auf diese Unbekannten gleich Null setzt.

Nennt man nun

E den Elasticitätscoëfficienten des Eisens (wie dies in den folgenden Capiteln auch geschehen wird),

Ω die Querschnittsfläche des Bogens,

I das Trägheitsmoment dieser Fläche,

und macht man

Quer-schnitte 1	Biegungsmomente 2	Normalpressungen 3	Schubkräfte 4
		I. Linker Halbbogen.	
0	$M_0 = M - 19{,}22 \,.\, Q - 24{,}25 \,.\, S + 135688$	$P_0 = 0{,}211 \,.\, Q - 0{,}977 \,.\, S + 11836$	$S_0 = 0{,}977 \,.\, Q + 0{,}211 \,.\, S - 2556$
1	$M_1 = M - 13{,}99 \,.\, Q - 22{,}39 \,.\, S + 113614$	$P_1 = 0{,}438 \,.\, Q - 0{,}899 \,.\, S + 10891$	$S_1 = 0{,}899 \,.\, Q + 0{,}438 \,.\, S - 5306$
2	$M_2 = M - 9{,}30 \,.\, Q - 19{,}41 \,.\, S + 83279$	$P_2 = 0{,}627 \,.\, Q - 0{,}779 \,.\, S + 7550$	$S_2 = 0{,}779 \,.\, Q + 0{,}627 \,.\, S - 6077$
3	$M_3 = M - 5{,}39 \,.\, Q - 15{,}47 \,.\, S + 51949$	$P_3 = 0{,}784 \,.\, Q - 0{,}621 \,.\, S + 4514$	$S_3 = 0{,}621 \,.\, Q + 0{,}784 \,.\, S - 5699$
4	$M_4 = M - 2{,}45 \,.\, Q - 10{,}76 \,.\, S + 24472$	$P_4 = 0{,}902 \,.\, Q - 0{,}432 \,.\, S + 2093$	$S_4 = 0{,}432 \,.\, Q + 0{,}902 \,.\, S - 4371$
5	$M_5 = M - 0{,}62 \,.\, Q - 5{,}52 \,.\, S + 6300$	$P_5 = 0{,}975 \,.\, Q - 0{,}222 \,.\, S + 538$	$S_5 = 0{,}222 \,.\, Q + 0{,}975 \,.\, S - 2362$
6	$M_6 = M$	$P_6 = 1{,}000 \,.\, Q$	$S_6 = \qquad + 1{,}000 \,.\, S$
		II. Rechter Halbbogen.	
0	$M_0^1 = M - 19{,}22 \,.\, Q + 24{,}25 \,.\, S$	$P_0^1 = 0{,}211 \,.\, Q + 0{,}977 \,.\, S$	$S_0^1 = 0{,}977 \,.\, Q - 0{,}211 \,.\, S$
1	$M_1^1 = M - 13{,}99 \,.\, Q + 22{,}39 \,.\, S$	$P_1^1 = 0{,}438 \,.\, Q + 0{,}899 \,.\, S$	$S_1^1 = 0{,}899 \,.\, Q - 0{,}438 \,.\, S$
2	$M_2^1 = M - 9{,}30 \,.\, Q + 19{,}41 \,.\, S$	$P_2^1 = 0{,}627 \,.\, Q + 0{,}779 \,.\, S$	$S_2^1 = 0{,}779 \,.\, Q - 0{,}627 \,.\, S$
3	$M_3^1 = M - 5{,}39 \,.\, Q + 15{,}47 \,.\, S$	$P_3^1 = 0{,}784 \,.\, Q + 0{,}621 \,.\, S$	$S_3^1 = 0{,}621 \,.\, Q - 0{,}784 \,.\, S$
4	$M_4^1 = M - 2{,}45 \,.\, Q + 10{,}76 \,.\, S$	$P_4^1 = 0{,}902 \,.\, Q + 0{,}432 \,.\, S$	$S_4^1 = 0{,}432 \,.\, Q - 0{,}902 \,.\, S$
5	$M_5^1 = M - 0{,}62 \,.\, Q + 5{,}52 \,.\, S$	$P_5^1 = 0{,}975 \,.\, Q + 0{,}222 \,.\, S$	$S_5^1 = 0{,}222 \,.\, Q - 0{,}975 \,.\, S$
6	$M_6^1 = M$	$P_6^1 = 1{,}000 \,.\, Q$	$S_6^1 = \qquad - 1{,}000 \,.\, S$

$$\sum(M^2+M'^2)=\frac{1}{3}\Big[(M^2_0+M'^2_0)+4(M^2_1+M'^2_1)+2(M^2_2+M'^2_2)$$
$$+4(M^2_3+M'^2_3)+2(M^2_4+M'^2_4)+4(M^2_5+M'^2_5)+(M^2_6+M'^2_6)\Big],$$

$$\sum(P^2+P'^2)=\frac{1}{3}\Big[(P^2_0+P'^2_0)+4(P^2_1+P'^2_1)+2(P^2_2+P'^2_2)$$
$$+4(P^2_3+P'^2_3)+2(P^2_4+P'^2_4)+4(P^2_5+P'^2_5)+(P^2_6+P'^2_6)\Big],$$

so erhält man — bei Beachtung, dass die Länge jedes Bogenstückes, in der Achse gemessen, $5^m,564$ beträgt — als Ausdruck für die Deformationsarbeit des ganzen Bogens (wenn man den sehr kleinen Theil dieser Arbeit, welcher der Verschiebung entspricht, vernachlässigt) die folgende Formel:

$$\frac{5{,}564}{2EI}\sum(M^2+M'^2)+\frac{5{,}564}{2E\Omega}\sum(P^2+P'^2);$$

lässt man hierin den numerischen Factor $\frac{5.564}{2EI}$ weg, was jene Gleichungen nicht ändert, welche man daraus ableitet, indem man die Differentialquotienten nach M, Q, S gleich Null setzt, so ergibt sich

$$\sum(M^2+M'^2)+\frac{I}{\Omega}\sum(P^2+P'^2). \tag{1}$$

Für den durch die Figur 3 (Tafel II) dargestellten Bogenquerschnitt hat man

$$\Omega=0{,}22\times1{,}816-0{,}072\times1{,}80-0{,}122\times1{,}782$$
$$-0{,}018\times1{,}66-0{,}008\times1{,}36=0{,}011756;$$

$$I=\frac{1}{12}(0{,}22\times1{,}816^3-0{,}072\times1{,}80^3-0{,}122\times1{,}782^3$$
$$-0{,}018\times1{,}66^3-0{,}008\times1{,}36^3)=0{,}008735;$$

und folglich
$$\frac{I}{\Omega}=\frac{0{,}008735}{0{,}011756}=0{,}743.$$

Substituirt man nun für M_0, M'_0; M_1, M'_1; ... P_0, P'_0; P_1, P'_1; ... deren Ausdrücke in Functionen von M, Q, S, wie sie in der Tabelle auf Seite 341 gegeben wurden, so erhält man:

$$\sum (M^2 + M'^2) = 12 \,.\, M^2 - 81{,}82 \,.\, 2\,QM + 346214 \,.\, 2\,M + 970{,}00 \,.\, Q^2$$
$$- 3923436 \,.\, 2\,Q + 3105{,}02 \,.\, S^2 - 6859647 \,.\, 2\,S;$$
$$\frac{I}{\Omega} \sum (P^2 + P'^2) = 5{,}18 \,.\, Q^2 + 12040 \,.\, 2\,Q + 4{,}40 \,.\, S^2 - 18784 \,.\, 2\,S; \text{*)}$$

und die Formel (1) ergibt sodann

$$\left.\begin{array}{l} 12 \,.\, M^2 - 81{,}82 \,.\, 2\,QM + 346\,214 \,.\, 2\,M + 975{,}18 \,.\, Q^2 \\ - 3\,911\,396 \,.\, 2\,Q + 3109{,}42 \,.\, S^2 - 6\,878\,431 \,.\, 2\,S. \end{array}\right\} \quad (2)$$

Setzt man die Differentialquotienten dieses Ausdruckes mit Bezug auf M, Q, S gleich Null, so ergeben sich folgende Gleichungen:

$$12 \,.\, M - 81{,}82 \,.\, Q + 346214 = 0,$$
$$- 81{,}82 \,.\, M + 975{,}18 \,.\, Q - 3911396 = 0,$$
$$3109{,}42 \,.\, S - 6878431 = 0,$$

von welchen, wie man sieht, die ersten zwei nur die Unbekannten M und Q und die dritte Gleichung die Unbekannte S enthält.

Aus diesen Gleichungen ergibt sich

$$M = - 3510,$$
$$Q = 3715{,}7,$$
$$S = 2212{,}1.$$

*) Aus diesen Ausdrücken sieht man, dass der zweite Theil der Formel (1), d. h. derjenige, welcher die Pressungen P enthält, im Verhältnisse zum ersten Theile, welcher die Biegungsmomente enthält, sehr klein ist. Bei der ersten Annäherung kann man sich demnach mit dem ersten Theile der Gleichung (1), in welchem weder die Fläche, noch das Trägheitsmoment des Bogenquerschnittes vorkommt, begnügen. Man findet auf diese Weise die Annäherungswerthe der drei Unbekannten M, Q, S für den Fall der Belastung nur eines Halbbogens; sodann ist es mit Hilfe des Principes der Summirung der Wirkungen leicht, die Werthe von M und Q für den Fall des permanenten Gewichtes und der Belastung über den ganzen Bogen zu erhalten und schliesslich das Biegungsmoment, die Normalspannung und die Schubkräfte für die Querschnitte 0, 1, 2, . . . 6 zu berechnen.

Diese Resultate dienen dazu, den Querschnitt des Bogens aufzustellen; sodann kann man die Berechnung wieder aufnehmen, um mit grösserer Genauigkeit die elastischen Kräfte, welche in den verschiedenen Fällen der Belastung entstehen, zu bestimmen.

Uebrigens wird in der Praxis im Allgemeinen die erste Annäherung genügend sein.

5. Mittellinie des Druckes*) und grösste Beanspruchung des Eisens per Quadratmeter, wenn das permanente Gewicht und die Belastung, sowohl links als rechts vom Scheitel, in Rechnung gezogen werden. — Da in diesem Falle die Belastung symmetrisch ist, so hat man $S = 0$;

sieht man ferner von dem permanenten Gewichte ab und nimmt man an, dass die Belastung sowohl rechts als links vom Scheitel gleichförmig stattfindet, so ergeben sich als Werthe von M und Q

$$M = -3510 \times 2 = -7020,$$
$$Q = 3715{,}7 \times 2 = 7431{,}4,$$

d. h. das Doppelte jener Werthe, welche oben gefunden wurden.

Die zufällige Belastung beträgt 420 Kilogramm per Längenmeter des Bogens, die Gesammtlast hingegen 882 Kilogramm. Für den letzten Fall erhält man demnach

$$M = -7020 \times \frac{882}{420} = -14742{,}0,$$
$$Q = 7431{,}4 \times \frac{882}{420} = 15605{,}9.$$

Kennt man somit das Biegungsmoment und den Horizontalschub im Scheitel für den Fall der completen Belastung und ferner noch das von dem Bogen getragene Gewicht, so kann man leicht das Biegungsmoment, die Normalpressung und die Schubkraft für jeden der Querschnitte 0, 1, 2, . . . 6 berechnen. Durch Division der Biegungsmomente durch die entsprechenden Normalpressungen erhält man die Entfernungen der Druckmittelpunkte von den Querschnittsmittelpunkten. Mit Hilfe der Formel

$$\frac{P}{\Omega} \pm \frac{M v}{I},$$

in welcher P und M die Normalpressung und das Biegungsmoment eines beliebigen Querschnittes und Ω, I, v die Fläche, das Trägheitsmoment

*) In dieser Betrachtung, sowie in allen folgenden geben wir in einer Colonne der numerischen Tabellen die Werthe für die Entfernungen zwischen den Druckmittelpunkten und den Querschnittsmittelpunkten und bezeichnen diese Colonne der Kürze halber mit „*Mittellinie des Druckes*“, denn die Daten, welche dieselbe enthält, dienen dazu, diese Curve zu zeichnen.

und die halbe Höhe desselben Querschnittes ausdrückt, kann man die Pressung per Quadratmeter an der Aussen- und an der Innenseite des Bogens in den Querschnitten 0, 1, 2, . . . 6 erhalten.

Nennt man schliesslich

$\omega = (0{,}100 + 2 \times 0{,}031) \times 0{,}008 = 0{,}001296$ die Querschnittsfläche der Gitterstäbe (Tafel II, Figur 4),

$d = 1{,}51$ die Diagonale der durch die Achsen dieser Stäbe gebildeten Quadrate,

$G = \frac{1}{8}(0{,}22 \times 1{,}816^2 - 0{,}072 \times 1{,}80^2 - 0{,}122 \times 1{,}782^2 - 0{,}018 \times 1{,}66^2 - 0{,}08 \times 1{,}36^2) = 0{,}005055$ das statische Moment der halben Querschnittsfläche des Bogens in Bezug auf die Biegungsachse,

$I = 0{,}008\,735$ das Trägheitsmoment der ganzen Querschnittsfläche,

S die Schubkraft in einem beliebigen Querschnitte,

so erhält man die Spannung und die Pressung per Quadratmeter für einen beliebigen Querschnitt der Gitterstäbe mit Hilfe der Formel

$$\frac{G S d \sqrt{2}}{2 I \omega} = 476{,}7 \, . \, S.$$

Alle Resultate dieser Berechnungen sind in folgender Tabelle zusammengestellt:

Querschnitte	Biegungsmomente	Normalpressungen	Schubkräfte	Mittellinie des Druckes	Pressung per Quadratmeter an der inneren Wölbung	Pressung per Quadratmeter an der äusseren Wölbung	Spannung der Gitterstäbe per Quadratmeter
1	2	3	4	5	6	7	8
0	— 29742	28148	+ 9878	— 1,056	— 702000	5461000	+ 4709000
1	+ 5519	29707	+ 2887	+ 0,185	+ 3101000	1953000	+ 1376000
2	+ 15009	25641	— 603	+ 0,585	+ 3741000	621000	— 287000
3	+ 10233	21714	— 2276	+ 0,471	+ 2911000	783000	— 1085000
4	— 1585	18472	— 2436	— 0,085	+ 1406000	1736000	— 1161000
5	— 11189	16346	— 1495	— 0,684	+ 227000	2553000	— 713000
6	— 14742	15606	0	— 0,944	— 205000	2859000	0

Für den in Betracht gezogenen Fall der completen Belastung wird die Senkung des Mittelpunktes des Scheitelquerschnittes durch folgende Formel gegeben:

$$\eta = \frac{5,564}{E} \cdot \frac{M_0 x_0 + 4 M_1 x_1 + 2 M_2 x_2 + \ldots + 4 M_5 x_5}{3 I}$$

$$+ \frac{5,564}{E} \cdot \frac{P_0 \sin \varphi_0 + 4 P_1 \sin \varphi_1 + 2 P_2 \sin \varphi_2 + \ldots + 4 P_5 \sin \varphi_5}{3 \Omega},$$

in welcher M_0, $M_1, \ldots P_0$, $P_1, \ldots$ die Biegungsmomente und die Normalpressungen in den Querschnitten 0, 1, 2, ... 6 darstellen; I und Ω das Trägheitsmoment und die Fläche des Bogenquerschnittes; x_0, x_1, $x_2, \ldots$ die Entfernungen der Mittelpunkte der Querschnitte 0, 1, 2, ... 5 von der durch den Scheitel gehenden Verticalebene; und endlich φ_0, φ_1, $\varphi_2 \ldots$ die Winkel, welche diese Querschnitte mit der Verticalen bilden.*)

*) Um zu dieser Formel zu gelangen, denke man sich den Bogen im Scheitel geschnitten und den rechten Halbbogen entfernt. Man kann sodann den linken Halbbogen als durch folgende Kräfte beansprucht sich vorstellen:

1. durch die äusseren Kräfte, welche den Halbbogen belasten;
2. durch die im Scheitel wirkenden horizontalen Kräfte, welche einen Horizontalschub Q und ein Moment M geben;
3. durch ein beliebiges im Scheitel wirkendes Gewicht ϖ.

Wir nennen nun

$M_0, M_1, M_2, \ldots M_6$ die Biegungsmomente und $P_0, P_1, P_2, \ldots P_6$ die Normalpressungen in den Querschnitten 0, 1, 2, ... 6, so lange das Gewicht ϖ gleich Null ist;

$x_0, x_1, x_2, \ldots x_5$ die horizontalen Entfernungen der Mittelpunkte der Querschnitte 0, 1, 2, ... 5 von der durch den Scheitel gehenden Verticalebene;

$\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_5$ die Winkel, welche diese Querschnitte mit der Verticalen bilden.

Nach Hinzufügung des Gewichtes ϖ erhalten die Biegungsmomente und die Normalpressungen folgende Werthe:

$$M_0 + \varpi x_0,\quad M_1 + \varpi x_1,\quad M_2 + \varpi x_2,\quad M_3 + \varpi x_3,\quad M_4 + \varpi x_4,\quad M_5 + \varpi x_5,\quad M_6,$$
$$P_0 + \varpi \sin \varphi_0,\quad P_1 + \varpi \sin \varphi_1,\quad P_2 + \omega \sin \varphi_2,\quad P_3 + \varpi \sin \varphi_3,\quad P_4 + \varpi \sin \varphi_4,\quad P_5 + \varpi \sin \varphi_5,\quad P_6,$$

und die Deformationsarbeit des Halbbogens wird ausgedrückt durch

$$\frac{5{,}564}{2 E I} \cdot \frac{(M_0 + \varpi x_0)^2 + 4 (M_1 + \varpi x_1)^2 + 2 (M_2 + \varpi x_2)^2 + 4 (M_3 + \varpi x_3)^2}{3}$$
$$\frac{+ 2 (M_4 + \varpi x_4)^2 + 4 (M_5 + \varpi x_5)^2 + M^2_6}{3}$$

Substituirt man in den vorhergehenden Formeln für die Buchstaben deren Werthe aus der letzten Tabelle und aus Tafel II, so erhält man

$$\frac{M_0\,x_0 + 4\,M_1\,x_1 + 2\,M_2\,x_2 + \ldots + 4\,M_5\,x_5}{3\,I} = 27\,001\,764,$$

$$\frac{P_0 \sin\varphi_0 + 4\,P_1 \sin\varphi_1 + 2\,P_2 \sin\varphi_2 + \ldots + 4\,P_5 \sin\varphi_5}{3\,\Omega} = 7\,274\,977,$$

und folglich
$$\eta = \frac{190\,715\,787}{E}.$$

Nimmt man als Elasticitätscoëfficient des Eisens

$$E = 18\,000\,000\,000,$$

so ist
$$\eta = 0{,}0106.$$

6. Mittellinie des Druckes und grösste Beanspruchung des Eisens per Quadratmeter, wenn man das permanente Gewicht in Rechnung zieht, und wenn man annimmt, dass die Belastung nur auf der linken Hälfte des Bogens stattfindet. — Man erhält in diesem Falle die Werthe von M, Q, S, wenn man zu jenen, welche für das alleinige permanente Gewicht Geltung haben, die anderen, welche aus der alleinigen linksseitigen Belastung resultiren, hinzufügt. Für das permanente Gewicht allein hat man

$$M = -\,14742 \times \frac{462}{882} = -\,7722,$$

$$Q = \quad 15606 \times \frac{462}{882} = \quad 8174,$$

$$S = 0,$$

$$+ \frac{5{,}564}{2\,E\,\Omega} \cdot \frac{(P_0 + \overline{\omega} \sin\varphi_0)^2 + 4\,(P_1 + \overline{\omega} \sin\varphi_1)^2 + 2\,(P_2 + \overline{\omega} \sin\varphi_2)^2 + 4\,(P_3 + \overline{\omega} \sin\varphi_3)^2}{3}$$

$$\frac{+\,2\,(P_4 + \overline{\omega} \sin\varphi_4)^2 + 4\,(P_5 + \overline{\omega} \sin\varphi_5)^2 + P^2_6}{3}$$

Der Differentialquotient dieser Formel nach $\overline{\omega}$ gibt die Senkung des Angriffspunktes dieses Gewichtes, d. h. die Senkung des Scheitelquerschnittes, welches auch der Werth von $\overline{\omega}$ sei. Wenn dieses Gewicht Null ist, muss man in dem Ausdrucke für η $\overline{\omega} = 0$ setzen und erhält somit in dem in Nummer 5 betrachteten Falle für die Senkung des Scheitels die Formel

$$\eta = \frac{5{,}564}{E} \cdot \frac{M_0\,x_0 + 4\,M_1\,x_1 + 2\,M_2\,x_2 + 4\,M_3\,x_3 + 2\,M_4\,x_4 + 4\,M_5\,x_5}{3\,I}$$

$$+ \frac{5{,}564}{E} \cdot \frac{P_0 \sin\varphi_0 + 4\,P_1 \sin\varphi_1 + 2\,P_2 \sin\varphi_2 + 4\,P_3 \sin\varphi_3 + 2\,P_4 \sin\varphi_4 + 4\,P_5 \sin\varphi_5}{3\,\Omega}.$$

und für eine nur linksseitige Belastung die in Nummer 4 erhaltenen Werthe; für den Fall eines permanenten Gewichtes und einer linksseitigen Belastung ergibt sich also

$$\begin{aligned} M &= -7722 - 3510 &&= -11232, \\ Q &= 8174 + 3715{,}7 &&= 11890, \\ S &= \ldots\ldots\ldots\ldots &&= 2212. \end{aligned}$$

Nach erlangter Kenntniss des Biegungsmomentes, der Normalpressung und der Schubkraft im Scheitel kann man die drei analogen Grössen für die Querschnitte 0, 1, 2, . . . sowohl links als auch rechts leicht berechnen; dividirt man sodann die Biegungsmomente durch die correspondirenden Normalpressungen, so erhält man die Entfernungen der Druckmittelpunkte von den Querschnittsmittelpunkten, und dienen dieselben dazu, die Mittellinie des Druckes zu zeichnen.*) Man kann somit folgende Tabelle zusammensetzen:

I. Linker Halbbogen					II. Rechter Halbbogen				
Querschnitte 1	Biegungsmomente 2	Normalpressungen 3	Schubkräfte 4	Mittellinie des Druckes 5	Querschnitte 1	Biegungsmomente 2	Normalpressungen 3	Schubkräfte 4	Mittellinie des Druckes 5
0	— 8460	25243	+ 6715	— 0,335	0	— 36861	17689	+ 8337	— 2,083
1	+ 11483	26091	+ 515	+ 0,440	1	— 3073	19177	+ 3884	— 0,160
2	+ 10138	21588	— 2111	+ 0,469	2	+ 12733	17484	+ 1192	+ 0,728
3	— 450	17427	— 2849	— 0,025	3	+ 16043	15661	— 619	+ 1,024
4	— 12774	14165	— 2046	— 0,901	4	+ 10359	13983	— 1666	+ 0,741
5	— 17586	12232	— 163	— 1,437	5	+ 536	12676	— 2115	+ 0,042
6	— 11232	11890	+ 2212	— 0,944	6	— 11232	11890	— 2212	— 0,944

*) In Figur 5 der Tafel II wird die Mittellinie des Druckes durch eine volle Linie dargestellt, wenn das Gespärre vollständig, und durch eine gestrichelte Linie, wenn dasselbe nur auf der linken Hälfte belastet ist. Um den Platz auszunützen, wurde das linke Halbgespärre auf das rechte umgelegt.

Wir fügen hier bei, dass diese Bemerkung auch für jene Figuren gilt, welche in den Tafeln III, IV, V und VIII die Mittellinien des Druckes darstellen.

Wenn man die Resultate der letzten Tabelle mit jenen vergleicht, welche in Nummer 5 für den Fall der beiderseitigen Belastung erhalten wurden, so erkennt man, dass das grösste Biegungsmoment in dem Querschnitte 0 des unbelasteten Halbbogens stattfindet, wenn der andere Halbbogen belastet ist. Da aber in diesem Falle die Normalpressung kleiner ist als dann, wenn der Bogen vollständig belastet wird, so kann man von vorneherein nicht beurtheilen, in welchem dieser Fälle die grösste Pressung per Quadratmeter statthat. Ist nur die linke Hälfte des Bogens belastet, so ist die grösste Pressung per Quadratmeter im Querschnitt 0 des rechten Halbbogens gleich

$$\frac{17\,689}{0{,}011\,756} + \frac{36\,861 \times 0{,}908}{0{,}008\,735} = 5\,335\,000,$$

während in dem Falle der vollständigen Belastung die grösste Pressung des Eisens mit 5 461 000 per Quadratmeter gefunden wurde.

In Betreff der Schubkräfte erkennt man, dass sich der grösste Werth derselben im Falle der vollständigen Belastung des Bogens ergibt.

Aus Obigem folgt also, dass es für Bundgespärre von der hier betrachteten Form im Allgemeinen genügt, den Fall der vollständigen Belastung zu untersuchen.

7. Einfluss der Aenderung der Temperatur. — Bisher wurde das Gleichgewicht des Bogens nur in Bezug auf die Belastungen betrachtet; man muss aber auch untersuchen, welchen Einfluss die Aenderungen der Temperatur auf die elastischen Kräfte haben.

Zufolge dem Principe der Summirung der Wirkungen kann man die den Aenderungen der Temperatur entsprechenden Wirkungen untersuchen, indem man sowohl von dem permanenten Gewichte, als auch von der Belastung vollständig absieht, denn es genügt, diejenigen elastischen Kräfte, welche einzig den Aenderungen der Temperatur entsprechen, zu jenen hinzuzufügen, welche den Belastungen entsprechen, um sodann jene zu erhalten, welche auftreten, wenn diese beiden Ursachen der Deformation gleichzeitig vorhanden sind.

Wir nennen t die *mittlere Temperatur*, bei welcher das Bundgespärre aufgestellt wurde.

Würde der Bogen, anstatt dass dessen Enden aufgestützt sind, vollkommen frei sein, so würden, wenn die Temperatur von t auf t' zunimmt, alle Dimensionen genau in demselben Verhältnisse zunehmen, und folglich würde die schliessliche Gestalt des Bogens *geometrisch ähnlich* sein der ursprünglichen. Es würde also die Sehne des Bogens, zwischen den Mittelpunkten der Querschnitte 0 gemessen, welche bei der Temperatur t $48^{m},50$ beträgt, bei der Temperatur t'

$$48^{m},50 + \frac{48^{m},50}{82\,500}(t' - t)$$

sein, wenn $\frac{1}{82\,500}$ der Ausdehnungscoëfficient des Eisens ist.

Wenn nun das Bundgespärre bei der Temperatur t' aufgestellt wird, so ist dessen Sehne um $\frac{48,50}{82\,500}(t' - t)$ grösser als die erforderliche geometrische Länge. Da die Winkel der äussersten Querschnitte sich bei den als frei angenommenen Bögen nicht ändern, selbst wenn die Temperatur wechselt, so bleiben dieselben vollkommen gleich den Winkeln der Auflagflächen.

Um die elastischen Kräfte zu bestimmen, welche unabhängig von der Belastung bei der Temperatur t' eintreten, sobald das Bundgespärre bei der Temperatur t aufgestellt wurde, muss man zu der in Function von M, Q, S ausgedrückten Deformationsarbeit den Ausdruck $-\frac{48,50}{82\,500}(t' - t)\,Q$ hinzufügen und sodann die Differentialquotienten dieser Summe mit Bezug auf M, Q, S gleich Null setzen.

Die Deformationsarbeit des ganzen, unter der Einwirkung des Kräftepaares M und der Kräfte Q und S stehenden Bogens wird, wenn man sowohl vom permanenten Gewichte, als auch von der zufälligen Belastung absieht, durch die Formel (2) aus Nummer 4 ausgedrückt, sofern dieselbe mit dem Factor $\frac{5,564}{2EI}$ multiplicirt und von den Gliedern befreit wird, welche bezüglich M, Q, S erster Ordnung sind, denn diese Glieder hängen von der Belastung ab und verschwinden, sobald dieselbe Null ist. Diese Deformationsarbeit wird also durch folgende Formel ausgedrückt:

$$\frac{,564}{2EI}(12 \,.\, M^2 - 81,82 \times 2\,Q\,M + 975,18 \,.\, Q^2 + 3109,42 \,.\, S^2).$$

Summirt man hiezu den Ausdruck

$$-\frac{48{,}50}{82\,500}(t'-t)\,.\,Q = -0{,}000588\,(t'-t)\,.\,Q,$$

und setzt man dann die Differentialquotienten mit Bezug auf M, Q, S gleich Null, so erhält man die drei Gleichungen

$$12\,.\,M - 81{,}82\,.\,Q = 0,$$
$$-81{,}82\,.\,M + 975{,}18\,.\,Q = 16\,616\,.\,(t'-t),$$
$$3109{,}42\,.\,S = 0,$$

wobei berücksichtigt wurde, dass bei der Annahme $E = 18\,000\,000\,000$

$$\frac{E\,I}{5{,}564}\,0{,}000588 = 16\,616 \quad \text{ist.}$$

Die letzte obiger Gleichungen gibt $S = 0$ und zeigt dadurch an, dass die Schubkraft im Scheitel gleich Null ist, was man übrigens voraussehen kann, da das Gespärre in Bezug auf den Scheitel symmetrisch ist.

Die zwei anderen Gleichungen ergeben

$$M = 271{,}57\,(t'-t),$$
$$Q = 39{,}82\,(t'-t).$$

Hat man also das Biegungsmoment, die Normalpressung und die Schubkraft im Scheitel bestimmt, so erhält man die analogen Werthe für die anderen Querschnitte 0, 1, 2 . . . 4, 5, indem man in der auf Seite 341 gegebenen Tabelle für den rechten Halbbogen, d. h. für den Halbbogen ohne Belastung, für M und Q die oben gefundenen Werthe einsetzt und $S = 0$ macht. Dies gibt folgende Tabelle:

Querschnitte 1	Biegungsmomente 2	Normalpressungen 3	Schubkräfte 4
0	$-493{,}8\,(t'-t)$	$8{,}4\,(t'-t)$	$38{,}90\,(t'-t)$
1	$-285{,}5\,(t'-t)$	$17{,}4\,(t'-t)$	$35{,}80\,(t'-t)$
2	$-98{,}8\,(t'-t)$	$25{,}0\,(t'-t)$	$31{,}02\,(t'-t)$
3	$+56{,}9\,(t'-t)$	$31{,}2\,(t'-t)$	$24{,}73\,(t'-t)$
4	$+174{,}0\,(t'-t)$	$35{,}9\,(t'-t)$	$17{,}20\,(t'-t)$
5	$+246{,}8\,(t'-t)$	$38{,}8\,(t'-t)$	$8{,}84\,(t'-t)$
6	$+271{,}6\,(t'-t)$	$39{,}8\,(t'-t)$	0

Wir nehmen nun an, dass die mittlere Temperatur, bei welcher der Bogen aufgestellt wurde, 15⁰ sei, und dass die Grenzen, zwischen welchen die Temperatur variiren kann, — 10⁰ und 40⁰ seien, und wollen die zwei Grenzfälle untersuchen, um hiebei auch die Belastungen, d. h. sowohl das permanente Gewicht, als auch die Belastung in Rechnung ziehen zu können.

Temperatur von 40⁰. Man macht in obiger Tabelle $t' - t = 25$ und vereinigt die so erhaltenen Resultate mit den correspondirenden Resultaten der Colonnen 2, 3 und 4 der in Nummer 5 für den Fall des permanenten Gewichtes und der vollständigen Belastung zusammengestellten Tabelle.

Temperatur von — 10⁰. Man macht in obiger Tabelle $t' - t = -25$ und vereinigt die Resultate (bei Berücksichtigung der Zeichen) mit den correspondirenden Resultaten der in Nummer 5 angeführten Tabelle, genau wie bei der Temperatur von 40⁰.

Auf Grund dessen lässt sich folgende Tabelle zusammenstellen:

Permanente Last und vollständige Belastung:

Querschnitte	Temperatur von 40⁰				Temperatur von — 10⁰			
	Biegungsmomente	Normalpressungen	Schubkräfte	Mittellinie des Druckes	Biegungsmomente	Normalpressungen	Schubkräfte	Mittellinie des Druckes
1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	— 42084	28358	+ 10850	— 1,484	— 17399	27938	+ 8905	— 0,622
1	— 1618	30142	+ 3782	— 0,053	— 12656	29272	+ 1992	— 0,432
2	+ 12539	20266	+ 152	+ 0,618	+ 17479	25016	+ 1378	+ 0,698
3	+ 11655	22494	— 1582	+ 0,518	+ 8811	20934	— 2969	+ 0,420
4	+ 2765	19369	— 2006	+ 0,142	+ 5935	17574	— 2866	+ 0,337
5	— 5019	17316	— 1274	— 0,289	— 17359	15376	— 1716	— 1,128
6	— 14470	16602	0	— 0,871	— 15014	14612	0	— 1,027

Man sieht aus diesen Resultaten, wie gross der Einfluss der Aenderungen der Temperatur auf Bundgespärre sein kann, deren Enden fix sind.

In der That ergibt sich bei einer Temperatur von 40⁰ der Werth der grössten Pressung auf die Auflagfläche per Quadratmeter mit

$$\frac{28358}{0{,}011\,756} + \frac{42084 \times 0{,}908}{0{,}008\,735} = 6\,786\,000,$$

während bei einer Temperatur von -10^0 dieselbe nur

$$\frac{27938}{0{,}011\,756} + \frac{17399 \times 0{,}908}{0{,}008\,735} = 4\,184\,000$$

beträgt.

Ist das Bundgespärre constant belastet, so sieht man, dass, wenn die Temperatur von -10^0 bis $+40^0$ variirt, die grösste Pressung des Eisens per Quadratmeter sich zwischen 4184000 und 6786000 Kilogramm ändert.

Da man ohne Gefahr das Eisen einer continuirlichen Spannung von 8000000 Kilogramm per Quadratmeter aussetzen kann, so folgt daraus, dass das betrachtete Bundgespärre einen genügenden Grad von Festigkeit besitzt.

Ferner ist noch zu bemerken, dass bei einer Temperatur von 40^0 der Schneedruck immer Null ist, weshalb es nie vorkommen kann, dass die Pressung des Eisens per Quadratmeter den Werth von 6786000 Kilogramm erreicht. Da man übrigens auch die Kraft des Windes, welche sehr gross sein kann, berücksichtigen muss, so wird es gut sein, anzunehmen, dass selbst im Sommer das Bundgespärre in gleicher Weise wie im Winter belastet ist, und sich auch zu versichern, dass bei dieser Annahme die grösste Pressung des Eisens per Quadratmeter unterhalb der in der Praxis angenommenen Grenze bleibt.*)

*) Die Untersuchung des Einflusses der Temperatur auf die Vertheilung der Pressungen in den Bundgespärren ist um so nothwendiger, als es gerade die Abnahme der Temperatur ist, welche häufig die grössten Pressungen hervorruft, und diese Abnahme im Winter stattfindet, wo die Gespärre vollständig belastet sein können.

Um dies gut zu verstehen, muss man beachten, dass die Zunahme der Temperatur die Pressungen an der äusseren Wölbung am Bogenanfang vergrössert, während die Abnahme der Temperatur jene an der inneren Wölbung vermehrt.

Bei Bögen, deren Pfeilhöhe im Verhältnisse zur Oeffnung sehr gross ist, herrscht im Bogenanfang, selbst bei der mittleren Temperatur, die grösste Pressung an der Aussenseite des Bogens, weshalb die Zunahme der Temperatur die grösste Pressung entstehen lässt.

Bei den gedrückten Bögen hingegen herrscht bei der mittleren Temperatur im Bogenanfang die grösste Pressung an der Innenseite des Bogens, und folglich ist es die Abnahme der Temperatur, welche die grösste Pressung hervorruft.

5. Capitel.

Betrachtung einer Halle aus schmiedeisernen Bundgespärren mit je einer Zugstange.*)

(Tafel III.)

1. Allgemeine Angaben.

Sehne der inneren Wölbung $47^{m},70$;
Pfeilhöhe derselben $12^{m},10$;
Halbmesser derselben $29^{m},555$;
Winkel, welcher mit der Oeffnung des Bogens correspondirt $107^{0}\ 36'\ 6''$;
Entwickelte Länge der inneren Wölbung $55^{m},502$;
Höhe des Bogens $1^{m},20$;
Entfernung der einzelnen Bundgespärre $7^{m},00$;
Länge der Auflagfläche auf jedem Widerläger $0^{m},60$.

2. Belastungen. — Von den Pfeilern bis zu einer gewissen Höhe wird die Bedachung der Halle durch Holzplatten von $0^{m},03$ Dicke, welche durch Zinkblech verkleidet sind, gebildet. Der übrige Theil der Bedachung besteht aus 6 Millimeter starken Glasplatten.

Da aber für diese zwei Arten der Bedachung das Gewicht per Quadratmeter fast identisch ist, kann man dasselbe für die ganze Oberfläche der Halle als vollkommen gleich annehmen und es in folgender Weise veranschlagen:

*) Bundgespärre dieser Form wurden bei der grossen Bahnhofshalle in Genua angewendet. Diese haben mit den für die Berechnung angenommenen dieselbe Sehne und dieselbe Pfeilhöhe, nur ist die Höhe der Bögen in der Richtung des Halbmessers, sowie die Dimensionen des Eisens und die Form der Gitterstäbe verschieden. Der Vergleich zwischen den für die Berechnung gewählten Eisengattungen und jenen, welche für die Halle in Genua angewendet wurden, zeigt, dass man eine bedeutende Menge Material hätte ersparen können und doch noch eine genügende Stabilität erhalten hätte.

Schnee- und Winddruck	50	Kilogr.
Bedachung aus Zinkblech oder Glas	26	„
Fetten .	18	„
Windstreben	1	„
Summe zur Berechnung der Fetten . . .	95	Kilogr.
Eigengewicht des Bogens	16	„
Summe zur Berechnung des Bogens . . .	111	Kilogr.

Last per Längenmeter auf die äussere Wölbung des Bogens.

Permanentes Gewicht (111 — 50) × 7,00 =	427	Kilogr.
Zufällige Belastung 50 × 7,00 =	350	„
Summe . . .	777	Kilogr.

3. Allgemeine Formeln für den Fall der Belastung über die ganze Länge des Bogens. — Wie man aus Tafel III ersieht, kann man die Hälfte des Bogens, mit Ausschluss jener Theile an den Bogenanfängen, welche aus vollen Blechen bestehen, in sechs gleiche Abschnitte theilen, deren jeder, in der Bogenachse gemessen, eine Länge von $4^m,61$ und an der äusseren Wölbung gemessen eine solche von $4^m,70$ hat.

Annäherungsweise kann man annehmen, dass der Schwerpunkt der von jedem dieser sechs Bogenstücke getragenen Last im Mittelpunkte der äusseren Wölbung des betreffenden Bogenstückes sich befinde.

Ferner ist das erste Bogenstück vom Auflager an theilweise in die Mauer eingelassen und trägt daher an dieser Stelle weder eine Bedachung, noch eine Belastung, sondern es kommt hier nur das Eigengewicht des Bogens in Betracht; dieses kleine Gewicht kann man der Einfachheit halber um so eher vernachlässigen, als es sich am Bogenanfang befindet und daher einen sehr kleinen Einfluss auf das Resultat der Berechnung übt.

Da die Auflagfläche des Bogens auf die Widerlager sehr klein ist, kann man schliesslich annehmen, dass sich der Druck auf dieselben im Mittelpunkte derselben überträgt.

Nennt man

p das Gesammtgewicht, welches von jedem der Bogenstücke 1, 2; 2, 3; . . . getragen wird,

p_1 dasjenige, welches von dem Stücke 0,1 getragen wird,

R die verticale Reaction der Widerlager, welche der Hälfte des Gewichtes gleich ist, welches das ganze Bundgespärr belaste

T die Spannung der Zugstange, welche als unbekannt zu bestimmen ist;

so hat man

$$p = 777 \times 4{,}70 = 3651{,}90,$$
$$p_1 = 777 \times 3{,}82 = 2968{,}14,$$
$$R = 3651{,}90 \times 5 + 2968{,}14 = 21227{,}64.$$

Mit diesen Daten und mit jenen, welche dem Aufrisse entnommen werden können, kann man das Biegungsmoment, die Normalpressung und die Schubkraft für die Querschnitte 0, 1, 2, . . . 6 in Functionen von T berechnen; man hat z. B. für den Querschnitt 2

$$M_2 = 6{,}88 \,.\, T - 6{,}84 \,.\, R + 5{,}30 \,.\, p_1 + 2{,}20 \,.\, p,$$
$$P_2 = 0{,}820 \,.\, T + 0{,}572\,(R - p_1 - p),$$
$$S_2 = 0{,}572 \,.\, T - 0{,}820\,(R - p_1 - p).$$

Nach Substitution der numerischen Werthe für R, p_1 und p lässt sich folgende Tabelle zusammenstellen, in welcher nur die Unbekannte T, das ist die Spannung in der Zugstange vorkommt:

Querschnitte 1	Biegungsmomente 2	Normalpressungen 3	Schubkräfte 4
0	$M_0 = 0{,}52 \,.\, T - 6368$	$P_0 = 0{,}615 \,.\, T + 16812$	$S_0 = 0{,}792 \,.\, T - 13055$
1	$M_1 = 3{,}95 \,.\, T - 64645$	$P_1 = 0{,}725 \,.\, T + 12617$	$S_1 = 0{,}691 \,.\, T - 13238$
2	$M_2 = 6{,}88 \,.\, T - 121432$	$P_2 = 0{,}820 \,.\, T + 8356$	$S_2 = 0{,}572 \,.\, T - 11978$
3	$M_3 = 9{,}20 \,.\, T - 170444$	$P_3 = 0{,}897 \,.\, T + 4831$	$S_3 = 0{,}441 \,.\, T - 9827$
4	$M_4 = 10{,}95 \,.\, T - 208347$	$P_4 = 0{,}953 \,.\, T + 2198$	$S_4 = 0{,}301 \,.\, T - 6961$
5	$M_5 = 11{,}95 \,.\, T - 232121$	$P_5 = 0{,}986 \,.\, T + 555$	$S_5 = 0{,}152 \,.\, T - 3601$
6	$M_6 = 12{,}30 \,.\, T - 240338$	$P_6 = 1{,}000 \,.\, T$	$S_6 = 0.$

4. Bestimmung des Werthes der Unbekannten T. — Zu diesem Behufe nennen wir

Ω die Querschnittsfläche des Bogens,

I dessen Trägheitsmoment,

ω die Querschnittsfläche der Zugstange,

und machen

$$\sum M^2 = \frac{M^2_0 + 4\,M^2_1 + 2\,M^2_2 + 4\,M^2_3 + 2\,M^2_4 + 4\,M^2_5 + M^2_6}{3},$$

$$\sum P^2 = \frac{P^2_0 + 4\,P^2_1 + 2\,P^2_2 + 4\,P^2_3 + 2\,P^2_4 + 4\,P^2_5 + P^2_6}{3}.$$

Unter Berücksichtigung, dass die Länge der sechs Stücke 0, 1; 1, 2; . . . 5, 6 auf der Achse gemessen $4^m,61$ und jene der Zugstange $48^m,10$ beträgt, erhält man als Ausdruck für die Deformationsarbeit des ganzen Gespärres (unter Vernachlässigung des der Verschiebung entsprechenden Theiles, welcher aber nur sehr geringen Einfluss hat) die folgende Formel:

$$2\left[\frac{4,61}{2EI}\sum M^2 + \frac{4,61}{2E\Omega}\sum P^2\right] + \frac{48,10\,.\,T^2}{2E\omega}.$$

Durch Division dieser Formel durch den Factor $2 \cdot \frac{4,61}{2EI}$, was jene Gleichung nicht ändert, welche man daraus ableitet, indem man den Differentialquotient nach T gleich Null setzt, erhält man

$$\sum M^2 + \frac{I}{\Omega}\sum P^2 + \frac{I}{\omega}\cdot\frac{48,10}{2 \times 4,61}\,T^2. \qquad (1)$$

Da der Querschnitt des Bogens jener ist, welcher durch die Figur 3 (Tafel III) dargestellt wird, so hat man

$$\Omega = 0,15 \times 1,20 - 0,1375 \times 1,175 - 0,0125 \times 1,000 = 0,005937;$$

$$I = \frac{1}{12}(0,15 \times 1,20^3 - 0,1375 \times 1,175^3 - 0,0125 \times 1,000^3) = 0,001\,970.$$

Der Durchmesser der Zugstange ist $0^m,065$, weshalb

$$\omega = 0,003318,$$

und folglich

$$\frac{I}{\Omega} = 0,332; \quad \frac{I}{\omega} = 0,594.$$

Substituirt man für M_0, M_1 etc., P_0, P_1 etc., deren Werthe in Functionen von T, wie sie in der Tabelle der vorhergehenden Nummer gegeben wurden, so erhält man

$$\sum M^2 = 486{,}06 \,.\, T^2 - 9\,194\,095 \,.\, 2 \,.\, T, ^{*})$$

$$\frac{I}{\Omega} \sum P^2 = 1{,}52 \,.\, T^2 + 9344 \,.\, 2 \,.\, T,$$

$$\frac{I}{\omega} \frac{48{,}10}{2 \,.\, 4{,}61} T^2 = 3{,}10 \,.\, T^2. ^{**})$$

Durch Addition der rechten Seiten dieser drei Gleichungen kann man die Formel (1) in einer Function von T ausdrücken, und zwar durch die Formel

$$490{,}68\, T^2 - 9\,184\,751 \,.\, 2\, T. \qquad (2)$$

Um den Werth der Spannung T zu erhalten, muss man die Bedingung zum Ausdruck bringen, dass bei der Deformation des Systems

*) Man darf nicht vergessen, dass die blos numerischen, d. h. die von T unabhängigen Glieder ausgelassen wurden, da dieselben verschwinden, sobald der Differentialquotient der betreffenden Formel mit Bezug auf diese Unbekannte genommen wird.

**) Man erkennt, dass der Werth der Grössen

$$\frac{I}{\Omega} \sum P^2 \quad \text{und} \quad \frac{I}{\omega} \cdot \frac{48{,}10}{2 \times 4{,}61} T^2$$

im Verhältnisse zu jenem der Formel $\sum M^2$ sehr klein ist, und kann daher dieselben bei der ersten Annäherung vernachlässigen. Zur Bestimmung von T erhält man also die Gleichung

$$486{,}06 \,.\, T - 9\,194\,095 = 0,$$

woraus

$$T = 18915,$$

das ist ein Werth, welcher von dem oben erhaltenen sehr wenig verschieden ist.

Substituirt man den so gefundenen Werth von T in die Tabelle in Nummer 3, so erhält man das Biegungsmoment, die Normalpressung und die Schubkraft für jeden der Querschnitte 0, 1, 2, . . . 6.

Bei allen diesen Berechnungen ist es nicht nothwendig, den Querschnitt des Bogens und jenen der Zugstange zu kennen. Die erhaltenen, wenn auch nur annäherungsweisen Resultate können also zur Bestimmung der Dimensionen dieser Querschnitte dienen, so dass die grössten Beanspruchungen des Bogens und der Zugstange innerhalb der in der Praxis gewöhnlich angenommenen Grenzen liegen.

Die auf Grund dieser ersten Berechnung gefundenen, annäherungsweisen Werthe der Biegungsmomente werden im Allgemeinen nicht genügen, so dass es noch nothwendig ist, nachdem man den Querschnitt des Bogens und jenen der Zugstange aufgestellt hat, die Berechnung nach dem im Texte angegebenen Vorgang zu vollenden, um mit grösserer Genauigkeit sowohl die Spannung in der Zugstange, als die Vertheilung der Spannungen und Pressungen im Bogen zu bestimmen.

die Entfernung der Fusspunkte des Bogens von einander gleich sein muss der Ausdehnung der Zugstange; und zwar kann man dies dadurch machen, dass man den Differentialquotienten der Deformationsarbeit des ganzen Systems, d. h. der Formel (2) mit Bezug auf T gleich Null setzt. Dies ergibt die Gleichung

$$490{,}68 \,.\, T - 9\,184\,751 = 0,$$

woraus

$$T = 18718.$$

5. Mittellinie des Druckes und grösste Beanspruchung der Zugstange und des Bogens per Quadratmeter. — Die grösste Beanspruchung der Zugstange per Quadratmeter ist

$$\frac{T}{\omega} = \frac{18718}{0{,}003318} = 5\,640\,000.$$

Durch Substitution des Werthes von T in die Tabelle in Nummer 3 erhält man die in den Colonnen 2, 3 und 4 der unten angeführten Tabelle angezogenen Resultate, d. h. das Biegungsmoment, die Normalpressung und die Schubkraft für jeden der Querschnitte 0, 1, 2, . . . 6 des Bogens.

Dividirt man jedes Biegungsmoment durch die correspondirende Normalpressung, so erhält man dadurch die in Colonne 5 angezogenen Resultate, d. h. die Entfernungen der Druckmittelpunkte von den Querschnittsmittelpunkten.

Mit Hilfe der Formel $\frac{P}{\Omega} \pm \frac{M v}{I}$,

in welcher P und M die Normalpressung und das Biegungsmoment eines Querschnittes und v die halbe Höhe dieses Querschnittes bezeichnet, erhält man die Pressung per Quadratmeter an der äusseren oder inneren Wölbung in den betrachteten Querschnitten; diese Resultate werden in den Colonnen 6 und 7 angeführt.

Beachtet man schliesslich, dass die Gitterstäbe aus **U**-Eisen (Tafel III, Figur 4) bestehen, dessen Querschnittsfläche

$$\omega = (0{,}064 + 2 \times 0{,}031)\, 0{,}008 = 0{,}001008$$

ist, und dass dieselben Quadrate bilden, deren Diagonale

$$d = 1{,}01$$

ist, berechnet man für den Querschnitt des Bogens die Grösse

$$G = \frac{1}{8}(0{,}15 \times 1{,}20^2 - 0{,}1375 \times 1{,}175^2 - 0{,}0125 \times 1{,}00^2) = 0{,}001708$$

und bedenkt man, dass das Trägheitsmoment des Bogenquerschnittes den Werth

$$I = 0{,}001970$$

hat, so erhält man die Beanspruchung der Gitterstäbe per Quadratmeter mit Hilfe der Formel

$$\frac{G\,S\,d\sqrt{2}}{2\,I\,\omega} = 614\,.\,S,$$

worin S die Schubkraft in dem betrachteten Querschnitte bedeutet.

Die Resultate dieser Berechnung sind in der letzten Colonne der folgenden Tabelle angeführt:

Querschnitte	Biegungsmomente	Normalpressungen	Schubkräfte	Mittellinie des Druckes	Pressung per Quadratmeter an der inneren Wölbung	Pressung per Quadratmeter an der äusseren Wölbung	Spannung der Gitterstäbe per Quadratmeter
1	2	3	4	5	6	7	8
0	+ 3365	28324	+ 1770	+ 0,117	5 781 500	3 759 900	1 086 780
1	+ 9291	26188	— 304	+ 0,355	7 240 700	1 581 300	186 656
2	+ 7348	23705	— 1271	+ 0,310	6 230 600	1 754 800	780 394
3	+ 1762	21621	— 1572	+ 0,081	4 178 340	3 105 060	965 208
4	— 3385	20036	— 1327	— 0,169	3 344 100	4 405 300	814 778
5	— 8441	19011	— 756	— 0,444	689 800	5 714 400	464 184
6	— 10107	18718	0	— 0,535	74 550	6 230 950	0

Man sieht hieraus: 1. dass die grösste Pressung an der inneren Wölbung des Bogens in dem Querschnitte 1 stattfindet, und dass dessen Werth 7 240 700 Kilogramm per Quadratmeter beträgt, während an der äusseren Wölbung die grösste Pressung im Scheitel stattfindet und deren Werth 6 230 950 Kilogramm per Quadratmeter ist; 2. dass die grösste Pressung oder Spannung der Gitterstäbe in den Stäben des Bogenanfanges stattfindet, und dass dieselbe 1 086 780 Kilogramm per Quadratmeter beträgt.

6. Betrachtung des Falles, wo nur die linke Hälfte des Bundgespärres belastet wird. — In diesem Falle besteht die Totalbelastung des Bundgespärres per Längenmeter der äusseren Wölbung aus dem permanenten Gewichte, welches 427 Kilogramm ist, und aus den Belastungen des linken Halbgespärres, welche 350 Kilogramm beträgt.

Auf Grund des Principes der Summirung der Wirkungen kann man in dem gegenwärtigen Falle die Spannung der Zugstange leicht aus jener ableiten, welche für den Fall der vollständigen Belastung gefunden wurde.

Nennt man

t_1 die Spannung, welche die Zugstange bei dem alleinigen permanenten Gewichte des Gespärres erleidet,

t_2 jene für die vollständige Belastung über das ganze Gespärr,

so erkennt man, dass im vorliegenden Falle des permanenten Gewichtes und der Belastung nur einer Hälfte des Gespärres die Spannung der Zugstange

$$T = t_1 + \frac{1}{2} t_2$$

sein wird.

Nachdem t_1 und t_2 durch die Proportionen

$$777 : 427 = 18718 : t_1 = 10\,287$$
$$777 : 350 = 18718 : t_2 = 8\,431$$

gegeben sind, ergibt sich $T = 14\,502.$

Die Reaction der Widerlager setzt sich auch aus zwei Theilen zusammen, und zwar aus jenem Theile, welcher von dem permanenten Gewichte herrührt, und aus jenem Theile, welcher der auf das linke Halbgespärre vertheilten Belastung entspricht. Der erste Theil ist für beide Widerlager gleich, und zwar gleich dem permanenten Gewichte, durch welches jedes Halbgespärre belastet wird, d. h.

$$427 \times 3{,}82 + 5 \times 427 \times 4{,}70 = 11666.$$

Der zweite Theil ist für das linke Widerlager grösser als für das rechte; man kann dasselbe sowohl für das eine als für das andere leicht bestimmen, da man die Schwerpunkte der Belastung für jedes der Stücke

des linken Halbbogens kennt, und findet demnach, dass die Belastung dieses Halbbogens auf die Widerlager folgende Pressungen ausübt:

auf das linke Widerlager 7316 Kilogramm,

auf das rechte Widerlager 2246 Kilogramm.

Es ergeben sich in dem betrachteten Falle für die Reactionen der Widerlager somit folgende Werthe:

für das linke Widerlager 7316 + 11666 = 18982 Kilogramm,

für das rechte Widerlager 2246 + 11666 = 13912 Kilogramm.

Kennt man nun die Spannung in der Zugstange und die Reaction der Widerlager, so kann man das Biegungsmoment, die Normalpressung und die Schubkraft für jeden der Querschnitte 0, 1, 2 . . . 6 sowohl der linken als auch der rechten Hälfte berechnen. Die Zusammenstellung dieser Resultate ergibt folgende Tabelle:

I. Linker Halbbogen					II. Rechter Halbbogen				
Querschnitte	Biegungsmomente	Normalpressungen	Schubkräfte	Mittellinie des Druckes	Querschnitte	Biegungsmomente	Normalpressungen	Schubkräfte	Mittellinie des Druckes
1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
0	+ 1846	23953	— 188	+ 0,077	0	+ 3367	19937	+ 2930	+ 0,169
1	+ 26	21579	— 1589	+ 0,002	1	+ 14367	19000	+ 1118	+ 0,757
2	— 6298	18963	— 1842	— 0,330	2	+ 17676	17768	— 130	+ 0,997
3	— 12814	16849	— 1418	— 0,756	3	+ 15537	16654	— 1020	+ 0,937
4	— 15776	15343	— 456	— 1,022	4	+ 10515	15704	— 1601	+ 0,675
5	— 15032	14513	+ 816	— 1,027	5	+ 1933	14946	— 1990	+ 0,138
6	— 7843	14502	+ 2246	— 0,535	6	— 7840	14502	— 2246	— 0,535

Aus den in dieser Tabelle enthaltenen Resultaten erkennt man, dass die grösste Beanspruchung per Quadratmeter im linken belasteten Halbbogen in dem Querschnitte 4 an der Aussenseite stattfindet, und zwar ist deren Werth

$$\frac{15341}{0{,}005937} + \frac{15685 \times 0{,}60}{0{,}001\,970} = 7\,360\,000 \text{ Kilogramm},$$

während in dem rechten unbelasteten Halbbogen die grösste Pressung an der Innenseite des Querschnittes 2 stattfindet, und ist deren Werth

$$\frac{17765}{0{,}005937} + \frac{17717 \times 0{,}60}{0{,}001970} = 8\,388\,000 \text{ Kilogramm.}$$

In dem Bundgespärre mit einer Zugstange, welches hier betrachtet wurde, finden demnach im Falle der Belastung nur eines Halbgespärres grössere Beanspruchungen statt als im Falle der Belastung des ganzen Gespärres; dies beruht auf der Eigenthümlichkeit, dass sich dieses System leicht deformiren kann.

7. Einfluss der Aenderungen der Temperatur. — Da eines der Enden des Gespärres auf Stahlwalzen aufruht, so kann offenbar das System den Einflüssen der Temperatur frei folgen. Nimmt man andererseits an, dass der Bogen und die Zugstange von einander unabhängig sind, so ist klar, dass für eine gewisse Steigerung der Temperatur die Ausdehnung der Zugstange genau gleich ist der Vergrösserung der Sehne des Bogens, woraus sich ergibt, dass, wenn man das System bei einer beliebigen Temperatur aufstellt, die Zugstange immer die zur Verbindung der beiden Enden des Bogens geometrisch nothwendige Länge haben wird.

Die Aenderungen der Temperatur haben also keinen Einfluss auf die elastischen Kräfte, welche in dem betrachteten System entstehen, wenigstens in dem Falle, als diese Aenderungen auf alle Theile des Gespärres gleichförmig vertheilt sind.

6. Capitel.

Betrachtung einer Halle aus schmiedeisernen Bundgespärren nach Type Polonceau.

(Tafel IV.)

1. Allgemeine Angaben. — Die Bundgespärre dieser Halle sind einerseits auf die Mauer des Aufnahmsgebäudes und andererseits auf eiserne Säulen gelagert.

Entfernung der Mauer von der Achse der Säulen	$26^m,00$
Länge der Auflagfläche auf der Mauer	$0^m,20$
Desgleichen auf den Säulen	$0^m,20$
Pfeilhöhe .	$4^m,90$
Entfernung der einzelnen Bundgespärre	$3^m,75$

Die Hauptsparren bestehen aus Gitterträgern.

Die Bedachung besteht aus Wellblech von 1 Millimeter Dicke mit einer Oberlichte aus ungefähr 6 Millimeter starken Glastafeln.

2. Belastungen. — Da die Bedachung aus Blech leichter ist als jene aus Glas, so setzen wir ungünstigere Bedingungen voraus, als thatsächlich gelten, indem wir erstere zwischen den Stützen und der Druckstrebe und letztere zwischen diesen und dem Giebel annehmen.

Gewicht per Quadratmeter der Bedachung zwischen den Stützen und den Druckstreben.

Schnee- und Winddruck	60 Kilogr.
Wellblech	11 „
Fetten .	18 „
Summe zur Berechnung der Fetten	89 Kilogr.
Eigengewicht des Bundgespärres mit Einschluss der Stangen .	12 „
Summe zur Berechnung des Bundgespärres .	101 Kilogr.

Gewicht per Quadratmeter der Bedachung zwischen den Druckstreben und dem Giebel.

Schnee- und Winddruck	60 Kilogr.
Bedachung aus Glas mit Einschluss der Sprosseneisen und deren Träger	24 „
Fetten .	18 „
Summe zur Berechnung der Fetten	102 Kilogr.
Eigengewicht des Bundgespärres mit Einschluss der Stangen .	12 „
Summe zur Berechnung des Bundgespärres .	114 Kilogr.

Da die Entfernung zwischen den Bundgespärren $3^m,75$ beträgt, so ist die Belastung per Längenmeter der Hauptsparren:

1. Zwischen den Stützen und den Druckstreben:

Permanentes Gewicht	$(101 - 60) \times 3{,}75 =$	154 Kilogr.
Zufällige Belastung . . .	$60 \times 3{,}75 =$	225 „
	Summe . . .	379 Kilogr.

2. Zwischen den Druckstreben und dem Giebel:

Permanentes Gewicht	$(114 - 60) \times 3{,}75 =$	203 Kilogr.
Zufällige Belastung . . .	$60 \times 3{,}75 =$	225 „
	Summe . . .	428 Kilogr.

3. Allgemeine Formeln für die complete Belastung. — Es seien T_1, T_2, T_3 (siehe Aufriss) die Spannungen in den drei Zugstangen und T_4 die Pressung in der Druckstrebe.

Ferner seien p und p_1 die Gewichte per Längenmeter, welche auf die Hauptsparren einerseits zwischen den Stützen und den Druckstreben und andererseits zwischen diesen und dem Giebel entfallen.

Die Reaction der Stützen ist

$$R = 6{,}79 \,.\, p + 6{,}93 \,.\, p_1.$$

Bestimmt man nun für jeden der Querschnitte 0, 1, 2, 3, 4 das Biegungsmoment, die Normalpressung und die Schubkraft in Functionen der unbekannten Spannungen T_1 und T_4, so kann man folgende Tabelle bilden:

Querschnitte 1	Biegungsmomente 2	Normalpressungen 3	Schubkräfte 4
0	$M_0 = 0{,}10 \,.\, T_1 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, - \left(\begin{matrix} 2{,}436 \,.\, p + \\ 2{,}564 \,.\, p_1 \end{matrix}\right)$	$P_0 = 0{,}96 \,.\, T_1 + \left(\begin{matrix} 2{,}13 \,.\, p + \\ 2{,}29 \,.\, p_1 \end{matrix}\right)$	$S_0 = 0{,}274 \,.\, T_1 \,.\,.\,.\,.\, - \left(\begin{matrix} 6{,}07 \,.\, p + \\ 6{,}51 \,.\, p_1 \end{matrix}\right)$
1	$M_1 = 0{,}98 \,.\, T_1 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, - \left(\begin{matrix} 17{,}012 \,.\, p + \\ 23{,}770 \,.\, p_1 \end{matrix}\right)$	$P_1 = 0{,}96 \,.\, T_1 + \left(\begin{matrix} 1{,}07 \,.\, p + \\ 2{,}29 \,.\, p_1 \end{matrix}\right)$	$S_1 = 0{,}274 \,.\, T_1 \,.\,.\,.\,.\, - \left(\begin{matrix} 3{,}03 \,.\, p + \\ 6{,}51 \,.\, p_1 \end{matrix}\right)$
2	$M_2 = 1{,}87 \,.\, T_1 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, - \left(\begin{matrix} 21{,}655 \,.\, p + \\ 44{,}906 \,.\, p_1 \end{matrix}\right)$	$P_2 = 0{,}96 \,.\, T_1 + 2{,}29 \,.\, p_1$	$S_2 = \begin{cases} 0{,}274 \,.\, T_1 \,.\,.\,.\,.\, - 6{,}51 \,.\, p_1 \\ 0{,}274 \,.\, T_1 - T_4 - 6{,}51 \,.\, p_1 \end{cases}$
3	$M_3 = 2{,}76 \,.\, T_1 - 3{,}23 \,.\, T_4 - \left(\begin{matrix} 21{,}655 \,.\, p + \\ 60{,}843 \,.\, p_1 \end{matrix}\right)$	$P_3 = 0{,}96 \,.\, T_1 + 1{,}22 \,.\, p_1$	$S_3 = 0{,}274 \,.\, T_1 - T_4 - 3{,}47 \,.\, p_1$
4	$M_4 = 3{,}65 \,.\, T_1 - 6{,}46 \,.\, T_4 - \left(\begin{matrix} 21{,}655 \,.\, p + \\ 66{,}927 \,.\, p_1 \end{matrix}\right)$	$P_4 = 0{,}96 \,.\, T_1 + 0{,}16 \,.\, p_1$	$S_4 = 0{,}274 \,.\, T_1 - T_4 - 0{,}44 \,.\, p_1$

4. Berechnung der Spannungen T_1 und T_4. — Es seien
Ω und I die Fläche und das Trägheitsmoment des Querschnittes der Hauptsparren;
$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ die Querschnittsflächen und $l_1 = 7{,}10$, $l_2 = 2 \times 5{,}82$, $l_3 = 7{,}15$, $l_4 = 1{,}70$ die Längen der Stangen;

$$\sum M^2 = \frac{M^2_0 + 4\,M^2_1 + 2\,M^2_2 + 4\,M^2_3 + M^2_4}{3},$$

$$\sum P^2 = \frac{P^2_0 + 4\,P^2_1 + 2\,P^2_2 + 4\,P^2_3 + P^2_4}{3},$$

$$\sum \frac{l\,T^2}{\omega} = \frac{7{,}10\,.\,T^2_1}{\omega_1} + \frac{5{,}82\,.\,T^2_2}{\omega_2} + \frac{7{,}15\,.\,T^2_3}{\omega_3} + \frac{1{,}70\,.\,T^2_4}{\omega_4}.$$

Beachtet man, dass die Entfernung zwischen den Querschnitten 0, 1; 1, 2 etc. 3^m,23 beträgt, so ergibt sich als Ausdruck für die Deformationsarbeit des ganzen Systems, sofern man den Theil, welcher der Verschiebung entspricht, vernachlässigt, folgende Formel:

$$2\left[\frac{3{,}23}{2\,E I}\sum M^2 + \frac{3{,}23}{2\,E\,\Omega}\sum P^2 + \frac{1}{2\,E}\sum\frac{l\,T^2}{\omega}\right],$$

oder, wenn man dieselbe durch den Factor $2 \times \frac{3{,}23}{2\,E I}$ dividirt, was nichts an den Gleichungen ändert, welche man daraus ableitet, indem man die Differentialquotienten dieses Ausdruckes in Bezug auf T_1 und T_4 gleich Null setzt,

$$\sum M^2 + \frac{I}{\Omega}\sum P^2 + \frac{I}{3{,}23}\sum\frac{l\,T^2}{\omega}.$$

Wählt man als Querschnitt der Hauptsparren jenen, welcher durch Figur 4 (Tafel IV) dargestellt wird, als Durchmesser der Zugstangen

$$d_1 = 56, \qquad d_2 = 44, \qquad d_3 = 38$$

und für die Druckstrebe einen kreuzförmigen Querschnitt, und zwar $\frac{60 - 60}{10}$, so ist

$$\Omega = 0{,}100 \times 0{,}500 - 0{,}091 \times 0{,}480 - 0{,}009 \times 0{,}350 = 0{,}003170,$$

$$I = \frac{1}{12}(0{,}100 \times 0{,}500^3 - 0{,}091 \times 0{,}480^3 - 0{,}009 \times 0{,}350^3) = 0{,}000170,$$

$$\omega_1 = 0{,}002463,$$
$$\omega_2 = 0{,}001520,$$
$$\omega_3 = 0{,}001134,$$
$$\omega_4 = 0{,}001100,$$

und folglich
$$\frac{I}{\Omega} = 0{,}054,$$

$$\frac{I}{\omega_1} = 0{,}0693; \quad \frac{I}{\omega_2} = 0{,}1125; \quad \frac{I}{\omega_3} = 0{,}1510; \quad \frac{I}{\omega_4} = 0{,}1555;$$

$$\frac{I}{3{,}23} \sum \frac{l\,T^2}{\omega} = (0{,}160 \,.\, T^2_1 + 0{,}203 \,.\, T^2_2 + 0{,}335 \,.\, T^2_3 + 0{,}082 \,.\, T^2_4). \quad (2)$$

Aus der in Figur 3 dargestellten graphischen Construction ergeben sich für T_2 und T_3 folgende Ausdrücke in Functionen von T_1 und T_4:

$$\left.\begin{aligned} T_2 &= 0{,}915 \,.\, T_1 - 1{,}695 \,.\, T_4, \\ T_3 &= 0{,}111 \,.\, T_1 + 1{,}608 \,.\, T_4, \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

so dass man aus der Formel (2) T_2 und T_3 eliminiren kann, womit

$$\frac{I}{3{,}23} \sum \frac{l\,T^2}{\omega} = 0{,}3341 \,.\, T^2_1 - 0{,}2557 \,.\, 2\,T_1\,T_4 + 1{,}5211 \,.\, T^2_4.$$

Substituirt man in $\sum M^2$ und $\sum P^2$ die Werthe von M_0, M_1 etc., P_0, P_1 etc. in Functionen von T_1 und T_4, wie sie in der Tabelle auf Seite 366 gegeben wurden, so erhält man

$$\sum M^2 = 18{,}2128 \,.\, T^2_1 - 19{,}7394 \,.\, 2\,T_1\,T_4 + 27{,}8211 \,.\, T^2_4$$
$$- (155{,}33\,p + 392{,}45\,p_1) \,.\, 2\,T_1 + (139{,}88 \,.\, p + 406{,}14\,p_1) \,.\, 2\,T_4;\ ^{*})$$

*) Man erkennt, dass auch für dieses elastische System die Werthe von

$$\frac{I}{\Omega} \sum P^2 \quad \text{und} \quad \frac{I}{3{,}23} \sum \frac{l\,T^2}{\omega}$$

im Verhältnisse zur Grösse $\sum M^2$ sehr klein sind.

Aber man kann sich leicht überzeugen, dass, wenn man nur diese letzte Grösse berücksichtigt und die beiden anderen vernachlässigt, man Resultate erhält, welche sehr verschieden sind von jenen, welche sich durch die vollständige Berechnung ergeben, besonders in Bezug auf das Biegungsmoment der Hauptsparren.

In Folge dessen darf man bei der Berechnung der Dachstühle Type Polonceau weder die Deformationsarbeit, welche den Normalpressungen der Hauptsparren, noch jene, welche den Spannungen in den Zugstangen entspricht, vernachlässigen.

$$\frac{I}{\Omega}\sum P^2 = 0{,}1991 \,.\, T^2_1 + (0{,}11\,p + 0{,}36\,.\,p_1)\,2\,T_1\,,$$

und der Ausdruck (1) wird zu

$$18{,}746\,.\,T^2_1 - 19{,}995\,.\,2\,T_1\,T_4 + 29{,}342\,.\,T^2_4 - (155{,}22\,.\,p + 392{,}09\,p_1)\,.\,2\,T_1 + (139{,}88\,p + 406{,}14\,.\,p_1)\,2\,T_4.$$

Die Differentialquotienten dieser Formel müssen behufs Bestimmung der zwei Unbekannten gleich Null gesetzt werden, was die zwei folgenden Gleichungen ergibt:

$$18{,}746\,.\,T_1 - 19{,}995\,.\,T_4 - (155{,}22\,.\,p + 392{,}09\,.\,p_1) = 0,$$
$$-\,19{,}995\,.\,T_1 + 29{,}342\,.\,T_4 + (139{,}88\,.\,p + 406{,}14\,.\,p_1) = 0;$$

hieraus folgt

$$\left.\begin{aligned} T_1 &= 11{,}69\,.\,p + 22{,}53\,.\,p_1, \\ T_4 &= 3{,}20\,.\,p + 1{,}51\,.\,p_1. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

5. Beanspruchung der Zugstangen und der Druckstrebe. — Macht man nun in den Gleichungen (4)

$$p = 379 \quad \text{und} \quad p_1 = 428$$

und substituirt man die erhaltenen Resultate in die Gleichungen (3), so erhält man für die Spannungen in den Zugstangen und für die Pressung der Druckstrebe folgende Werthe:

$$T_1 = 14073,$$
$$T_2 = 9726,$$
$$T_3 = 4551,$$
$$T_4 = 1859.$$

Die Beanspruchungen dieser vier Constructionstheile per Quadratmeter sind somit

$$\frac{T_1}{\omega_1} = \frac{14045}{0{,}002463} = 5\,700\,000$$
$$\frac{T_2}{\omega_2} = \frac{9696}{0{,}001520} = 6\,370\,000$$
$$\frac{T_3}{\omega_3} = \frac{4650}{0{,}001134} = 4\,100\,000$$
$$\frac{T_4}{\omega_4} = \frac{1862}{0{,}001100} = 1\,700\,000.$$

6. Mittellinie des Druckes für die Hauptsparren und grösste Beanspruchung derselben. — Wenn man in der Tabelle in Nummer 3 $p = 379$ und $p_1 = 428$ macht und für T_1 und T_4 die oben gefundenen Werthe einsetzt, so erhält man die in den Colonnen 2, 3 und 4 der nachfolgenden Tabelle eingetragenen Zahlen. Dividirt man die Biegungsmomente durch die Normalpressungen, so findet man die Zahlen der Colonne 5, welche die Entfernungen der Druckmittelpunkte von den Querschnittsmittelpunkten geben.

Mit Hilfe der Formel

$$\frac{P}{\Omega} \pm \frac{M v}{I},$$

in welcher P und M die Normalpressung und das Biegungsmoment eines Querschnittes und Ω, I, v die Fläche, das Trägheitsmoment und die halbe Höhe dieses Querschnittes bedeuten, erhält man die in den Colonnen 6 und 7 angeführten Pressungen per Quadratmeter an der Innen- und Aussenseite der betrachteten Querschnitte.

Beachtet man, dass die Gitterstäbe aus Flacheisen von $0^m,050 \times 0^m,006$ bestehen, und nennt man

$\omega = 0,000300$ die Querschnittsfläche dieser Stäbe,

$d = 0,55$ die Diagonale des Gitterwerkes in der Richtung des Hauptsparrens,

$d_1 = 0,42$ die andere Diagonale,

$I = 0,000170$ das Trägheitsmoment des Querschnittes des Hauptsparrens,

$G = \frac{1}{8}(0,100 \times 0,500^2 - 0,091 \times 0,480^2 - 0,009 \times 0,350^2) =$ 0,000366 das statische Moment des halben Querschnittes des Hauptsparrens in Bezug auf die Biegungsachse,

S die Schubkraft in einem beliebigen Querschnitte;

so kann man die Spannung der Gitterstäbe mit Hilfe der Formel

$$\frac{G S \sqrt{d^2 + d_1^2}}{2 I \omega} = 2483 \,.\, S$$

berechnen, welche die in der letzten Colonne der folgenden Tabelle eingetragenen Resultate gibt.

Querschnitte	Biegungs-momente	Normal-pressungen	Schub-kräfte	Mittel-linie des Druckes	Pressung per Quadratmeter		Spannung der Gitterstäbe per Quadratmeter
					in der unteren Gurte	in der oberen Gurte	
1	2	3	4	5	6	7	8
0	— 613	15271	— 1238	— 0,040	3 911 420	5 723 180	3 073 950
1	— 2830	14869	— 86	— 0,192	489 000	8 892 000	213 540
2	— 1110	14463	{+ 1062 — 800	— 0,080	2 852 200	6 272 800	{2 636 950 1 986 400
3	— 1411	14006	+ 501	— 0,106	2 215 300	6 621 300	1 243 980
4	+ 2505	13552	+ 1798	+ 0,175	7 779 400	770 600	4 464 430

7. Thatsächlich zu wählende Dimensionen. — Aus den oben erhaltenen Resultaten sieht man, dass die Zugstange T_2 eine Spannung von mehr als 6 Kilogramm per Quadratmillimeter erleidet, was man in der Praxis im Allgemeinen nicht zulässt; man muss daher deren Durchmesser grösser machen, und zwar 46 Millimeter statt 44. Es ist dann

$$\omega_2 = 0{,}001662,$$

und die grösste Spannung der Zugstange ergibt sich mit

$$\frac{9726}{0{,}001662} = 5\,852\,000,$$

d. h. $5^{kg}{,}85$ per Quadratmillimeter.

Für die aus Eisengattungen von kleinen Dimensionen, welche im Allgemeinen frei von Materialfehlern sind, construirten Hauptsparren kann man eine Beanspruchung von 8 Kilogramm per Quadratmillimeter wohl zulassen. Da diese Grenze nur an der Aussenseite in der Mitte der Theile zwischen den Stützen und den Druckstreben überschritten wird, kann man an dieser Stelle den Querschnitt der äusseren Gurte dadurch verstärken, dass man an das **T**-Eisen ein Blech von gleicher Breite annietet, dessen Dicke 8 Millimeter beträgt. Man hat sodann

$$\Omega = 0{,}003970,$$

$$I = \frac{1}{3}\Big[0{,}100\,(0{,}213^3 + 0{,}295^3) - 0{,}091\,(0{,}195^3 + 0{,}285^3)$$
$$- 0{,}009\,(0{,}130^3 + 0{,}0220^3)\Big] = 0{,}000212,$$

womit sich die Pressungen per Quadratmeter in der inneren und in der äusseren Gurte des Querschnittes 1 folgendermassen ergeben:

$$\frac{14869}{0{,}003\,970} - \frac{2830 \times 0{,}295}{0{,}000\,212} = -\,224\,000,$$

$$\frac{14869}{0{,}003\,970} + \frac{2830 \times 0{,}213}{0{,}000\,212} = 6\,615\,000.$$

8. Betrachtung des Falles, wo die Belastung nur auf einer Seite des Bundgespärres stattfindet und wobei man von dem permanenten Gewichte absieht. — Es sei q das per laufenden Meter auf einen der Hauptsparren vertheilte Gewicht, und es werde angenommen, dass auf den anderen keine Last, selbst nicht dessen Eigengewicht wirke.

Das Gesammtgewicht der Belastung ist

$$(6{,}79 + 6{,}93)\,q = 13{,}72\,.\,q;$$

nimmt man an, dass der linke Hauptsparren belastet ist, so ergeben sich die Reactionen der Stützflächen folgendermassen:

für die linke Stützfläche $R = \frac{3}{4}\,13{,}72\,.\,q = 10{,}29\,.\,q,$

für die rechte Stützfläche $R'_1 = \frac{1}{4}\,13{,}72\,.\,q = 3{,}43\,.\,q.$

Nennt man nun

$\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \mathfrak{T}_3, \mathfrak{T}_4$ die Spannungen der Zugstangen und die Pressung der Druckstrebe für die linke Hälfte und

t_1, t_2, t_3, t_4 die correspondirenden Grössen für die rechte Hälfte,

so müssen wohl die Spannungen $\mathfrak{T}_2$ und t_2 gleich sein, denn dieselben beziehen sich auf dieselbe Zugstange; doch ist es der Symmetrie halber angezeigt, die beiden Buchstaben beizubehalten.

Man kann nun analog der Tabelle auf Seite 366 die folgende zusammenstellen.

Quer-schnitte 1	Biegungsmomente 2	Normalpressungen 3	Schubkräfte 4
		I. Linker Hauptsparren.	
0	$M_0 = 0{,}10 \,.\, \mathfrak{T}_1 \ldots\ldots - 3{,}731 \,.\, q$	$P_0 = 0{,}96 \,.\, \mathfrak{T}_1 + 3{,}29 \,.\, q$	$S_0 = 0{,}274 \,.\, \mathfrak{T}_1 \ldots - 9{,}36 \,.\, q$
1	$M_1 = 0{,}98 \,.\, \mathfrak{T}_1 \ldots\ldots - 29{,}009 \,.\, q$	$P_1 = 0{,}96 \,.\, \mathfrak{T}_1 + 2{,}22 \,.\, q$	$S_1 = 0{,}274 \,.\, \mathfrak{T}_1 \ldots - 6{,}33 \,.\, q$
2	$M_2 = 1{,}87 \,.\, \mathfrak{T}_1 \ldots\ldots - 44{,}339 \,.\, q$	$P_2 = 0{,}96 \,.\, \mathfrak{T}_1 + 1{,}15 \,.\, q$	$S_2 = \begin{cases} 0{,}274 \,.\, \mathfrak{T}_1 \ldots - 3{,}29 \,.\, q \\ 0{,}274 \,.\, \mathfrak{T}_1 - \mathfrak{T}_4 - 3{,}29 \,.\, q \end{cases}$
3	$M_3 = 2{,}76 \,.\, \mathfrak{T}_1 - 3{,}23 \,.\, \mathfrak{T}_4 - 49{,}810 \,.\, q$	$P_3 = 0{,}96 \,.\, \mathfrak{T}_1 + 0{,}09 \,.\, q$	$S_3 = 0{,}274 \,.\, \mathfrak{T}_1 - \mathfrak{T}_4 - 0{,}25 \,.\, q$
4	$M_4 = 3{,}65 \,.\, \mathfrak{T}_1 - 6{,}46 \,.\, \mathfrak{T}_4 - 45{,}433 \,.\, q$	$P_4 = 0{,}96 \,.\, \mathfrak{T}_1 - 0{,}98 \,.\, q$	$S_4 = 0{,}274 \,.\, \mathfrak{T}_1 - \mathfrak{T}_4 + 2{,}78 \,.\, q$
		II. Rechter Hauptsparren.	
0	$M_0^1 = 0{,}10 \,.\, t_1 \ldots\ldots - 1{,}269 \,.\, q$	$P_0^1 = 0{,}96 \,.\, t_1 + 1{,}13 \,.\, q$	$S_0^1 = 0{,}274 \,.\, t_1 \ldots - 3{,}22 \,.\, q$
1	$M_1^1 = 0{,}98 \,.\, t_1 \ldots\ldots - 11{,}765 \,.\, q$	$P_1^1 = 0{,}96 \,.\, t_1 + 1{,}13 \,.\, q$	$S_1^1 = 0{,}274 \,.\, t_1 \ldots - 3{,}22 \,.\, q$
2	$M_2^1 = 1{,}87 \,.\, t_1 \ldots\ldots - 22{,}226 \,.\, q$	$P_2^1 = 0{,}96 \,.\, t_1 + 1{,}13 \,.\, q$	$S_2^1 = \begin{cases} 0{,}274 \,.\, t_1 \ldots - 3{,}22 \,.\, q \\ 0{,}274 \,.\, t_1 - t_4 - 3{,}22 \,.\, q \end{cases}$
3	$M_3^1 = 2{,}76 \,.\, t_1 - 3{,}23 \,.\, t_4 - 32{,}685 \,.\, q$	$P_3^1 = 0{,}96 \,.\, t_1 + 1{,}13 \,.\, q$	$S_3^1 = 0{,}274 \,.\, t_1 - t_4 - 3{,}22 \,.\, q$
4	$M_4^1 = 3{,}65 \,.\, t_1 - 6{,}46 \,.\, t_4 - 43{,}149 \,.\, q$	$P_4^1 = 0{,}96 \,.\, t_1 + 1{,}13 \,.\, q$	$S_4^1 = 0{,}274 \,.\, t_1 - t_4 - 3{,}22 \,.\, q$

Die Deformationsarbeit des ganzen Gespärres, dividirt durch den Factor $\frac{3,23}{2EI}$, wird ausgedrückt durch die Formel

$$\frac{M^2_0 + 4\,M^2_1 + 2\,M^2_2 + 4\,M^2_3 + M^2_4}{3} + \frac{I}{\Omega}\,\frac{P^2_0 + 4\,P^2_1 + 2\,P^2_2 + 4\,P^2_3 + P^2_4}{3}$$

$$+ \frac{I}{3,23}\left(\frac{7,10 \,.\, \mathfrak{T}^2_1}{\omega_1} + \frac{5,82 \,.\, \mathfrak{T}^2_2}{\omega_2} + \frac{7,13 \,.\, \mathfrak{T}^2_3}{\omega_3} + \frac{1,70 \,.\, \mathfrak{T}^2_4}{\omega_4}\right)$$

$$+ \frac{M'^2_0 + 4M'^2_1 + 2M'^2_2 + 4M'^2_3 + M'^2_4}{3} + \frac{I}{\Omega}\,\frac{P'^2_0 + 4P'^2_1 + 2P'^2_2 + 4P'^2_3 + P'^2_4}{3}$$

$$+ \frac{I}{3,23}\left(\frac{7,10 \,.\, t^2_1}{\omega_1} + \frac{5,82 \,.\, t^2_2}{\omega_2} + \frac{7,13 \,.\, t^2_3}{\omega_3} + \frac{1.70 \,.\, t^2_4}{\omega_4}\right).$$

Substituirt man in diesem Ausdrucke für die Momente M und für die Pressungen P die oben erhaltenen Werthe und für die Spannungen $\mathfrak{T}_2$, $\mathfrak{T}_3$, t_2, t_3 deren Ausdrücke in Functionen von $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_4$, t_1, t_4, wie sie durch die folgenden Gleichungen gegeben werden:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{T}_2 &= 0,915 \,.\, \mathfrak{T}_1 - 1,695 \,.\, \mathfrak{T}_4, \\ \mathfrak{T}_3 &= 0,111 \,.\, \mathfrak{T}_1 + 1,608 \,.\, \mathfrak{T}_4, \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

$$\left.\begin{aligned} t_2 &= 0,915 \,.\, t_1 - 1,695 \,.\, t_4, \\ t_3 &= 0,111 \,.\, t_1 + 1,608 \,.\, t_4, \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

so erhält man die Formel

$$\left.\begin{aligned} &18,746\,(\mathfrak{T}^2_1 + t^2_1) - 19,992 \times 2\,(\mathfrak{T}_1\,\mathfrak{T}_4 + t_1\,t_4) \\ &+ 29,342\,(\mathfrak{T}^2_4 + t^2_4) - (331,625 \,.\, q \,.\, 2\,\mathfrak{T}_1 + 215,685 \,.\, q \,.\, 2\,t_1) \\ &+ (312,345 \,.\, q \,.\, 2\,\mathfrak{T}_4 + 233,675 \,.\, q \,.\, 2\,t_4). \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Da $\mathfrak{T}_2$ und t_2 dieselbe Spannung vorstellen, kann man aus den Gleichungen (5) und (6) die Beziehung

$$0,915 \,.\, \mathfrak{T}_1 - 1,695 \,.\, \mathfrak{T}_4 = 0,915 \,.\, t_1 - 1,695 \,.\, t_4$$

ableiten und folglich ist

$$\mathfrak{T}_4 - t_1 = 0,540\,(\mathfrak{T}_1 - t_1). \quad (8)$$

Auf Grund dieser Beziehung zwischen den vier in der Formel (7) enthaltenen Unbekannten kann man nun eine derselben eliminiren und sodann die Differentialquotienten des Ausdruckes (7) mit Bezug auf die

anderen gleich Null setzen. Diese Rechnung lässt sich aber vereinfachen, indem man die Unbekannten ändert, und zwar indem man

$$\mathfrak{T}_1 + t_1 = \tau_1, \qquad \mathfrak{T}_4 + t_4 = \tau_4,$$
$$\mathfrak{T}_1 - t_1 = \theta_1, \qquad \mathfrak{T}_4 - t_4 = \theta_4$$

setzt; es ist somit

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{T}_1 &= \frac{\tau_1 + \theta_1}{2}, & \mathfrak{T}_4 &= \frac{\tau_4 + \theta_4}{2}, \\ t_1 &= \frac{\tau_1 - \theta_1}{2}, & t_4 &= \frac{\tau_4 - \theta_4}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Substituirt man diese Werthe in die Formeln (7) und (8), so erhält man

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{2}(18{,}746\,.\,\tau^2_1 - 19{,}992\,.\,2\tau_1\tau_4 + 29{,}342\,.\,\tau^2_4 - 547{,}31\,.\,q\,.\,2\tau_1 + 546{,}02\,.\,q\,.\,2\tau_4) \\ +&\frac{1}{2}(18{,}746\,.\,\theta^2_1 - 19{,}992\,.\,2\theta_1\theta_4 + 29{,}409\,.\,\theta^2_4 - 115{,}94\,.\,q\,.\,2\theta_1 + 78{,}67\,.\,q\,.\,2\theta_4); \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

$$\theta_4 = 0{,}540\,.\,\theta_1. \tag{11}$$

Man müsste nun θ_4 aus der Formel (10) eliminiren und sodann die Differentialquotienten nach τ_1, τ_4, θ_1 gleich Null setzen; aber man erkennt leicht, dass jener Theil des Ausdruckes (10), welcher τ_1 und τ_4 enthält, genau mit der letzten, in Nummer 4 erhaltenen Formel für die Arbeit übereinstimmt, wenn man $p = p_1 = q$ setzt. Man kann also die Werthe von τ_1 und τ_4, welche aus dem Ausdrucke (10) abgeleitet werden können, indem die Differentialquotienten mit Bezug auf τ_1 und τ_4 gleich Null gesetzt werden, sogleich aus den Gleichungen (4) ableiten, indem man hierin $p = p_1 = q$ macht, so dass

$$\tau_1 = 34{,}22\,.\,q,$$
$$\tau_4 = \ \ 4{,}71\,.\,q.$$

Der zweite Theil der Formel (10), d. h. jener, welcher θ_1 und θ_4 enthält, stellt sich nach der Elimination von θ_4 folgendermassen dar:

$$\frac{1}{2}(5{,}730\,.\,\theta^2_1 - 73{,}46\,.\,q\,.\,2\,\theta_1);$$

der Differentialquotient hievon gleich Null gesetzt ergibt

$$5{,}730\,.\,\theta_1 - 73{,}46\,.\,q = 0,$$

woraus $\theta_1 = 6{,}43 \,.\, q.$

Substituirt man diesen Werth von θ_1 in die Gleichung (11), so erhält man $\theta_4 = 3{,}47 \,.\, q.$

Die Gleichungen (9) ergeben somit

$$\mathfrak{T}_1 = 23{,}54 \,.\, q, \qquad t_1 = 10{,}68 \,.\, q,$$
$$\mathfrak{T}_4 = 5{,}82 \,.\, q, \qquad t_4 = -1{,}12 \,.\, q.$$

Macht man in diesen Ausdrücken (siehe Nummer 2)

$$q = 225,$$

und substituirt man die erhaltenen Resultate in die Formeln (5), (6) und in die in der vorliegenden Nummer schon früher angeführte Tabelle, so erhält man die folgenden Resultate:

$$\mathfrak{T}_1 = 5296, \qquad t_1 = 2403,$$
$$\mathfrak{T}_2 = t_2 = 2627,$$
$$\mathfrak{T}_3 = 2693, \qquad t_3 = -138,$$
$$\mathfrak{T}_4 = 1309, \qquad t_4 = -252.$$

Linker Hauptsparren				Rechter Hauptsparren			
Querschnitte 1	Biegungsmomente 2	Normalpressungen 3	Schubkräfte 4	Querschnitte 1	Biegungsmomente 2	Normalpressungen 3	Schubkräfte 4
0	— 310	5800	— 660	0	— 45	2560	— 68
1	— 1337	5580	+ 23	1	— 292	2560	— 68
2	— 73	5310	+ 706 — 600	2	— 507	2560	— 68 + 178
3	— 818	5100	+ 83	3	+ 92	2560	+ 178
4	+ 652	4850	+ 765	4	+ 690	2560	+ 178

9. Betrachtung des Falles, wo man das Eigengewicht des Bundgespärres und der Bedachung berücksichtigt, und wo man eine nur linksseitige Belastung annimmt. — Man weiss, dass sich

dieser Fall aus den beiden vorhergehenden durch einfache Addition oder Subtraction ableiten lässt, so dass man durch Anwendung der bekannten Regeln die nachfolgenden Tabellen erhält:

Spannung der Zugstangen und Pressung der Druckstrebe:

Links	Rechts
$T_1 - t_1 = 11670$	$T_1 - \mathfrak{T}_1 = 8777$
$T_2 - t_2 = 7099$	$T_2 - \mathfrak{T}_2 = 7099$
$T_3 - t_3 = 4689$	$T_3 - \mathfrak{T}_3 = 1858$
$T_4 - t_4 = 2111$	$T_4 - \mathfrak{T}_4 = 550.$

Linker Hauptsparren					Rechter Hauptsparren				
Querschnitte	Biegungsmomente	Normalpressungen	Schubkräfte	Mittellinie des Druckes	Querschnitte	Biegungsmomente	Normalpressungen	Schubkräfte	Mittellinie des Druckes
1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
0	— 568	12711	— 1170	— 0,044	0	— 303	9471	— 578	— 0,032
1	— 2538	12309	— 18	— 0,208	1	— 1493	9289	— 63	— 0,162
2	— 603	11903	+ 1130 — 978	— 0,054	2	— 1037	9153	+ 356 — 200	— 0,116
3	— 1319	11746	+ 323	— 0,136	3	— 593	8906	+ 418	— 0,072
4	+ 1815	10992	+ 1620	+ 0,158	4	+ 1853	8702	+ 1033	+ 0,204

Der Vergleich dieser Resultate mit jenen, welche in Nummer 6 erhalten wurden, zeigt, dass nur das Biegungsmoment des linksseitigen Querschnittes 3 in dem Falle einer vollständigen Belastung des ganzen Gespärres kleiner ist als in jenem Falle, wo nur die linke Hälfte desselben belastet ist; aber da in dem zweiten Falle die Normalpressung in demselben Querschnitte bedeutend kleiner ist als in dem ersten, so erkennt man auch ohne Berechnung, dass in dem Falle der Belastung des ganzen Gespärres die Beanspruchung per Quadratmeter grösser ist.

In Betreff der Schubkräfte trifft es wohl zu, dass dieselben im Falle der Belastung des ganzen Gespärres für einige Querschnitte kleiner sind als in jenem, wo nur die linke Hälfte desselben belastet ist; aber erstlich sieht man, dass diese Differenzen sehr klein sind, und dass die ab-

solut grössten Schubkräfte in dem Falle der beiderseitigen Belastung stattfinden, woraus folgt, dass die grösste Beanspruchung der Gitterstäbe in diesem letzteren Falle eintritt.

Man erkennt also, dass mit den für die Zugstangen und die Hauptstreben gewählten Dimensionen für alle in Betracht kommende Fälle vollkommene Sicherheit gewährt wird.

10. Einfluss der Aenderungen der Temperatur. — Da das System homogen ist und die Enden der Hauptstreben sich frei verlängern oder verkürzen können, indem eines der Enden auf gusseisernen Walzen aufruht, so folgt daraus, dass die Aenderungen der Temperatur — sobald dieselben gleichförmig über alle Constructionsglieder vertheilt sind — keinen Einfluss auf die elastischen Kräfte haben.

Man könnte wohl den Fall einer verschiedenen Aenderung der Temperatur für die einzelnen Glieder untersuchen; aber es ist dies nicht nothwendig, denn die Temperaturdifferenzen können nicht sehr gross sein, weshalb ihr Einfluss auf die elastischen Kräfte zu vernachlässigen ist.

Für Bundgespärre von der betrachteten Form müsste man die Temperaturänderungen selbst dann, wenn dieselben über alle Glieder gleich sein würden, berücksichtigen, sobald die Hauptsparren aus Holz wären.

7. Capitel.

Betrachtung einer Halle aus schmiedeisernen Bundgespärren mit mehreren Zugstangen.

(Tafel V.)

1. Allgemeine Angaben. — Dieselben sind gleich mit jenen im vorhergehenden Beispiele, mit Ausnahme der Pfeilhöhe, welche nunmehr $6^m,12$ anstatt $4^m,90$ beträgt.

2. Belastungen. — Auch die Belastung ist genau dieselbe, wie im 6. Capitel angenommen wurde, und zwar sowohl per Quadratmeter der Fläche, als auch per Längenmeter des Bogens.

3. Allgemeine Formeln für den Fall der completen Belastung. — Man nenne

T_1, T_2, T_3, T_4 die Spannungen in den vier Zugstangen,

p das Gewicht per Meter für den unteren Theil des Bogens,

p_1 das Gewicht per Meter für den oberen Theil desselben

und theile die Länge jedes der beiden Bögen — die Versteifungen am Fusse und am Scheitel ausgenommen (Fig. 1) — in vier gleiche Theile. Die Länge jedes dieser Theile beträgt in der Bogenachse gemessen $3^m,58$ und auf der äusseren Wölbung gemessen $3^m,61$.

Die Reaction der Auflagflächen ist

$$R = 3{,}61 \times 2 \times p + (3{,}61 \times 2 + 0{,}22)\, p_1 = 7{,}22\,.\,p + 7{,}44\,.\,p_1.$$

Es lässt sich nun für jeden der Querschnitte 0, 1, 2, 3, 4 das Biegungsmoment, die Normalpressung und die Schubkraft berechnen; für den Querschnitt 1 hat man z. B. die folgenden Ausdrücke:

$$M_1 = 1{,}85 \;\; T_1 - 2{,}89 \;\; R + 3{,}61\, p \times 1{,}57,$$
$$P_1 = 0{,}904\; T_1 + 0{,}575\,(R - 3{,}61\,.\,p),$$
$$S_1 = 0{,}421\; T_1 - 0{,}818\,(R - 3{,}61\,.\,p).$$

Für die anderen Querschnitte ergeben sich ähnliche Ausdrücke, nur muss man für die Querschnitte 2, 3, 4 auch die Spannung T_4

Quer-schnitte	Biegungsmomente	Normalpressungen	Schubkräfte
1	2	3	4
0	$M_0 = 0{,}06 . T_1 \ldots\ldots - \begin{pmatrix} 1{,}08 . p + \\ 1{,}12 . p_1 \end{pmatrix}$	$P_0 = 0{,}818 . T_1 \ldots\ldots + \begin{pmatrix} 5{,}10 . p + \\ 5{,}26 . p_1 \end{pmatrix}$	$S_0 = 0{,}576 . T_1 \ldots\ldots - \begin{pmatrix} 5{,}09 . p + \\ 5{,}25 . p_1 \end{pmatrix}$
1	$M_1 = 1{,}85 . T_1 \ldots\ldots - \begin{pmatrix} 15{,}20 . p + \\ 21{,}50 . p_1 \end{pmatrix}$	$P_1 = 0{,}904 . T_1 \ldots\ldots + \begin{pmatrix} 2{,}08 . p + \\ 4{,}28 . p_1 \end{pmatrix}$	$S_1 = 0{,}421 . T_1 \ldots\ldots - \begin{pmatrix} 2{,}95 . p + \\ 6{,}09 . p_1 \end{pmatrix}$
2	$M_2 = 3{,}09 . T_1 \ldots\ldots - \begin{pmatrix} 20{,}18 . p + \\ 44{,}42 . p_1 \end{pmatrix}$	$P_2 = 0{,}964 . T_1 \ldots\ldots + 3{,}16 . p_1$	$S_2 = \begin{cases} 0{,}262 . T_1 \ldots\ldots - 6{,}73 . p_1 \\ 0{,}262 . T_1 + 1{,}000 . T_4 - 6{,}73 . p_1 \end{cases}$
3	$M_3 = 3{,}72 . T_1 + 3{,}55 . T_4 - \begin{pmatrix} 20{,}18 . p + \\ 62{,}95 . p_1 \end{pmatrix}$	$P_3 = 0{,}995 . T_1 + 0{,}174 . T_4 + 1{,}02 . p_1$	$S_3 = 0{,}094 . T_1 + 0{,}987 . T_4 - 3{,}69 . p_1$
4	$M_4 = 3{,}77 . T_1 + 7{,}00 . T_4 - \begin{pmatrix} 20{,}18 . p + \\ 69{,}93 . p_1 \end{pmatrix}$	$P_4 = 0{,}998 . T_1 + 0{,}340 . T_4 + 0{,}02 . p_1$	$S_4 = -0{,}075 . T_1 + 0{,}942 . T_4 - 0{,}22 . p_1$

berücksichtigen. Die betreffenden Ausdrücke sind alle in der nebenstehenden Tabelle aufgenommen und erscheinen darin nur die Unbekannten T_1 und T_4.

4. Berechnung der Spannungen T_1 und T_4. — Nennt man

Ω und I die Fläche und das Trägheitsmoment der Bogenquerschnitte,

ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 die Querschnittsflächen und $l_1 = 7{,}37$, $l_2 = 2 \times 5{,}66$, $l_3 = 7{,}42$, $l_4 = 3{,}22$ die Längen der Zugstangen;

macht man

$$\sum M^2 = \frac{M^2_0 + 4\,M^2_1 + 2\,M^2_2 + 4\,M^2_3 + M^2_4}{3},$$

$$\sum P^2 = \frac{P^2_0 + 4\,P^2_1 + 2\,P^2_2 + 4\,P^2_3 + P^2_4}{3},$$

$$\sum \frac{l\,T^2}{\omega} = \frac{7{,}37\,.\,T^2_1}{\omega_1} + \frac{5{,}66\,.\,T^2_2}{\omega_2} + \frac{7{,}42\,.\,T^2_3}{\omega_3} + \frac{3{,}22\,.\,T^2_4}{\omega_4}$$

und beachtet schliesslich, dass die Länge der Bogenstücke 0, 1; 1, 2; 2, 3; 3, 4 in der Bogenachse gemessen $3^m{,}58$ beträgt, so erhält man analog den früheren Betrachtungen als Ausdruck für die Deformationsarbeit des ganzen Systems folgende Formel:

$$2\left[\frac{3{,}58}{2\,E\,I}\sum M^2 + \frac{3{,}58}{2\,E\,\Omega}\sum P^2 + \frac{1}{2\,E}\sum\frac{l\,T^2}{\omega}\right].$$

Dividirt man diese Formel durch den numerischen Factor $2 \times \frac{3{,}58}{2\,E\,I}$, was nichts an den Gleichungen ändert, welche man daraus ableitet, indem man die Differentialquotienten mit Bezug auf T_1 und T_4 gleich Null setzt, so erhält man

$$\sum M^2 + \frac{I}{\Omega}\sum P^2 + \frac{I}{3{,}58}\sum\frac{l\,T^2}{\omega}. \qquad (1)$$

Nimmt man als Querschnitt der Bögen jenen, welcher durch Figur 6 (Tafel V) dargestellt wird, und als Durchmesser der Zugstangen

$$d_1 = 42, \qquad d_2 = 42, \qquad d_3 = 20, \qquad d_4 = 20,$$

so findet man

$$\Omega = 0{,}080 \times 0{,}400 - 0{,}072 \times 0{,}384 - 0{,}008 \times 0{,}274 = 0{,}002160,$$

$$I = \frac{1}{12}(0{,}080 \times 0{,}400^3 - 0{,}072 \times 0{,}384^3 - 0{,}008 \times 0{,}274^3) = 0{,}000073;$$

$$\omega_1 = \omega_2 = 0{,}001385,$$

$$\omega_3 = \omega_4 = 0{,}000314,$$

$$\frac{I}{\Omega} = 0{,}0338$$

und folglich

$$\frac{I}{3{,}58}\sum\frac{l\,T^2}{\omega} = 0{,}1085\,.\,T^2_1 + 0{,}0833\,.\,T^2_2 + 0{,}4818\,.\,T^2_3 + 0{,}2091\,.\,T^2_4. \quad (2)$$

Da die vier Spannungen T_1, T_2, T_3 und T_4 sich das Gleichgewicht halten müssen, so gibt es zwischen denselben zwei Gleichungen, mit Hilfe welcher man die Spannungen T_2 und T_3 in Functionen von T_1 und T_4 ausdrücken kann; diese zwei Gleichungen ergeben sich aus der in Figur 5 dargestellten graphischen Construction wie folgt:

$$\left.\begin{aligned} T_2 &= 0{,}784\,.\,T_1 + 1{,}498\,.\,T_4\,, \\ T_3 &= 0{,}264\,.\,T_1 - 1{,}405\,.\,T_4\,; \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

man kann daher T_2 und T_3 aus der Gleichung (2) eliminiren und erhält

$$\frac{I}{3{,}58}\sum\frac{l\,T^2}{\omega} = 0{,}19\,.\,T^2_1 - 0{,}08\,.\,2\,T_1\,T_4 + 1{,}35\,.\,T^2_4.$$

Substituirt man in $\sum M^2$ und $\sum P^2$ für die Momente M_0, M_1 etc. und für die Normalpressungen P_0, P_1 etc. deren Werthe in Functionen von T_1 und T_4, welche in der Tabelle der vorhergehenden Nummer gegeben wurden, so erhält man:

$$\sum M^2 = 34{,}12\,.\,T^2_1 + 26{,}40\,.\,2\,T_1\,T_4 + 33{,}14\,.\,T^2_4$$
$$- (214{,}06\,.\,p + 546{,}11\,.\,p_1)\,.\,2\,T_1 - (149{,}74\,.\,p + 462{,}99\,.\,p_1)\,.\,2\,T_4;$$

$$\frac{I}{\Omega}\sum P^2 = 0{,}12\,.\,T^2_1 + 0{,}01\,.\,2\,T_1\,T_4 + 0{,}00\,.\,T^2_4$$
$$+ (0{,}13\,.\,p + 0{,}34\,.\,p_1)\,.\,2\,T_1 + 0{,}01\,.\,p_1\,.\,2\,T_4.$$

Es ergibt somit die Formel (1)

$$34{,}43\,.\,T^2_1 + 26{,}33\,.\,2\,T_1 T_4 + 34{,}49\,.\,T^2_4 - (213{,}93\,.\,p + 545{,}77\,.\,p_1)\,.\,2\,T_1$$
$$- (149{,}74\,.\,p + 462{,}98\,.\,p_1)\,.\,2\,T_4.$$

Setzt man die Differentialquotienten dieses Ausdruckes nach T_1 und T_4 gleich Null, so erhält man die folgenden zwei Gleichungen:

$$34{,}43 \,.\, T_1 + 26{,}33 \,.\, T_4 = 204{,}41 \,.\, p + 544{,}33 \,.\, p_1\,;$$
$$26{,}33 \,.\, T_1 + 34{,}49 \,.\, T_4 = 142{,}61 \,.\, p + 461{,}12 \,.\, p_1\,;$$

woraus

$$\left.\begin{aligned} T_1 &= 6{,}659 \,.\, p + 13{,}421 \,.\, p_1\,, \\ T_4 &= -\,0{,}955 \,.\, p + 3{,}124 \,.\, p_1. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

5. Die Spannungen in den Zugstangen. — Macht man in den Formeln (4)

$$p = 379 \quad \text{und} \quad p_1 = 428,$$

so erhält man die Werthe von T_1 und T_4, sowie nach Substitution derselben in die Gleichungen (3) auch die Werthe T_2 und T_3.

Man hat also

$$\begin{aligned} T_1 &= 8268, \\ T_2 &= 7937, \\ T_3 &= 811, \\ T_4 &= 975, \end{aligned}$$

und ergeben sich daher die Spannungen in den Zugstangen per Quadratmeter wie folgt:

$$\text{für die Zugstange } T_1 \;\ldots\; \frac{8268}{0{,}001385} = 5\,969\,000;$$
$$\text{für die Zugstange } T_2 \;\ldots\; \frac{7937}{0{,}001386} = 5\,730\,000;$$
$$\text{für die Zugstange } T_3 \;\ldots\; \frac{811}{0{,}000314} = 2\,582\,000;$$
$$\text{für die Zugstange } T_4 \;\ldots\; \frac{975}{0{,}000314} = 3\,105\,000.$$

6. Mittellinie des Druckes für die Bögen und grösste Beanspruchung per Quadratmeter. — Macht man in der Tabelle in Nummer 3 $p = 379$, $p_1 = 428$ und setzt man für T_1 und T_4 die oben gefundenen Werthe, so erhält man die in den Colonnen 2, 3 und 4 der nachfolgenden Tabelle enthaltenen Resultate.

Querschnitte 1	Biegungsmomente 2	Normalpressungen 3	Schubkräfte 4	Mittellinie des Druckes 5	Pressung per Quadratmeter an der inneren Wölbung 6	Pressung per Quadratmeter an der äusseren Wölbung 7	Spannung der Gitterstäbe per Quadratmeter 8
0	— 386	11048	+ 650	— 0,035	4057250	6172350	1642550
1	+ 390	10195	— 163	+ 0,038	5793400	3646600	411901
2	— 1152	9430	— 685 + 309	— 0,123	1205800	7518200	1730995 528143
3	— 382	8947	+ 189	— 0,043	3093200	5191200	477603
4	+ 462	8709	+ 214	+ 0,053	5300700	2763300	540778

Dividirt man die Biegungsmomente durch die correspondirenden Normalpressungen, so ergibt dies die in der Colonne 5 angeführten Resultate, d. h. die Entfernungen der Druckmittelpunkte von den Querschnittsmittelpunkten.

Mit Hilfe der Formel $\frac{P}{\Omega} \pm \frac{M v}{I}$,

in welcher P und M die Normalpressung und das Biegungsmoment für einen Querschnitt und Ω, I, v die Fläche, das Trägheitsmoment und die halbe Höhe des Bogenquerschnittes darstellen, erhält man die in den Colonnen 6 und 7 angeführten Pressungen per Quadratmeter an der inneren und äusseren Wölbung.

Berücksichtigt man, dass die Gitterstäbe aus Flacheisen bestehen und den Querschnitt 50×6 haben, und nennt man

$\omega = 0{,}000300$ die Querschnittsfläche der Gitterstäbe,

$I = 0{,}000073$ das Trägheitsmoment des Bogenquerschnittes,

$G = \frac{1}{8}(0{,}080 \times 0{,}400^2 - 0{,}072 \times 0{,}384^2 - 0{,}008 \times 0{,}274^2) =$
0,000198 das statische Moment des halben Bogenquerschnittes mit Bezug auf die Biegungsachse,

$d = 0{,}440$ die Diagonale des Gitterwerkes in der Richtung der Bogenachse,

$d_1 = 0{,}345$ die andere Diagonale senkrecht auf diese Achse,

$S =$ die Schubkraft für einen beliebigen Querschnitt,

so kann man die Spannung per Quadratmeter in den Gitterstäben mit Hilfe der Formel

$$\frac{G S \sqrt{d^2 + d'^2}}{2 I \omega} = 2527 . S$$

berechnen und gibt dieselbe die in der Colonne 8 enthaltenen Resultate.

7. Thatsächlich zu wählende Dimensionen. — Da die Spannung der Zugstangen per Quadratmeter kleiner ist als 6,000 000 Kilogramm und da die Pressung der Bögen überall weniger als 8,000 000 Kilogramm per Quadratmeter beträgt, so folgt daraus, dass die für die Berechnung vorausgesetzten Dimensionen definitiv anzunehmen sind.

Die Spannungen in den Gitterstäben sind nicht als sehr klein anzunehmen, denn diese Stäbe bestehen aus Flacheisen, deren Breite im Verhältnisse zur Länge sehr gering ist.

8. Betrachtung des Falles, wo die Belastung nur auf einer Seite des Bogens stattfindet, und wobei man von dem permanenten Gewichte absieht. — Es betrage das auf den linken Bogen gleichförmig vertheilte Gewicht q Kilogramm per laufenden Meter, und es werde angenommen, dass der andere Bogen keine Belastung trägt, selbst nicht sein Eigengewicht. Die Gesammtbelastung des Bundgespärres beträgt sodann

$$(7{,}17 + 7{,}39) . q = 14{,}56 . q,$$

und die Reactionen der Auflagflächen sind:

$$\text{Rechts } R = 11{,}11 . q,$$
$$\text{Links } R' = 3{,}45 . q.$$

Wir nennen nun

$\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$, $\mathfrak{T}_3$, $\mathfrak{T}_4$ die Spannungen der Zugstangen für die linke Hälfte des Gespärres und

t_1, t_2, t_3, t_4 die Spannungen der symmetrischen Zugstangen der rechten Hälfte.

Es ist wohl zu beachten, dass $\mathfrak{T}_2$ und t_2 dieselbe Spannung darstellt, denn sie beziehen sich auf dieselbe Zugstange; aber der Symmetrie halber ist es angezeigt, wieder die beiden verschiedenen Buchstaben beizubehalten.

Analog der Tabelle in Nummer 3 ist es nun leicht, die nachfolgende zu bilden.

Querschnitte 1	Biegungsmomente 2	Normalpressungen 3	Schubkräfte 4
		I. Linker Bogen.	
0	$M_0 = 0{,}06 \,.\, \mathfrak{T}_1 \ldots\ldots\ldots - 1{,}67 \,.\, q$	$P_0 = 0{,}818 \,.\, \mathfrak{T}_1 \ldots\ldots\ldots + 7{,}27 \,.\, q$	$S_0 = 0{,}576 \,.\, \mathfrak{T}_1 \ldots\ldots\ldots - 7{,}86 \,.\, q$
1	$M_1 = 1{,}85 \,.\, \mathfrak{T}_1 \ldots\ldots\ldots - 26{,}98 \,.\, q$	$P_1 = 0{,}904 \,.\, \mathfrak{T}_1 \ldots\ldots\ldots + 4{,}34 \,.\, q$	$S_1 = 0{,}425 \,.\, \mathfrak{T}_1 \ldots\ldots\ldots - 6{,}16 \,.\, q$
2	$M_2 = 3{,}09 \,.\, \mathfrak{T}_1 \ldots\ldots\ldots - 44{,}63 \,.\, q$	$P_2 = 0{,}964 \,.\, \mathfrak{T}_1 \ldots\ldots\ldots + 1{,}67 \,.\, q$	$S_2 = \begin{cases} 0{,}262 \,.\, \mathfrak{T}_1 \ldots\ldots\ldots - 3{,}55 \,.\, q \\ 0{,}262 \,.\, \mathfrak{T}_1 + 1{,}000 \,.\, \mathfrak{T}_4 - 3{,}55 \,.\, q \end{cases}$
3	$M_3 = 3{,}72 \,.\, \mathfrak{T}_1 + 3{,}55 \,.\, \mathfrak{T}_4 - 51{,}63 \,.\, q$	$P_3 = 0{,}995 \,.\, \mathfrak{T}_1 + 0{,}174 \,.\, \mathfrak{T}_4 + 0{,}08 \,.\, q$	$S_3 = 0{,}094 \,.\, \mathfrak{T}_1 + 0{,}987 \,.\, \mathfrak{T}_4 - 0{,}30 \,.\, q$
4	$M_4 = 3{,}77 \,.\, \mathfrak{T}_1 + 7{,}00 \,.\, \mathfrak{T}_4 - 46{,}35 \,.\, q$	$P_4 = 0{,}998 \,.\, \mathfrak{T}_1 + 0{,}340 \,.\, \mathfrak{T}_4 - 0{,}33 \,.\, q$	$S_4 = -0{,}075 \,.\, \mathfrak{T}_1 + 0{,}942 \,.\, \mathfrak{T}_4 + 3{,}28 \,.\, q$
		II. Rechter Bogen.	
0	$M_0 = 0{,}06 \,.\, t_1 \ldots\ldots\ldots - 0{,}53 \,.\, q$	$P_0 = 0{,}818 \,.\, t_1 \ldots\ldots\ldots + 2{,}49 \,.\, q$	$S_0 = 0{,}576 \,.\, t_1 \ldots\ldots\ldots - 2{,}48 \,.\, q$
1	$M_1 = 1{,}85 \,.\, t_1 \ldots\ldots\ldots - 10{,}12 \,.\, q$	$P_1 = 0{,}904 \,.\, t_1 \ldots\ldots\ldots + 2{,}02 \,.\, q$	$S_1 = 0{,}425 \,.\, t_1 \ldots\ldots\ldots - 2{,}88 \,.\, q$
2	$M_2 = 3{,}09 \,.\, t_1 \ldots\ldots\ldots - 20{,}98 \,.\, q$	$P_2 = 0{,}964 \,.\, t_1 \ldots\ldots\ldots + 1{,}49 \,.\, q$	$S_2 = \begin{cases} 0{,}262 \,.\, t_1 \ldots\ldots\ldots - 3{,}18 \,.\, q \\ 0{,}262 \,.\, t_1 + 1{,}000 \,.\, t_4 - 3{,}18 \,.\, q \end{cases}$
3	$M_3 = 3{,}72 \,.\, t_1 + 3{,}55 \,.\, t_4 - 32{,}76 \,.\, q$	$P_3 = 0{,}995 \,.\, t_1 + 0{,}174 \,.\, t_4 + 0{,}94 \,.\, q$	$S_3 = 0{,}094 \,.\, t_1 + 0{,}987 \,.\, t_4 - 3{,}39 \,.\, q$
4	$M_4 = 3{,}77 \,.\, t_1 + 7{,}00 \,.\, t_4 - 45{,}06 \,.\, q$	$P_4 = 0{,}998 \,.\, t_1 + 0{,}340 \,.\, t_4 + 0{,}35 \,.\, q$	$S_4 = -0{,}075 \,.\, t_1 + 0{,}942 \,.\, t_4 - 3{,}50 \,.\, q$

Die Deformationsarbeit des ganzen Gespärres — dividirt durch den Factor $\frac{3,58}{2EI}$ — wird ausgedrückt durch die Formel

$$\frac{M^2_0+4M^2_1+2M^2_2+4M^2_3+M^2_4}{3}+\frac{I}{\Omega}\,\frac{P^2_0+4P^2_1+2P^2_2+4P^2_3+P^2_4}{3}$$
$$+\frac{I}{3,58}\left(\frac{7,37\,.\,\mathfrak{S}^2_1}{\omega_1}+\frac{5,66\,.\,\mathfrak{S}^2_2}{\omega_2}+\frac{7,42\,.\,\mathfrak{S}^2_3}{\omega_3}+\frac{3,22\,.\,\mathfrak{S}^2_4}{\omega_4}\right)$$
$$\frac{M'^2_0+4M'^2_1+2M'^2_2+4M'^2_3+M'^2_4}{3}+\frac{I}{\Omega}\,\frac{P'^2_0+4P'^2_1+2P'^2_2+4P'^2_3+P'^2_4}{3}$$
$$+\frac{I}{3,58}\left(\frac{7,37\,.\,t^2_1}{\omega_1}+\frac{5,66\,.\,t^2_2}{\omega_2}+\frac{7,42\,.\,t^2_3}{\omega_3}+\frac{3,22\,.\,t^2_4}{\omega_4}\right).$$

Substituirt man in dieser Formel für die Momente M, M' und für die Pressungen P, P' deren Ausdrücke in Functionen von $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_4$, t_1, t_4, sowie für die Spannungen $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_3$, t_2, t_3 deren Werthe, wie sie durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{S}_2 &= 0,784\,.\,\mathfrak{S}_1+1,498\,.\,\mathfrak{S}_4,\\ \mathfrak{S}_3 &= 0,264\,.\,\mathfrak{S}_1-1,405\,.\,\mathfrak{S}_4,\end{aligned}\right\}\qquad(5)$$

$$\left.\begin{aligned}t_2 &= 0,784\,.\,t_1+1,498\,.\,t_4,\\ t_3 &= 0,264\,.\,t_1-1,405\,.\,t_4,\end{aligned}\right\}\qquad(6)$$

gegeben werden, so erhält man die folgende Formel:

$$\left.\begin{aligned}&34,43\,.\,(\mathfrak{S}^2_1+t^2_1)+26,33\,.\,(2\,\mathfrak{S}_1\,\mathfrak{S}_4+2\,t_1\,t_4)+34,49\,.\,(\mathfrak{S}^2_4+t^2_4)\\ &-(472,59\,.\,q\,.\,2\mathfrak{S}_1+287,11\,.\,q\,.\,2t_1)-(352,56\,.\,q\,.\,2\mathfrak{S}_4+260,16\,.\,q\,.\,2t_4).\end{aligned}\right\}\qquad(7)$$

Da $\mathfrak{S}_2$ und t_2 dieselbe Spannung darstellen, so ergeben die Gleichungen (5) und (6)

$$0,784\,.\,\mathfrak{S}_1+1,498\,.\,\mathfrak{S}_4=0,784\,.\,t_1+1,498\,.\,t_4,$$

und folglich

$$\mathfrak{S}_4-t_4=-0,523\,(\mathfrak{S}_1-t_1).\qquad(8)$$

Auf Grund dieser Beziehung zwischen den vier Unbekannten $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_4$, t_1, t_4, könnte man eine derselben aus der Formel (7) eliminiren und sodann die Differentialquotienten des sich ergebenden Ausdruckes mit Bezug auf die drei anderen gleich Null setzen. Aber man kann einen einfacheren Weg einschlagen, indem man wieder die Unbekannten ändert, und zwar indem man

$$\mathfrak{T}_1 + t_1 = \tau_1, \qquad \mathfrak{T}_4 + t_4 = \tau_4,$$
$$\mathfrak{T}_1 - t_1 = \theta_1, \qquad \mathfrak{T}_4 - t_4 = \theta_4$$

setzt, womit

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{T}_1 &= \frac{\tau_1 + \theta_1}{2}, & \mathfrak{T}_4 &= \frac{\tau_4 + \theta_4}{2}, \\ t_1 &= \frac{\tau_1 - \theta_1}{2}, & t_4 &= \frac{\tau_4 - \theta_4}{2}. \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Substituirt man diese Werthe von $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_4$, t_1, t_4 in die Formeln (7) und (8), so erhält man

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{2}(34{,}43 . \tau^2_1 + 26{,}33 . 2\tau_1\tau_4 + 34{,}49 . \tau^2_4 - 759{,}70 . q . 2\tau_1 - 612{,}72 . q . 2\tau_4) \\ +&\frac{1}{2}(34{,}43 . \theta^2_1 + 26{,}33 . 2\theta_1\theta_4 + 34{,}49 . \theta^2_4 - 185{,}48 . q . 2\theta_1 - 92{,}40 . q . 2\theta_4), \end{aligned}\right\} (10)$$

$$\theta_4 = -0{,}523 . \theta_1. \qquad (11)$$

Man muss nun aus der Formel (10) θ_4 eliminiren und sodann die Differentialquotienten des sich ergebenden Ausdruckes mit Bezug auf τ_1, τ_4, θ_1 gleich Null setzen. Hiebei erkennt man leicht, dass jener Theil des Ausdruckes (10), welcher τ_1 und τ_4 enthält, genau mit der in Nummer 4 erhaltenen Endformel für die Deformationsarbeit übereinstimmt, sobald man darin $p = p_1 = q$ macht; folglich erhält man die Werthe von τ_1 und τ_4 sogleich aus den Gleichungen (4), indem man darin $p = p_1 = q$ setzt; es ist daher

$$\tau_1 = 20{,}372 . q,$$
$$\tau_4 = 2{,}212 . q.$$

Der zweite Theil des Ausdruckes, d. h. jener, welcher θ_1 und θ_4 enthält, ergibt nach Elimination von θ_4

$$\frac{1}{2}(16{,}32 . \theta^2_1 - 137{,}15 . q . 2\theta_1);$$

der Differentialquotient dieses Ausdruckes nach θ_1 gleich Null gesetzt und mit 2 multiplicirt, gibt

$$16{,}32 . \theta_1 - 137{,}15 . q = 0;$$

hieraus folgt

$$\theta_1 = 8{,}402 . q,$$

und auf Grund der Gleichung (11)

$$\theta_4 = -4{,}394 . q.$$

Nachdem nun die Werthe von τ_1, τ_4, θ_1, θ_4 bekannt sind, geben die Gleichungen (9) folgende Resultate:

$$\mathfrak{T}_1 = 14{,}387 \,.\, q, \qquad t_1 = 5{,}985 \,.\, q,$$
$$\mathfrak{T}_4 = -1{,}087 \,.\, q, \qquad t_4 = 3{,}306 \,.\, q.$$

Setzt man in diese Ausdrücke $q = 225$ und die erhaltenen Resultate sodann in die auf Seite 386 gegebene Tabelle, so erhält man folgende Resultate:

$$\mathfrak{T}_1 = 3237, \qquad t_1 = 1347,$$
$$\mathfrak{T}_2 = t_2 = 2171,$$
$$\mathfrak{T}_3 = 1199, \qquad t_3 = -690,$$
$$\mathfrak{T}_4 = -245, \qquad t_4 = 744.$$

Linkes Halbgespärre				Rechtes Halbgespärre			
Querschnitte	Biegungsmomente	Normalpressungen	Schubkräfte	Querschnitte	Biegungsmomente	Normalpressungen	Schubkräfte
1	2	3	4	1	2	3	4
0	— 182	4284	+ 96	0	— 38	1662	+ 218
1	— 82	3903	— 10	1	+ 221	1672	— 76
2	— 39	3496	{+ 49 — 196	2	— 558	1634	{— 363 + 381
3	— 445	3196	— 5	3	+ 244	1681	+ 98
4	+ 60	3073	+ 264	4	+ 148	1676	— 188

9. Betrachtung des Falles, wobei man das permanente Gewicht berücksichtigt und eine nur linksseitige Belastung annimmt. — Dieser Fall lässt sich aus den beiden vorhergehenden durch einfache Addition und Subtraction ableiten, indem man hiefür das Princip der Summirung der Wirkungen anwendet.

Man erhält also auf leichte Art die nachfolgenden Resultate:

Spannungen in den Zugstangen:

Links	Rechts
$T_1 - t_1 = 7032$	$T_1 - \mathfrak{T}_1 = 5142$
$T_2 - t_2 = 5887$	$T_2 - \mathfrak{T}_2 = 5887$

$$T_3 - t_3 = 1505 \qquad T_3 - \mathfrak{T}_3 = -384^{*)}$$
$$T_4 - t_4 = 250 \qquad T_4 - \mathfrak{T}_4 = 1239$$

Linkes Halbgespärre					Rechtes Halbgespärre				
Querschnitte	Biegungsmomente	Normalpressungen	Schubkräfte	Mittellinie des Druckes	Querschnitte	Biegungsmomente	Normalpressungen	Schubkräfte	Mittellinie des Druckes
1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
0	— 348	9386	+ 432	— 0,037	0	— 204	6764	+ 554	— 0,030
1	+ 169	8523	— 87	+ 0,020	1	+ 472	6292	— 153	+ 0,075
2	— 594	7796	— 322 / — 72	— 0,076	2	—1113	5934	— 734 / + 505	— 0,187
3	— 626	7266	+ 91	— 0,086	3	+ 63	5751	+ 194	+ 0,010
4	+ 314	7033	+ 402	+ 0,045	4	+ 402	5636	— 50	+ 0,071

Der Vergleich dieser Resultate mit jenen, welche in Nummer 5 und 6 erhalten wurden, zeigt, dass das grösste Biegungsmoment und die grösste Normalpressung im Falle der Belastung auf beiden Halbgespärren stattfinden.

Andererseits tritt die grösste Schubkraft in dem Querschnitte 3 jener Hälfte auf, welche keine Belastung trägt, wenn die andere Hälfte belastet ist. Die grösste Beanspruchung der Gitterstäbe in diesem letzten Falle ist dann

$$2527 \times 734 = 1{,}854{,}818,$$

d. h. kleiner als 2,000,000 Kilogramm per Quadratmeter.

10. Einfluss der Aenderungen der Temperatur. — In diesem Falle gilt dasselbe, was für das Bundgespärre System Polonceau mit geraden Hauptsparren gesagt wurde.

*) Man beachte, dass die Spannung $T_3 - \mathfrak{T}_3$ der rechten Zugstange, deren eines Ende mit dem Scheitel des Bundgespärres zusammenfällt, negativ wird. Indessen ist, da dieselbe sehr klein ist, kein Grund vorhanden, um die Disposition des Systems zu ändern, denn der Fall einer Maximalbelastung des linken Halbgespärres, während das rechte entlastet ist, tritt niemals ein. Andererseits ist es auf Grund des Principes von der Summirung der Wirkungen leicht, sich zu überzeugen, dass eine kleine Belastung des rechten Halbgespärres genügt, um die Spannung in der betrachteten Zugstange positiv zu machen.

8. Capitel.

Betrachtung einer Halle aus schmiedeisernen Bundgespärren mit mehreren Zugstangen.

(Tafel VI.)

1. Allgemeine Angaben.

Lichte Weite zwischen den Pfeilern	$26^m,70$
Tiefe des Einlassens der Gespärre in die Mauer	$0^m,40$
Länge der Auflagflächen	$0^m,40$
Pfeilhöhe der inneren Wölbung	$7^m,20$
Entfernung der einzelnen Bundgespärre	$8^m,00$
Entfernung der Fetten, in der Bogenachse gemessen	$1^m,50$

Die beiden Bögen und die Fetten sind aus Schmiedeisen; die letzteren bestehen aus zwei T-Eisen, deren unteres kreisförmig gebogen, deren oberes gerade ist und welche mit einander durch ein einfaches Gitterwerk verbunden sind.

Von den Pfeilern bis zu einer gewissen Höhe besteht die Bedachung aus Wellblech, in der oberen Partie aus Glas.

2. Belastungen. — Da die Bedachung aus Wellblech ohne Holzverschalung leichter ist als jene der Oberlichte, so muss man diese Differenz in Berücksichtigung ziehen, indem man voraussetzt, dass erstere sich über die untere Hälfte jedes Halbgespärres und letztere über die obere Hälfte der beiden Bögen erstreckt. Auf diese Weise legt man der Berechnung ungünstigere Bedingungen zu Grunde, als thatsächlich vorhanden sind, denn die Oberlichte erstreckt sich nicht über die ganze obere Hälfte der beiden Bögen.

Gewicht per Quadratmeter Bedachung in der unteren Hälfte jedes Halbgespärres.

Gewicht von $0^m,60$ hohem Schnee	60 Kilogr.
Wellblech .	11 „
Fetten .	12 „
Summe zur Berechnung der Fetten . . .	83,00 Kilogr.
Eigengewicht der Gespärre	10,50 „
Windstreben	1,50 „
Summe zur Berechnung der Gespärre . . .	95,00 Kilogr.

Gewicht per Quadratmeter Bedachung in der oberen Hälfte jedes Halbgespärres:

Schneedruck	60,00 Kilogr.
Glas von 6 Millimeter Dicke	15,60 „
Sprosseneisen und deren Träger	8,40 „
Fetten .	12,00 „
Summe zur Berechnung der Fetten . . .	96,00 Kilogr.
Eigengewicht der Gespärre	10,50 „
Windstreben	1,50 „
Summe zur Berechnung der Gespärre . .	108,00 Kilogr.

Last per Längenmeter der Bögen:

1. Für die untere Hälfte jedes Halbgespärres:

Permanentes Gewicht	$(95 - 60) \times 8,00 =$	280 Kilogr.
Zufällige Belastung	$60 \times 8,00 =$	480 „
	Summe . . .	760 Kilogr.

2. Für die obere Hälfte jedes Halbgespärres:

Permanentes Gewicht	$(108 - 60) \times 8,00 =$	384 Kilogr.
Zufällige Belastung	$60 \times 8,00 =$	480 „
	Summe . . .	864 Kilogr.

Da sich diese Gewichte aus der Belastung, welche sich oberhalb der äusseren Wölbung der Bögen befindet, und aus dem permanenten Gewichte zusammensetzen, von welchem ein Theil beinahe mit der

äusseren Wölbung correspondirt, während der andere sich innerhalb derselben befindet, kann man annehmen, dass die Schwerpunkte der von den Bogenstücken 0, 1; 1, 2; 2, 3; 3, 4 getragenen Gewichte mit den Mittelpunkten der äusseren Wölbungen dieser Bogenstücke selbst zusammenfallen.

3. Benennungen und allgemeine Formeln. — Wir nennen T_1, T_2, T_3, T_4 die Spannungen in den Zugstangen und theilen die Gitterbögen zwischen den Versteifungsblechen am Fusse und am Scheitel in je vier gleiche Theile. Durch diese Theilungspunkte, deren einer in die Richtung der Zugstange T_4 fällt, denken wir uns Querschnitte senkrecht auf die Bogenachse gezogen.

Es wird also jener Theil jedes Bogens, welcher aus einem Gitterwerk besteht, in vier Theile getheilt, welche in der Achse gemessen eine Länge von $3^m,71$, an der äusseren Wölbung gemessen eine solche von $3^m,76$ haben.

Die Reaction der Widerlager beträgt

$$R = 3{,}76 \times 2 \times 760 + (3{,}76 \times 2 + 0{,}28) \times 864 = 12454{,}40.$$

Für jeden der Querschnitte 0, 1, 2, 3, 4 kann man das Biegungsmoment, die Normalpressung und die Schubkraft berechnen; für den Querschnitt 1 erhält man z. B. folgende Formeln:

$$M_1 = 1{,}98 \,.\, T_1 - 3{,}03 \,.\, R + 3{,}76 \times 760 \times 1{,}68,$$
$$P_1 = 0{,}905 \,.\, T_1 + 0{,}578\,(R - 3{,}76 \times 760),$$
$$S_1 = 0{,}424 \,.\, T_1 - 0{,}815\,(R - 3{,}76 \times 760),$$

worin 0,578 und 0,815 die Werthe des Sinus und des Cosinus des Winkels sind, welchen der Querschnitt 1 mit der Verticalen einschliesst (Tafel VI, Fig. 2), und 0,905 und 0,424 die Werthe des Sinus und Cosinus des Winkels, welchen derselbe Querschnitt mit der Richtung der Zugstange T_1 bildet (Fig. 3).

Für die anderen Querschnitte erhält man ähnliche Formeln, nur muss man für die Querschnitte 2, 3 und 4 auch die Spannung der Zugstange T_4 in Rechnung nehmen. Nach Entwicklung dieser Formeln in Zahlen lässt sich folgende Tabelle zusammenstellen, worin nur die Unbekannten T_1 und T_4 erscheinen.

Quer-schnitte 1	Biegungsmomente 2	Normalpressungen 3	Schubkräfte 4
0	$M_0 = 0{,}13 \,.\, T_1 - 2488$	$P_0 = 0{,}824 \,.\, T_1 + 8780$	$S_0 = 0{,}570 \,.\, T_1 - 8892$
1	$M_1 = 1{,}98 \,.\, T_1 - 32936$	$P_1 = 0{,}905 \,.\, T_1 + 5547$	$S_1 = 0{,}424 \,.\, T_1 - 7821$ $S_2 = 0{,}266 \,.\, T_1 - 6065$
2	$M_2 = 3{,}27 \,.\, T_1 - 58064$	$P_2 = 0{,}965 \,.\, T_1 + 2932$	$S_2 = \begin{cases} 0{,}266 \,.\, T_1 + \\ 1{,}000 \,.\, T_4 - 6065 \end{cases}$
3	$M_3 = \begin{cases} 3{,}98 \,.\, T_1 + \\ 3{,}68 \,.\, T_4 - 75440 \end{cases}$	$P_3 = \begin{cases} 0{,}995 \,.\, T_1 + \\ 0{,}165 \,.\, T_4 + 970 \end{cases}$	$S_3 = \begin{cases} 0{,}100 \,.\, T_1 + \\ 0{,}990 \,.\, T_4 - 3352 \end{cases}$
4	$M_4 = \begin{cases} 4{,}07 \,.\, T_1 + \\ 7{,}26 \,.\, T_4 - 82000 \end{cases}$	$P_4 = \begin{cases} 0{,}997 \,.\, T_1 + \\ 0{,}326 \,.\, T_4 + 28 \end{cases}$	$S_4 = \begin{cases} -0{,}060 \,.\, T_1 + \\ 0{,}950 \,.\, T_4 - 240 \end{cases}$

4. Berechnung der Spannungen T_1 und T_4. — Wenn man die Deformationsarbeit, welche der Verschiebung entspricht, und welche auf die Resultate der vorliegenden Berechnung einen unbedeutenden Einfluss hat, vernachlässigt; wenn man

Ω und I die Fläche und das Biegungsmoment des Bogenquerschnittes,

ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 die Querschnittsflächen und $l_1 = 7{,}80$, $l_2 = 2 \times 5{,}85$, $l_3 = 7{,}80$, $l_4 = 3{,}10$ die Längen der Zugstangen nennt;

wenn man ferner beachtet, dass die Länge der Stücke 0, 1; 1, 2; 2, 3; 3, 4 auf die Bogenachse bezogen, 3,68 beträgt, und wenn man der Kürze halber

$$\sum M^2 = \frac{M^2_0 + 4\,M^2_1 + 2\,M^2_2 + 4\,M^2_3 + M^2_4}{3},$$

$$\sum P^2 = \frac{P^2_0 + 4\,P^2_1 + 2\,P^2_2 + 4\,P^2_3 + P^2_4}{3},$$

$$\sum \frac{l\,T^2}{\omega} = \frac{7{,}80 \,.\, T^2_1}{\omega_1} + \frac{5{,}85 \,.\, T^2_2}{\omega_2} + \frac{7{,}80 \,.\, T^2_3}{\omega_3} + \frac{3{,}10 \,.\, T^2_4}{\omega_4}$$

macht, so ergibt sich als Ausdruck für die Deformationsarbeit des ganzen Systems die Formel

$$2\left[\frac{3{,}68}{2\,E\,I}\sum M^2 + \frac{3{,}68}{2\,E\,\Omega}\sum P^2 + \frac{1}{2\,E}\sum \frac{l\,T^2}{\omega}\right],$$

welche, durch den Factor $2 \times \frac{3,68}{2EI}$ dividirt — was jene Gleichungen nicht beeinträchtigt, welche man daraus ableitet, indem man deren Differentialquotienten nach T_1 und T_4 gleich Null setzt — folgende Formel ergibt:

$$\sum M^2 + \frac{I}{\Omega} \sum P^2 + \frac{I}{3,68} \sum \frac{l\,T^2}{\omega}. \qquad (1)$$

Nimmt man als Querschnitt des Bogens jene Fläche, welche durch die Figur 6 (Tafel VI) dargestellt wird, und als Durchmesser der Zugstangen, in Millimetern ausgedrückt,

$$d_1 = 60, \qquad d_2 = 56, \qquad d_3 = 25, \qquad d_4 = 22,$$

so erhält man

$$\Omega = 0,130 \times 0,600 - 0,1205 \times 0,579 - 0,0095 \times 0,456 = 0,003898,$$

$$I = \frac{1}{12}(0,130 \times 0,600^3 - 0,1205 \times 0,579^3 - 0,0095 \times 0,456^3) = 0,000315;$$

$$\omega_1 = 0,002827,$$
$$\omega_2 = 0,002463,$$
$$\omega_3 = 0,000491,$$
$$\omega_4 = 0,000380,$$

und folglich

$$\frac{I}{\Omega} = 0,0811,$$

$$\frac{I}{\omega_1} = 0,1114, \qquad \frac{I}{\omega_2} = 0,1279, \qquad \frac{I}{\omega_3} = 0,6415, \qquad \frac{I}{\omega_4} = 0,8289,$$

$$\frac{I}{3,68} \sum \frac{l\,T^2}{\omega} = 0,2361 \,.\, T^2_1 + 0,2033 \,.\, T^2_2 + 1,3597 \,.\, T^2_3 + 0,6982 \,.\, T^2_4. \quad (2)$$

Andererseits ergeben sich aus der in Figur 5 dargestellten Construction für das Gleichgewicht der vier Spannungen T_1, T_2, T_3, T_4 in dem gemeinschaftlichen Angriffspunkte folgende Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} T_2 &= 0,786 \,.\, T_1 + 1,466 \,.\, T_4, \\ T_3 &= 0,264 \,.\, T_1 - 1,368 \,.\, T_4, \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

so dass man T_2 und T_3 aus der Formel (2) eliminiren kann, und hiedurch folgende Formel erhält:

$$\frac{I}{3,68} \sum \frac{l\,T^2}{\omega} = 0,46 \,.\, T^2_1 - 0,26 \,.\, 2\, T_1\, T_4 + 3,68 \,.\, T^2_4.$$

Substituirt man nun in $\sum M^2$ und $\sum P^2$ für M_0, M_1 etc., P_0, P_1 etc. deren Ausdrücke in Functionen von T_1 und T_4, wie sie in der Tabelle in Nummer 3 angeführt wurden, so erhält man

$$\sum M^2 = 39{,}00 \,.\, T^2_1 + 29{,}37 \,.\, 2\, T_1\, T_4 + 35{,}62 \,.\, T^2_4$$
$$- 725216 \,.\, 2\, T_1 - 568592 \,.\, 2\, T_4,$$

$$\frac{I}{\Omega} \sum P^2 = 0{,}29 \,.\, T^2_1 + 0{,}03 \,.\, 2\, T_1\, T_4 + 0{,}01 \,.\, T^2_4$$
$$+ 1009 \,.\, 2\, T_1 + 13 \,.\, 2\, T_4;$$

aus Formel (1) wird somit

$$39{,}75 \,.\, T^2_1 + 29{,}14 \,.\, 2\, T_1\, T_4 + 39{,}31 \,.\, T^2_4 - 724207 \,.\, 2\, T_1 - 568579 \,.\, 2\, T_4.$$

Indem man die Differentialquotienten dieser Formel nach T_1 und T_4 gleich Null setzt, erhält man die zwei Gleichungen

$$39{,}75 \,.\, T_1 + 29{,}14 \,.\, T_4 = 724207,$$
$$29{,}14 \,.\, T_1 + 39{,}31 \,.\, T_4 = 568579,$$

woraus

$$T_1 = 16689{,}68,$$
$$T_4 = 2093{,}04.$$

5. Grösste Spannung in den Zugstangen. — Substituirt man die Werthe von T_1 und T_4 in die Formeln (3), so erhält man die Werthe der Spannungen T_2 und T_3, d. h.

$$T_2 = 16186{,}48,$$
$$T_3 = 1542{,}80.$$

Wenn man nun die Werthe für die Spannungen jeder Zugstange durch die betreffende Querschnittsfläche dividirt, erhält man die Spannungen in den einzelnen Zugstangen, wie folgt:

für die Zugstange T_1 . . . $\dfrac{16689{,}68}{0{,}002827} = 5\,903\,000;$

für die Zugstange T_2 . . . $\dfrac{16186{,}48}{0{,}002463} = 6\,776\,000;$

für die Zugstange T_3 . . . $\dfrac{1542{,}80}{0{,}000491} = 3\,142\,000;$

für die Zugstange T_4 . . . $\dfrac{2093{,}04}{0{,}000380} = 5\,508\,000.$

6. Mittellinie des Druckes und grösste Beanspruchung der Bögen per Quadratmeter. — Wenn man in der Tabelle in Nummer 3 für T_1 und T_4 die in Nummer 4 gefundenen Werthe einsetzt, so erhält man für die Biegungsmomente, die Normalpressungen und die Schubkräfte in den Bögen die in den Colonnen 2, 3, 4 der nächsten Tabelle angeführten Werthe.

Durch Division jedes Biegungsmomentes durch die correspondirende Normalpressung erhält man die Zahlen der Colonne 5, welche die Entfernungen der Druckmittelpunkte von den Querschnittsmittelpunkten geben.

Mit Hilfe der Formel
$$\frac{P}{\Omega} \pm \frac{M v}{I},$$
in welcher P und M die Normalpressung und das Biegungsmoment eines Querschnittes und Ω, I, v die Fläche, das Trägheitsmoment und die halbe Höhe dieses Querschnittes darstellen, erhält man die in Colonne 6 und 7 angeführten Zahlen, welche die Pressung per Quadratmeter an der inneren und äusseren Wölbung der Querschnitte 0, 1, 2, 3, 4 ausdrücken.

Beachtet man schliesslich, dass die Gitterstäbe aus Flacheisen vom Querschnitt
$$\omega = 0{,}050 \times 0{,}006 = 0{,}000300$$
bestehen, und dass dieselben Rhomben bilden, deren Diagonalen
$$d = 0{,}660 \quad \text{und} \quad d' = 0{,}530$$
sind, und berechnet man für den Bogenquerschnitt die Grösse
$$G = \frac{1}{8}(0{,}130 \times 0{,}60^2 - 0{,}1205 \times 0{,}579^2 - 0{,}0095 \times 0{,}456^2) = 0{,}000803,$$
so erhält man, da das Trägheitsmoment dieses Querschnittes
$$I = 0{,}000315$$
ist, für einen beliebigen Punkt der Bögen die Pressung oder Spannung in den Gitterstäben per Quadratmeter mit Hilfe der Formel
$$\frac{G\,S\sqrt{d^2 + d'^2}}{2\,I\omega} = 3494{,}66\,.\,S,$$
worin S die Schubkraft in dem betrachteten Querschnitte bezeichnet.

Alle Resultate dieser Berechnung sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst.

Querschnitte	Biegungsmomente	Normalpressungen	Schubkräfte	Mittellinie des Druckes*)	Pressung per Quadratmeter		Spannung der Gitterstäbe per Quadratmeter
					an der inneren Wölbung	an der äusseren Wölbung	
1	2	3	4	5	6	7	8
0	— 318	22532	+ 621	— 0,014	5 477 600	6 083 200	2 170 180
1	+ 110	26651	— 745	+ 0,004	6 905 500	6 696 500	2 603 480
2	— 3489	19038	{—1626 {+ 476	— 0,183	1 696 000	8 072 000	{4 280 400 {1 663 470
3	— 1313	17922	+ 390	— 0,073	3 345 600	5 850 000	1 362 900
4	+ 1122	17350	+ 747	+ 0,065	5 521 700	3 384 500	2 610 460

Man sieht also, dass die grösste Pressung des Eisens in dem Querschnitte 2 stattfindet, und dass dieselbe 8 072 000 Kilogramm per Quadratmeter beträgt.

Die grösste Pressung oder Spannung der Gitterstäbe findet auch im Querschnitte 2 statt und ist deren Werth 4 280 000 Kilogramm per Quadratmeter.

Man kann also den Schluss ziehen, dass das Gespärre sowohl in ökonomischer Beziehung, als auch in Bezug auf dessen Festigkeit vollkommen entsprechend construirt ist.**)

*) Die Mittellinie des Druckes wird durch Figur 7 auf Tafel VI dargestellt.

**) Es wurde nicht für nothwendig befunden, auch in dieser Betrachtung den Fall zu untersuchen, wo sich die Belastung nur auf einem Halbbogen befindet, denn es folgt aus der früheren Betrachtung eines Gespärres derselben Type, dass im Allgemeinen in diesen elastischen Systemen die grössten Beanspruchungen im Falle der completen Belastung grösser sind als jene, welche auftreten, wenn die Belastung nur auf einer Seite stattfindet, mit Ausnahme der Gitterstäbe, für welche die Beanspruchungen im letzteren Falle grösser sein können; jedoch zeigen dieselben so kleine Differenzen, dass man dieselben ausser Berücksichtigung lassen kann.

Bezüglich der Aenderungen der Temperatur wurde schon in dem vorhergehenden Capitel erwähnt, dass dieselben auf diese Systeme keinen Einfluss haben, sobald diese Aenderungen für alle Theile gleich sind.

9. Capitel.

Betrachtung einer Halle aus schmiedeisernen Bundgespärren mit mehreren Zugstangen.

(Tafel VII.)

1. Allgemeine Angaben (Fig. 1). — Die Bundgespärre stützen sich einerseits auf die Mauer, andererseits auf gusseiserne Säulen.

Entfernung von der Mauer bis zur Mitte der Säulen	30^{m},00
Pfeilhöhe der inneren Wölbung	5^{m},50
Halbmesser derselben	23^{m},068
Halbmesser jenes Kreises, welcher das Polygon der Zugstangen umschreibt	70^{m},645
Entfernung der einzelnen Bundgespärre	3^{m},800
Entfernung der Fetten, in der Bogenachse gemessen, ...	1^{m},356.

2. Belastungen. — Die Bedachung der Halle besteht aus verzinktem Wellblech von 1^{mm},25 Dicke, welches direct auf die Fetten befestigt ist; hievon ist jener Theil am Scheitel auszunehmen, welcher die Oberlichte bildet.

Das Gewicht per Quadratmeter ist wohl für die Bedachung der Oberlichte etwas grösser als jenes der Bedachung durch Wellblech; man kann dasselbe aber als gleich betrachten, indem man überall eine etwas grössere Belastung wählt, als streng genommen angenommen werden müsste.

Das Gesammtgewicht der Bedachung per Quadratmeter ergibt sich aus folgender Zusammenstellung:

Schnee- und Winddruck	70 Kilogr.
Wellblech von 1^{mm},25 Dicke	14 „
Fetten .	18 „
Summe zur Berechnung der Fetten . . .	102 Kilogr.
Gewicht der Gespärre, auf einen Quadratmeter der Bedachung bezogen, ...	16 „
Windstreben	1 „
Summe zur Berechnung der Gespärre . .	119 Kilogr.

Da die Entfernung zwischen den Gespärren 3^{m},80 beträgt, so ist die Last per laufendem Meter

$$119 \times 3{,}80 = 452{,}20 \text{ Kilogr.}$$

3. Berechnung der Bundgespärre, wenn eine Belastung sowohl der linken, als auch der rechten Seite stattfindet. — Benennungen und allgemeine Formeln. — Der Halbbogen 0, 6 (Fig. 2) wird durch die Querschnitte 1, 2, 3, 4, 5 in sechs gleiche Theile getheilt, welche, in der Achse gemessen, eine Länge von 2^{m},713 haben. Jeder Theil trägt eine Last von

$$452{,}20 \times 2{,}713 = 1226{,}82 \text{ Kilogr.},$$

deren Schwerpunkt als im Mittelpunkte des Bogens befindlich gedacht werden kann, wie dies auch aus dem Aufrisse zu ersehen ist.

Die verticale Reaction jedes Auflagers ist gleich der Hälfte des von dem Bundgespärre getragenen Gewichtes, so dass dessen Werth

$$1226{,}82 \times 6 = 7360{,}92 \text{ Kilogr. beträgt.}$$

Wir nennen nun $T_1, T_2, T_3, \ldots T_9$ die Spannungen der Zugstangen, wie dies in Figur 2 angedeutet ist.

Da die Reaction der Auflagflächen und das Gewicht, durch welches das Bundgespärre belastet wird, bekannt sind, kann man das Biegungsmoment, die Normalpressung und die Schubkraft für jeden der Querschnitte 0, 1, 2, . . . 6 in Functionen dieser unbekannten Spannungen ausdrücken. Die Figur 2 (Tafel VII) gibt die Hebelarme der Reaction der Auflager, der Gewichte und der Spannungen der Zugstangen in Bezug auf die Mittelpunkte dieser Querschnitte; Figur 3 gibt den Sinus und den Cosinus des Winkels, welchen die Verticale, d. h. die Richtung

der Reactionen und der Gewichte mit den betrachteten Querschnitten einschliesst; Figur 4 gibt den Sinus und Cosinus der Winkel, welche die zwei Zugstangen T_2 und T_5 mit den Querschnitten 0, 1, 2 bilden; Figur 5 gibt den Sinus und Cosinus der Winkel, welche die zwei Zugstangen T_3 und T_7 mit den Querschnitten 2, 3, 4 bilden; endlich gibt Figur 6 den Sinus und Cosinus der Winkel, welche die zwei Zugstangen T_4 und T_9 mit den Querschnitten 4, 5, 6 bilden.

Mit allen diesen Elementen kann man ohne Schwierigkeit die auf Seite 402 befindliche Tabelle zusammenstellen.

In dieser Tabelle ist zu beachten, dass man für jeden der Querschnitte 2 und 4, für die Normalpressung und für die Schubkraft je zwei Werthe erhält. Dies rührt daher, dass, wenn auch die Normalpressung und die Schubkraft in den Bogenstücken 0, 2; 2, 4; 4, 6 continuirliche Functionen sind, bei dem Uebergange von einem Stücke zum anderen eine plötzliche Aenderung stattfindet, und zwar in Folge der in den Punkten 2, 4, 6 einlaufenden Zugstangen. Dieselbe Ursache ändert die Biegungsmomente aber nicht plötzlich, denn die mit dem Bogen verbundenen Zugstangen kommen in den Mittelpunkten der Querschnitte 2, 4, 6 zusammen, so dass z. B. die zwei Spannungen T_5 und T_6 bezüglich des Querschnittes 2 kein Moment geben.

Die drei in dem Punkte B (Fig. 2) wirkenden Spannungen müssen sich das Gleichgewicht halten, desgleichen die im Punkte C wirkenden vier Spannungen, sowie die anderen im Punkte D zusammenkommenden Spannungen. Die in den Figuren 7, 8, 9 dargestellten graphischen Constructionen dienen dazu, T_1 und T_5 in Functionen von T_2, T_6 und T_7 in Functionen von T_2 und T_3, und schliesslich T_8 und T_9 in Functionen von T_3 und T_4 auszudrücken; man erhält also folgende Formeln:

$$\left.\begin{aligned} T_1 &= 1{,}072 \,.\, T_2, \\ T_5 &= 0{,}090 \,.\, T_2, \\ T_6 &= -0{,}780 \,.\, T_2 + 0{,}825 \,.\, T_3, \\ T_7 &= 0{,}635 \,.\, T_2 - 0{,}575 \,.\, T_3, \\ T_8 &= -0{,}835 \,.\, T_3 + 0{,}880 \,.\, T_4, \\ T_9 &= 0{,}834 \,.\, T_3 - 0{,}785 \,.\, T_4. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Querschnitte 1	Biegungsmomente 2	Normalpressungen 3	Schubkräfte 4
0	$M_0 = \ldots\ldots - 736$	$P_0 = 0{,}848 \,.\, T_2 + 0{,}982 \,.\, T_5 + 4748$	$S_0 = -0{,}530 \,.\, T_2 + 0{,}180 \,.\, T_5 + 5638$
1	$M_1 = 1{,}15 \,.\, T_2 + 0{,}95 \,.\, T_5 - 15\,372$	$P_1 = 0{,}904 \,.\, T_2 + 0{,}955 \,.\, T_5 + 3386$	$S_1 = -0{,}430 \,.\, T_2 + 0{,}295 \,.\, T_5 + 5134$
2	$M_2 = 2{,}17 \,.\, T_2 \ldots\ldots - 28\,168$	$P_2 = 0{,}914 \,.\, T_2 + 0{,}950 \,.\, T_5 + 2208$ $P_{2'} = 0{,}922 \,.\, T_3 + 0{,}842 \,.\, T_7 + 2208$	$S_2 = -0{,}320 \,.\, T_2 + 0{,}402 \,.\, T_5 + 4407$ $S_{2'} = -0{,}385 \,.\, T_3 + 0{,}540 \,.\, T_7 + 4407$
3	$M_3 = 2{,}88 \,.\, T_3 + 1{,}84 \,.\, T_7 - 38\,804$	$P_3 = 0{,}960 \,.\, T_3 + 0{,}770 \,.\, T_7 + 1259$	$S_3 = -0{,}272 \,.\, T_3 + 0{,}635 \,.\, T_7 + 3467$
4	$M_4 = 3{,}47 \,.\, T_3 \ldots\ldots - 46\,815$	$P_4 = 0{,}988 \,.\, T_3 + 0{,}698 \,.\, T_7 + 574$ $P_{4'} = 0{,}970 \,.\, T_4 + 0{,}720 \,.\, T_9 + 574$	$S_4 = -0{,}165 \,.\, T_3 + 0{,}715 \,.\, T_7 + 2390$ $S_{4'} = -0{,}225 \,.\, T_4 + 0{,}690 \,.\, T_9 + 2390$
5	$M_5 = 3{,}75 \,.\, T_4 + 2{,}20 \,.\, T_9 - 51\,686$	$P_5 = 0{,}990 \,.\, T_4 + 0{,}630 \,.\, T_9 + 141$	$S_5 = -0{,}115 \,.\, T_4 + 0{,}775 \,.\, T_9 + 1217$
6	$M_6 = 3{,}92 \,.\, T_4 \ldots\ldots - 53\,354$	$P_6 = 1{,}000 \,.\, T_4 + 0{,}540 \,.\, T_9$	$S_6 = \ldots\ldots 0{,}840 \,.\, T_9$

In nebenstehender Tabelle kann man für T_5, T_7, T_9 deren Ausdrücke in Functionen von T_2, T_3, T_4 substituiren und gelangt sodann zu der auf Seite 404 befindlichen Tabelle, in welcher nur die drei unbekannten Spannungen T_2, T_3, T_4 enthalten sind.

4. Bestimmung der Unbekannten T_2, T_3, T_4. — Nennt man Ω die Fläche und I das Trägheitsmoment des Bogenquerschnittes, $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots \omega_9$ die Querschnittsflächen der Zugstangen, und beachtet man, dass die sechs Bogenstücke 0, 1; 1, 2; 2, 3; ... 5, 6 eines Halbbogens in der Achse eine Länge von $2^m,713$ haben, und dass man die Längen aller Zugstangen der Zeichnung entnehmen kann, so erhält man sodann als Ausdruck für die Deformationsarbeit des ganzen Bundgespärres — indem man nur jenen Theil vernachlässigt, welcher den Schubkräften entspricht und welcher nur einen unbedeutenden Einfluss auf die Bestimmung der unbekannten elastischen Kräfte hat — folgende Formel:

$$2\left(\frac{2{,}713}{2\,EI}\sum M^2 + \frac{2{,}713}{2\,E\Omega}\sum P^2 + \frac{1}{2\,E}\sum\frac{l\,T^2}{\omega}\right), \tag{2}$$

wobei

$$\left.\begin{aligned}
&\sum M^2 = \frac{M^2_0 + 4\,M^2_1 + 2\,M^2_2 + 4\,M^2_3 + 2\,M^2_4 + 4\,M^2_5 + M^2_6}{3},\\
&\sum P^2 = \frac{P^2_0 + 4\,P^2_1 + P^2_2}{3} + \frac{P^2_{2'} + 4\,P^2_3 + P^2_4}{3} + \frac{P^2_{4'} + 4\,P^2_5 + P^2_6}{3},\\
&\sum \frac{l\,T^2}{\omega} = \frac{2{,}510\,.\,T^2_1}{\omega_1} + \frac{5{,}020\,.\,T^2_2}{\omega_2} + \frac{5{,}020\,.\,T^2_3}{\omega_3} + \frac{2{,}510\,.\,T^2_4}{\omega_4}\\
&+ \frac{3{,}210\,.\,T^2_5}{\omega_5} + \frac{3{,}425\,.\,T^2_6}{\omega_6} + \frac{4{,}240\,.\,T^2_7}{\omega_7} + \frac{4{,}370\,.\,T^2_8}{\omega_8} + \frac{4{,}630\,.\,T^2_9}{\omega_9}.
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Behufs Bestimmung der Werthe der Unbekannten T_2, T_3, T_4 muss man die Differentialquotienten der Formel (2) mit Bezug auf diese Grössen gleich Null setzen; man sieht aber, dass man in diesem Falle zu den gleichen Resultaten gelangt, wenn man statt dem Ausdrucke (2) jenen nimmt, welcher erhalten wird, indem man diesen Ausdruck durch $2 \times \frac{2{,}713}{2\,EI}$ dividirt, d. h.

Querschnitte	Biegungsmomente	Normalpressungen	Schubkräfte
1	2	3	4
0	$M_0 = \ldots\ldots - 736$	$P_0 = 0{,}936 \,.\, T_2 \ldots\ldots + 4748$	$S_0 = -0{,}514 \,.\, T_2 \ldots\ldots + 5638$
1	$M_1 = 1{,}235 \,.\, T_2 \ldots\ldots - 15\,372$	$P_1 = 0{,}990 \,.\, T_2 \ldots\ldots + 3386$	$S_1 = -0{,}403 \,.\, T_2 \ldots\ldots + 5134$
2	$M_2 = 2{,}170 \,.\, T_2 \ldots\ldots - 28\,168$	$P_2 = 0{,}999 \,.\, T_2 \ldots\ldots + 2208$ $P_{2'} = 0{,}535 \,.\, T_2 + 0{,}438 \,.\, T_3 + 2208$	$S_2 = -0{,}284 \,.\, T_2 \ldots\ldots + 4407$ $S_{2'} = +0{,}343 \,.\, T_2 - 0{,}695 \,.\, T_3 + 4407$
3	$M_3 = 1{,}168 \,.\, T_2 + 1{,}822 \,.\, T_3 - 38\,804$	$P_3 = 0{,}489 \,.\, T_2 + 0{,}517 \,.\, T_3 + 1259$	$S_3 = +0{,}403 \,.\, T_2 - 0{,}637 \,.\, T_3 + 3467$
4	$M_4 = 3{,}470 \,.\, T_3 \ldots\ldots - 46\,815$	$P_4 = 0{,}443 \,.\, T_2 + 0{,}587 \,.\, T_3 + 574$ $P_{4'} = 0{,}600 \,.\, T_3 + 0{,}405 \,.\, T_4 + 574$	$S_4 = +0{,}454 \,.\, T_2 - 0{,}576 \,.\, T_3 + 2390$ $S_{4'} = +0{,}575 \,.\, T_3 - 0{,}767 \,.\, T_4 + 2390$
5	$M_5 = 1{,}835 \,.\, T_3 + 2{,}023 \,.\, T_4 - 51\,686$	$P_5 = 0{,}525 \,.\, T_3 + 0{,}495 \,.\, T_4 + 141$	$S_5 = +0{,}646 \,.\, T_3 - 0{,}723 \,.\, T_4 + 1217$
6	$M_6 = 3{,}920 \,.\, T_4 \ldots\ldots - 53\,354$	$P_6 = 0{,}450 \,.\, T_3 + 0{,}576 \,.\, T_4$	$S_6 = +0{,}701 \,.\, T_3 - 0{,}659 \,.\, T_4$

$$\sum M^2 + \frac{I}{\Omega} \sum P^2 + \frac{I}{2{,}713} \sum \frac{l\,T^2}{\omega}. \qquad (4)$$

Wir substituiren nun für M_0, M_1 etc., P_0, P_1 etc., deren Ausdrücke in Functionen von T_2, T_3, T_4, wie sie in der Tabelle auf Seite 404 gegeben werden, und für T_1, T_5, T_6, T_7, T_8, T_9 deren Ausdrücke in Functionen der gleichen Unbekannten und nehmen an, dass der Bogen den in Figur 10 (Tafel VII) dargestellten Querschnitt habe, und dass die Zugstangen folgende Durchmesser haben:

$$d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = 0^{\mathrm{m}},060,$$
$$d_5 = 0^{\mathrm{m}},024,$$
$$d_6 = d_7 = d_8 = d_9 = 0^{\mathrm{m}},020.$$

Wir erhalten demnach

$$\Omega = 0{,}12 \times 0{,}175 - 0{,}104 \times 0{,}155 = 0{,}00488,$$
$$I = \frac{1}{12}\,(0{,}12 \times 0{,}175^3 - 0{,}104 \times 0{,}155^3) = 0{,}00002132,$$
$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = 0{,}002826,$$
$$\omega_5 = 0{,}000452,$$
$$\omega_6 = \omega_7 = \omega_8 = \omega_9 = 0{,}000314;$$

und folglich

$$\sum M^2 = 6{,}9918\,.\,T^2_2 + 16{,}9431\,.\,T^2_3 + 10{,}5788\,.\,T^2_4 + 2{,}8375\,.\,2\,T_2\,T_3 + 4{,}9496\,.\,2\,T_3\,T_4 - 126493\,.\,2\,T_2 - 329025\,.\,2\,T_3 - 209130\,.\,2\,T_4,$$

$$\frac{I}{\Omega}\sum P^2 = 0{,}0107\,.\,T^2_2 + 0{,}0048\,.\,T^2_3 + 0{,}0022\,.\,T^2_4 + 0{,}0022\,.\,2\,T_2\,T_3 + 0{,}0023\,.\,2\,T_3\,T_4 + 35{,}14\,.\,2\,T_2 + 6{,}67\,.\,2\,T_3 + 0{,}75\,.\,2\,T_4,$$

$$\frac{I}{2{,}713}\sum\frac{l\,T^2}{\omega} = 0{,}1169\,.\,T^2_2 + 0{,}2638\,.\,T^2_3 + 0{,}1625\,.\,T^2_4 - 0{,}0938\,.\,2\,T_2\,T_3 - 0{,}1559\,.\,2\,T_3\,T_4.$$

Der Ausdruck (4) wird somit

$$7{,}1194\,.\,T^2_2 + 17{,}2117\,.\,T^2_3 + 10{,}7435\,.\,T^2_4 + 2{,}7459\,.\,2\,T_2\,T_3 + 4{,}7960\,.\,2\,T_3\,T_4 - 126458\,.\,2\,T_2 - 329018\,.\,2\,T_3 - 209129\,.\,2\,T_4,$$

und, indem man die Differentialquotienten hievon mit Bezug auf T_2, T_3 T_4 gleich Null setzt, erhält man die Gleichungen

$$7{,}1194 \,.\, T_2 + 2{,}7459 \,.\, T_3 - 126458 = 0,$$
$$2{,}7459 \,.\, T_2 + 17{,}2117 \,.\, T_3 + 4{,}7960 \,.\, T_4 - 329018 = 0,$$
$$4{,}7960 \,.\, T_3 + 10{,}7435 \,.\, T_4 - 209129 = 0;$$

hieraus ergibt sich

$$T_2 = 12619, \qquad T_3 = 13338, \qquad T_4 = 13511. \tag{5}$$

5. Spannungen per Quadratmeter in den Zugstangen und im Bogen. — Substituirt man diese Werthe von T_2, T_3, T_4 in die Formeln (1), so erhält man

$$T_1 = 13528, \qquad T_5 = 1136, \qquad T_6 = 1161,$$
$$T_7 = \ \ 344, \qquad T_8 = \ 752, \qquad T_9 = \ 518,$$

und folglich für die Spannungen per Quadratmeter die Werthe

$$\frac{T_1}{\omega_1} = 4\,787\,000, \qquad \frac{T_2}{\omega_2} = 4\,465\,000, \qquad \frac{T_3}{\omega_3} = 4\,719\,000,$$
$$\frac{T_4}{\omega_4} = 4\,781\,000, \qquad \frac{T_5}{\omega_5} = 2\,512\,000, \qquad \frac{T_6}{\omega_6} = 3\,697\,000,$$
$$\frac{T_7}{\omega_7} = 1\,095\,000, \qquad \frac{T_8}{\omega_8} = 2\,396\,000, \qquad \frac{T_9}{\omega_9} = 1\,648\,000.$$

Setzt man nun die oben erhaltenen Werthe von T_2, T_3, T_4 in die auf Seite 404 gegebene Tabelle ein, so erhält man für das Biegungsmoment, die Normalpressung und die Schubkraft in den Querschnitten 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 die in den Colonnen 2, 3 und 4 der nachfolgenden Tabelle angeführten Werthe.

Die Division der Biegungsmomente durch die correspondirenden Normalpressungen ergibt die Entfernungen der Druckmittelpunkte von den Querschnittsmittelpunkten, worauf man die Mittellinie des Druckes zeichnen kann.

Mit Hilfe der Formel $\quad \dfrac{P}{\Omega} \pm \dfrac{Mv}{I},$

worin die Buchstaben die bereits wiederholt angegebene Bedeutung haben, erhält man die Pressung per Quadratmeter sowohl an der inneren als auch an der äusseren Wölbung des Bogens in den Querschnitten 0, 1, 2 etc., wie dies in den Colonnen 6 und 7 angegeben ist.

Ist ferner

S die Schubkraft in einem beliebigen Querschnitte des Bogens,

$I = 0{,}00002132$ das Trägheitsmoment dieses Querschnittes,

$G = \frac{1}{8}(0{,}12 \times 0{,}175^2 - 0{,}104 \times 0{,}155^2) = 0{,}000147$ das statische Moment des halben Bogenquerschnittes in Bezug auf die Biegungsachse,

$s = 0{,}008 \times 2 = 0{,}016$ die gesammte Dicke des Querschnittes in der Biegungsachse, d. h. die Summe der Eisenstärken der beiden Ⅽ-Eisen, welche den Bogen bilden;

so berechnet man die grösste Tangentialkraft per Quadratmeter in den Querschnitten 0, 1, 2 etc. des Bogens mit Hilfe der Formel

$$\frac{S\,G}{s\,I} = 431\,.\,S,$$

was die in der Colonne 8 der folgenden Tabelle ausgewiesenen Werthe ergibt.

Querschnitte	Biegungsmomente	Normalpressungen	Schubkräfte	Mittellinie des Druckes*)	Pressung per Quadratmeter an der inneren Wölbung	Pressung per Quadratmeter an der äusseren Wölbung	Spannung der Gitterstäbe per Quadratmeter
1	2	3	4	5	6	7	8
0	— 736	+ 16 560	— 848	— 0,044	+ 372 500	+ 6 414 500	— 365 488
1	+ 213	+ 15 879	+ 48	+ 0,013	+ 4 128 100	+ 2 379 500	+ 20 688
2	— 784	+ 14 815	+ 823	— 0,053	— 181 600	+ 6 253 400	+ 354 713
		+ 14 801	— 535	— 0,052	— 184 500	+ 6 250 500	— 230 585
3	+ 238	+ 14 325	+ 56	+ 0,016	+ 3 905 500	+ 1 951 900	+ 10 775
4	— 531	+ 13 994	+ 436	— 0,037	+ 688 500	+ 5 046 900	+ 187 916
		+ 14 049	— 304	— 0,037	+ 699 700	+ 5 058 100	— 131 024
5	+ 123	+ 13 832	+ 65	+ 0,009	+ 3 339 300	+ 2 329 700	+ 28 015
6	— 390	+ 13 785	+ 446	— 0,028	+ 1 224 200	+ 4 425 400	+ 192 226

*) Die Mittellinie des Druckes für das vollständig belastete Bundgespärre wird in Figur 11 durch eine *continuirliche Linie* dargestellt.

6. Thatsächlich zu wählende Dimensionen. — Da, wie aus der vorhergehenden Tabelle folgt, die grösste Pressung im Bogen 6 414 500 Kilogramm per Quadratmeter beträgt, kann man als Querschnitt des Bogens endgiltig jene Fläche annehmen, welche für die Berechnung vorausgesetzt wurde.

Bezüglich der Zugstangen sieht man, dass deren Spannung geringer als 6 Kilogramm per Quadratmillimeter ist, so dass man deren Durchmesser etwas kleiner halten kann. Nichtsdestoweniger ist es angezeigt, diese Reduction nur für jene Zugstangen zu machen, welche das innere Polygon bilden, denn die anderen haben so wie so schon kleine Durchmesser. Indem wir also

$$d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = 0^{\text{m}},054$$

wählen und folglich

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = 0{,}002290$$

ist, ergeben sich die Spannungen der Zugstangen des inneren Polygons per Quadratmeter wie folgt:

$$\frac{T_1}{\omega_1} = 5\,908\,000, \quad \frac{T_2}{\omega_2} = 5\,510\,000, \quad \frac{T_3}{\omega_3} = 5\,824\,000, \quad \frac{T_4}{\omega_4} = 5\,900\,000.$$

7. Betrachtung des Falles, wo nur die linke Hälfte des Bundgespärres belastet ist und wobei man von dem permanenten Gewichte ganz absieht. — Nachdem vorausgesetzt wurde, dass die zufällige Belastung 70 Kilogramm per Quadratmeter der Bedachung beträgt, und da die Entfernung zwischen den Bundgespärren $3^{\text{m}},80$ ist, so folgt daraus, dass die Belastung per Längenmeter des Bogens

$$70 \times 3{,}80 = 266 \text{ Kilogr. beträgt.}$$

Wir nehmen an, dass diese Belastung sich nur auf dem linken Halbbogen vorfindet, und dass es die einzige Last ist, welche das Bundgespärre zu tragen hat, indem von dem permanenten Gewichte vollkommen abgesehen wird.

Um in diesem Falle die Reactionen der Auflager zu bestimmen, nennen wir R die Reaction des linken und r jene des rechten Auflagers und beachten, dass, wenn man das Bundgespärre als frei annimmt, die

Summe der Gewichte, durch welche dasselbe belastet wird, gleich sein muss der Summe der Reactionen R und r, und dass die Summe der Momente dieser Gewichte in Bezug auf einen beliebigen Punkt, z. B. in Bezug auf den Mittelpunkt des Querschnittes 6 gleich sein muss der Summe der Momente dieser Reactionen (wobei wohl darauf zu achten ist, dass eines dieser letzteren Momente ein negatives Zeichen erhalten wird).

Man hat also die zwei Gleichungen

$$R + r = 266 \times 2{,}713 \times 6 = 4330,$$
$$(R - r)\,15{,}05 = (1{,}36 + 4{,}05 + 6{,}67 + 9{,}23 + 11{,}63 + 13{,}87)\,266 \times 2{,}713,$$

woraus $R = 3288$ Kilogr., $r = 1042$ Kilogr.

Wir nennen nun für den in Betracht gezogenen Fall der Belastung die Spannungen in den Zugstangen des linken Halbgespärres

$$\mathfrak{T}_1,\ \mathfrak{T}_2,\ \mathfrak{T}_3,\ \mathfrak{T}_4,\ \mathfrak{T}_5,\ \mathfrak{T}_6,\ \mathfrak{T}_7,\ \mathfrak{T}_8,\ \mathfrak{T}_9$$

und jene des rechten Halbgespärres

$$t_1,\ t_2,\ t_3,\ t_4,\ t_5,\ t_6,\ t_7,\ t_8,\ t_9,$$

wohl beachtend, dass sich die gleichen Indices auf symmetrische Zugstangen beziehen, und dass sie den für den Fall der vollständigen Belastung gewählten Indices entsprechen.

Es ist ferner zu beachten, dass T_4 und t_4 ein und dieselbe Spannung vorstellen, nachdem sie sich auf dieselbe Zugstange beziehen; für die Symmetrie der Formeln ist es jedoch nützlich, diese beiden Buchstaben beizubehalten.

Nachdem man die beiden Reactionen R und r, sowie die Gewichte kennt, durch welche das linke Halbgespärre belastet wird, kann man das Biegungsmoment, die Normalpressung und die Schubkraft für die Querschnitte 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 des rechten Halbbogens sowohl, wie auch des linken leicht berechnen.

Aus diesen Resultaten kann man eine Tabelle zusammensetzen, deren beide Theile sowohl untereinander, als auch mit der in Nummer 3 gegebenen ersten Tabelle durch die von den Spannungen unabhängigen

Glieder verschieden sind; während jene Glieder, welche die Spannungen enthalten, noch dieselben Coëfficienten haben und sich nur durch die Aenderung von T in $\mathfrak{T}$ und von T in t unterscheiden.

Da man andererseits die zwei folgenden Serien von Gleichungen hat:

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{T}_1 &= 1{,}072 \,.\, \mathfrak{T}_2, \\
\mathfrak{T}_5 &= 0{,}090 \,.\, \mathfrak{T}_2, \\
\mathfrak{T}_6 &= -0{,}780 \,.\, \mathfrak{T}_2 + 0{,}825 \,.\, \mathfrak{T}_3, \\
\mathfrak{T}_7 &= 0{,}635 \,.\, \mathfrak{T}_2 - 0{,}575 \,.\, \mathfrak{T}_3, \\
\mathfrak{T}_8 &= -0{,}835 \,.\, \mathfrak{T}_3 + 0{,}880 \,.\, \mathfrak{T}_4, \\
\mathfrak{T}_9 &= 0{,}834 \,.\, \mathfrak{T}_3 - 0{,}785 \,.\, \mathfrak{T}_4,
\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

$$\left.\begin{aligned}
t_1 &= 1{,}072 \,.\, t_2, \\
t_5 &= 0{,}090 \,.\, t_2, \\
t_6 &= -0{,}780 \,.\, t_2 + 0{,}825 \,.\, t_3, \\
t_7 &= 0{,}635 \,.\, t_2 - 0{,}575 \,.\, t_3, \\
t_8 &= -0{,}835 \,.\, t_3 + 0{,}880 \,.\, t_4, \\
t_9 &= 0{,}834 \,.\, t_3 - 0{,}785 \,.\, t_4,
\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

so kann man in den Formeln, welche sich auf den linken Halbbogen beziehen, $\mathfrak{T}_5$, $\mathfrak{T}_7$, $\mathfrak{T}_9$ und in jenen bezüglich des rechten Halbbogens t_5, t_7, t_9 eliminiren; dies gibt nebenstehende Tabelle, deren zwei Theile von der am Ende der Nummer 3 gegebenen Tabelle durch die vollkommen numerischen Glieder differiren, während jene Glieder, welche die Spannungen enthalten, dieselben sind, mit Ausnahme des Wechsels von T in $\mathfrak{T}$ und von T in t. Dies zeigt uns, dass behufs Zusammenstellung der neuen Tabelle es nur nothwendig ist, die vollkommen numerischen Glieder zu berechnen, da sich die anderen aus der am Ende der Nummer 3 gegebenen Tabelle ableiten lassen.

Die Deformationsarbeit des linken Halbgespärres wird ausgedrückt durch die Formel

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{2{,}713}{2\,EI}\left(\sum M^2 + \sum M'^2\right) + \frac{2{,}713}{2\,EI}\left(\sum P^2 + \sum P'^2\right) \\
&\qquad + \frac{1}{2\,E}\sum \frac{l\,(\mathfrak{T}^2 + t^2)}{\omega},
\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

wobei

Quer-schnitte 1	Biegungsmomente 2	Normalpressungen 3	Schubkräfte 4
		I. Linker Halbbogen.	
0	$M_0 = \ldots\ldots - 329$	$P_0 = 0{,}936\,\mathfrak{T}_2 \ldots\ldots + 2121$	$S_0 = -0{,}514\,\mathfrak{T}_2 \ldots\ldots + 2519$
1	$M_1 = 1{,}235\,\mathfrak{T}_2 \ldots\ldots - 6677$	$P_1 = 0{,}990\,\mathfrak{T}_2 \ldots\ldots + 1417$	$S_1 = -0{,}403\,\mathfrak{T}_2 \ldots\ldots + 2148$
2	$M_2 = 2{,}170\,\mathfrak{T}_2 \ldots\ldots - 11787$	$P_2 = 0{,}999\,\mathfrak{T}_2 \ldots\ldots + 830$ $P_{2'} = 0{,}535\,\mathfrak{T}_2 + 0{,}438\,\mathfrak{T}_3 + 830$	$S_2 = -0{,}284\,\mathfrak{T}_2 \ldots\ldots + 1657$ $S_{2'} = +0{,}343\,\mathfrak{T}_2 - 0{,}695\,\mathfrak{T}_3 + 1657$
3	$M_3 = 1{,}168\,\mathfrak{T}_2 + 1{,}822\,\mathfrak{T}_3 - 15459$	$P_3 = 0{,}489\,\mathfrak{T}_2 + 0{,}517\,\mathfrak{T}_3 + 384$	$S_3 = +0{,}403\,\mathfrak{T}_2 - 0{,}637\,\mathfrak{T}_3 + 1058$
4	$M_4 = 3{,}470\,\mathfrak{T}_3 \ldots\ldots - 17452$	$P_4 = 0{,}443\,\mathfrak{T}_2 + 0{,}587\,\mathfrak{T}_3 + 94$ $P_{4'} = 0{,}600\,\mathfrak{T}_3 + 0{,}405\,\mathfrak{T}_4 + 94$	$S_4 = +0{,}454\,\mathfrak{T}_2 - 0{,}576\,\mathfrak{T}_3 + 391$ $S_{4'} = +0{,}575\,\mathfrak{T}_3 - 0{,}767\,\mathfrak{T}_4 + 391$
5	$M_5 = 1{,}835\,\mathfrak{T}_3 + 2{,}023\,\mathfrak{T}_4 - 17556$	$P_5 = 0{,}525\,\mathfrak{T}_3 + 0{,}495\,\mathfrak{T}_4 - 37$	$S_5 = +0{,}646\,\mathfrak{T}_3 - 0{,}723\,\mathfrak{T}_4 - 318$
6	$M_6 = 3{,}920\,\mathfrak{T}_4 \ldots\ldots - 15692$	$P_6 = 0{,}450\,\mathfrak{T}_3 + 0{,}576\,\mathfrak{T}_4$	$S_6 = +0{,}701\,\mathfrak{T}_3 - 0{,}659\,\mathfrak{T}_4 - 1042$
		II. Rechter Halbbogen.	
0	$M'_0 = \ldots\ldots - 104$	$P'_0 = 0{,}936 \cdot t_2 \ldots\ldots + 672$	$S'_0 = -0{,}514 \cdot t_2 \ldots\ldots + 798$
1	$M'_1 = 1{,}235 \cdot t_2 \ldots\ldots - 2365$	$P'_1 = 0{,}990 \cdot t_2 \ldots\ldots + 575$	$S'_1 = -0{,}403 \cdot t_2 \ldots\ldots + 872$
2	$M'_2 = 2{,}170 \cdot t_2 \ldots\ldots - 4783$	$P'_2 = 0{,}999 \cdot t_2 \ldots\ldots + 469$ $P'_{2'} = 0{,}535 \cdot t_2 + 0{,}438 \cdot t_3 + 469$	$S'_2 = -0{,}284 \cdot t_2 \ldots\ldots + 936$ $S'_{2'} = +0{,}343 \cdot t_2 - 0{,}695 \cdot t_3 + 936$
3	$M'_3 = 1{,}168 \cdot t_2 + 1{,}822\ t_3 - 7367$	$P'_3 = 0{,}489 \cdot t_2 + 0{,}517 \cdot t_3 + 356$	$S'_3 = +0{,}403 \cdot t_2 - 0{,}637 \cdot t_3 + 982$
4	$M'_4 = 3{,}470 \cdot t_3 \ldots\ldots - 10087$	$P'_4 = 0{,}443 \cdot t_2 + 0{,}587 \cdot t_3 + 243$ $P'_{4'} = 0{,}600 \cdot t_3 + 0{,}405 \cdot t_4 + 243$	$S'_4 = +0{,}454 \cdot t_2 - 0{,}576 \cdot t_3 + 1015$ $S'_{4'} = +0{,}575 \cdot t_3 - 0{,}767 \cdot t_4 + 1015$
5	$M'_5 = 1{,}835 \cdot t_3 + 2{,}023\ t_4 - 12848$	$P'_5 = 0{,}525 \cdot t_3 + 0{,}495 \cdot t_4 + 120$	$S'_5 = +0{,}646 \cdot t_3 - 0{,}723 \cdot t_4 + 1034$
6	$M'_6 = 3{,}920 \cdot t_4 \ldots\ldots - 15692$	$P'_6 = 0{,}450 \cdot t_3 + 0{,}576 \cdot t_4$	$S'_6 = +0{,}701 \cdot t_3 - 0{,}659 \cdot t_4 + 1042$

$$\left.\begin{aligned}
&\sum M^2 = \frac{M^2_0 + 4\,M^2_1 + 2\,M^2_2 + 4\,M^2_3 + 2\,M^2_4 + 4\,M^2_5 + M^2_6}{3},\\
&\sum M'^2 = \frac{M'^2_0 + 4\,M'^2_1 + 2\,M'^2_2 + 4\,M'^2_3 + 2\,M'^2_4 + 4\,M'^2_5 + M'^2_6}{3},\\
&\sum P^2 = \frac{P^2_0 + 4\,P^2_1 + P^2_2}{3} + \frac{P^2_{2'} + 4\,P^2_3 + P^2_4}{3} + \frac{P^2_{4'} + 4\,P^2_5 + P^2_6}{3},\\
&\sum P'^2 = \frac{P'^2_0 + 4P'^2_1 + P'^2_2}{3} + \frac{P'^2_{2'} + 4P'^2_3 + P'^2_4}{3} + \frac{P'^2_{4'} + 4P'^2_5 + P'^2_6}{3},\\
&\sum \frac{l\,(\mathfrak{T}^2 + t^2)}{\omega} = \frac{2{,}510\,(\mathfrak{T}^2_1 + t^2_1)}{\omega_1} + \frac{5{,}020\,(\mathfrak{T}^2_2 + t^2_2)}{\omega_2}\\
&\quad + \frac{5{,}020\,(\mathfrak{T}^2_3 + t^2_3)}{\omega_3} + \frac{2{,}510\,(\mathfrak{T}^2_4 + t^2_4)}{\omega_4} + \frac{3{,}210\,(\mathfrak{T}^2_5 + t^2_5)}{\omega_5}\\
&\quad + \frac{3{,}425\,(\mathfrak{T}^2_6 + t^2_6)}{\omega_6} + \frac{4{,}240\,(\mathfrak{T}^2_7 + t^2_7)}{\omega_7} + \frac{4{,}370\,(\mathfrak{T}^2_8 + t^2_8)}{\omega_8}\\
&\quad + \frac{4{,}630\,(\mathfrak{T}^2_9 + t^2_9)}{\omega_9}.
\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Zur Bestimmung der unbekannten Spannungen kann man die Formel (7) durch den numerischen Factor $\frac{2{,}713}{2\,E\,I}$ dividiren, wodurch man folgende Formel erhält:

$$\sum M^2 + \sum M'^2 + \frac{I}{\Omega}\left(\sum P'^2 + \sum P'^2\right) + \frac{I}{2{,}713} \sum \frac{l\,(\mathfrak{T}^2 + t^2)}{\omega}. \quad (9)$$

Nun substituirt man in den ersten vier Formeln (8) für M_0, M_1, $M_2, \ldots$, M'_0, M'_1, $M'_2, \ldots$, P_0, P_1, $P_2, \ldots$, P'_0, P'_1, $P'_2, \ldots$ deren Ausdrücke aus der vorhergehenden Tabelle; sodann eliminirt man mit Hilfe der Gleichungen (5) und (6) in der fünften Formel die Grössen $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_5$, $\mathfrak{T}_6, \ldots$, t_1, t_5, $t_6, \ldots$; schliesslich substituirt man die so erhaltenen Resultate in die Formel (9) und erhält:

$$\left.\begin{aligned}
&7{,}1194\,(\mathfrak{T}^2_2 + t^2_2) + 17{,}2117\,(\mathfrak{T}^2_3 + t^2_3) + 10{,}7435\,(\mathfrak{T}^2_4 + t^2_4)\\
&+ 2{,}7459\,.\,2\,(\mathfrak{T}_2\,\mathfrak{T}_3 + t_2\,t_3) + 4{,}7960\,.\,2\,(\mathfrak{T}_3\,\mathfrak{T}_4 + t_3\,t_4)\\
&-(52\,107\,.\,2\,\mathfrak{T}_2 + 22280\,.\,2\,t_2) - (120\,879\,.\,2\,\mathfrak{T}_3 + 72\,665\,.\,2\,t_3)\\
&-(67\,873\,.\,2\,\mathfrak{T}_4 + 55\,147\,.\,2\,t_4).
\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Es ist hiebei wichtig zu bemerken, dass die Coëfficienten der Glieder zweiten Grades in Bezug auf die Spannungen in dieser Formel wie in jener in Nummer 4 erhaltenen gleich sind; dies zeigt, dass man, um obige Formel zu erhalten, nur die Glieder, welche bezüglich der Spannungen ersten Grades sind, zu berechnen hat, welche Operation kurz und einfach ist.

Nunmehr muss man die Differentialquotienten der Formel (10) mit Bezug auf die Unbekannten, welche sie enthält, gleich Null setzen, indem man hiebei beachtet, dass $\mathfrak{T}_4$ und t_4 dieselbe Spannung vorstellen. Zur Vereinfachung ändern wir aber die Unbekannten, und zwar in folgender Weise:

$$\mathfrak{T}_2 + t_2 = \tau_2, \quad \mathfrak{T}_3 + t_3 = \tau_3, \quad \mathfrak{T}_4 = t_4 = \frac{\tau_4}{2},$$
$$\mathfrak{T}_2 - t_2 = \theta_2, \quad \mathfrak{T}_3 - t_3 = \theta_3;$$

dies ergibt

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{T}_2 &= \frac{\tau_2 + \theta_2}{2}, & t_2 &= \frac{\tau_2 - \theta_2}{2}, \\ \mathfrak{T}_3 &= \frac{\tau_3 + \theta_3}{2}, & t_3 &= \frac{\tau_3 - \theta_3}{2}, \\ \mathfrak{T}_4 &= \frac{\tau_4}{2}, & t_4 &= \frac{\tau_4}{2}; \end{aligned}\right| \tag{11}$$

und ferner

$$\mathfrak{T}^2_2 + t^2_2 = \frac{\tau^2_2 + \theta^2_2}{2},$$

$$\mathfrak{T}^2_3 + t^2_3 = \frac{\tau^2_3 + \theta^2_3}{2},$$

$$\mathfrak{T}^2_4 + t^2_4 = \frac{\tau^2_4}{2},$$

$$2(\mathfrak{T}_2\,\mathfrak{T}_3 + t_2\,t_3) = \tau_2\,\tau_3 + \theta_2\,\theta_3,$$
$$2(\mathfrak{T}_3\,\mathfrak{T}_4 + t_3\,t_4) = \tau_3\,\tau_4.$$

Die Substitution in die Formel (10) ergibt sodann

$$\frac{1}{2}\left(\begin{matrix}7{,}1194.\tau^2_2 + 17{,}2117.\tau^2_3 + 10{,}7435.\tau^2_4 + 2{,}7459.2\tau_2\tau_3 + 4{,}7960.2\tau_3\tau_4 \\ -\,74\,387\,.\,2\tau_2 - 193\,544\,.\,2\tau_3 - 123\,020\,.\,2\tau_4\end{matrix}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\left(\begin{matrix}7{,}1194\,.\,\theta^2_2 + 17{,}2117\,.\,\theta^2_3 + 2{,}7459\,.\,2\,\theta_2\,\theta_3 - 29\,827\,.\,2\,\theta_2 \\ -\,48\,214\,.\,2\,\theta_3\end{matrix}\right).$$

Die Differentialquotienten dieses Ausdruckes mit Bezug auf τ_2, τ_3, τ_4, θ_2, θ_3, müssen nun gleich Null gesetzt werden, wodurch sich fünf Gleichungen ergeben, von welchen die ersten drei zur Bestimmung von τ_2, τ_3, τ_4 dienen, während die zwei letzten θ_2 und θ_3 zur Kenntniss bringen.

Aus dem Principe der Summirung der Wirkungen resultirt, dass, wenn man das Bundgespärre sowohl auf der linken als auch auf der rechten Hälfte belastet voraussetzt, indem man von dem permanenten Gewichte absieht, die Zugstangen $B\,C$, $C\,D$, $D\,E$ die Spannungen

$$\mathfrak{T}_2 + t_2 = \tau_2, \qquad \mathfrak{T}_3 + t_3 = \tau_3, \qquad \mathfrak{T}_4 + t_4 = \tau_4$$

haben; andererseits resultirt hieraus, dass die Spannung einer Zugstange im Falle, als die Belastung sich über die ganze Bedachung erstreckt, zu der Spannung derselben Zugstange bei Berücksichtigung dieser Belastung und des permanenten Gewichtes in demselben Verhältnisse steht wie die Last per Quadratmeter der Bedachung in diesen beiden Fällen; da die alleinige Belastung 70 Kilogramm per Quadratmeter der Bedachung und die um das permanente Gewicht vermehrte Belastung 119 Kilogramm beträgt, kann man die Werthe von τ_2, τ_3, τ_4 berechnen, indem man die Werthe (5) von T_2, T_3, T_4 mit dem Bruche $\frac{70}{119}$ multiplicirt, so dass

$$\tau_2 = 7423, \qquad \tau_3 = 7846, \qquad \tau_4 = 7947. \tag{12}$$

Die zwei Gleichungen für θ_2 und θ_3 sind die folgenden:

$$7{,}1194 \,.\, \theta_2 + \ \ 2{,}7459 \,.\, \theta_3 - 29\,827 = 0,$$
$$2{,}7459 \,.\, \theta_2 + 17{,}2117 \,.\, \theta_3 - 48\,214 = 0,$$

woraus
$$\theta_2 = 3313, \qquad \theta_3 = 2273.$$

Bei Kenntniss der Werthe von τ_2, τ_3, τ_4 und von θ_2, θ_3 ergeben die Formeln (11)

$$\mathfrak{T}_2 = 5368, \qquad t_2 = 2055,$$
$$\mathfrak{T}_3 = 5059, \qquad t_3 = 2786,$$
$$\mathfrak{T}_4 = t_4 = 3974.$$

Die Substitution dieser Werthe in die Formeln (5), (6) und in die darauffolgende Tabelle ergibt folgende Resultate:

$$\mathfrak{S}_1 = 5755,\quad t_1 = 2203,$$
$$\mathfrak{S}_5 = 483,\quad t_5 = 185,$$
$$\mathfrak{S}_6 = -13,\quad t_6 = 696,$$
$$\mathfrak{S}_7 = 500,\quad t_7 = -297,$$
$$\mathfrak{S}_8 = -728,\quad t_8 = 1170,$$
$$\mathfrak{S}_9 = 1100,\quad t_9 = -795.$$

Linker Halbbogen				Rechter Halbbogen			
Querschnitte	Biegungsmomente	Normalpressungen	Schubkräfte	Querschnitte	Biegungsmomente	Normalpressungen	Schubkräfte
1	2	3	4	1	2	3	4
0	— 329	7145	— 240	0	— 104	2595	— 258
1	+ 436	6731	— 15	1	+ 357	2609	+ 44
2	— 138	{6193 5918	{+ 132 — 18	2	— 324	{2549 2816	{+ 352 — 295
3	+ 29	5625	— 1	3	+ 110	2801	+ 36
4	+ 103	{5422 4739	{— 85 + 252	4	— 418	{2789 3524	{+ 343 — 431
5	— 234	4586	+ 76	5	+ 304	3550	— 39
6	— 115	4565	— 115	6	— 115	2543	+ 376

Der soeben betrachtete Fall hat an und für sich keine praktische Nützlichkeit, denn es wurde hiebei von dem permanenten Gewichte abgesehen; aber er dient hiezu, die Untersuchung von verschiedenen, thatsächlich stattfindenden Fällen auf einfache Additionen und Substractionen zurückzuführen.

8. Bestimmung der elastischen Kräfte in dem Falle, als das permanente Gewicht in Rechnung genommen wird und man annimmt, dass das linke Halbgespärre eine Belastung von 70 Kilogramm per Quadratmeter der Bedachung tragen muss, das rechte hingegen nur eine solche von 35 Kilogramm. — Aus dem Principe der Summirung der Wirkungen folgt, dass dieser Fall sich leicht aus den zwei in den vorhergehenden Nummern betrachteten Fällen, d. h. aus jenem der completen Belastung und jenem, wobei man sich die Belastung nur auf das linke Halbgespärre bei Ausserachtlassung des

permanenten Gewichtes vertheilt denkt, ableiten lässt. Man kann in der That annehmen, dass die Belastung von 70 Kilogramm per Quadratmeter über das ganze Bundgespärre vertheilt ist, und dass man auf der linken Hälfte hievon 35 Kilogramm per Quadratmeter entfernt hätte; die Spannungen der Zugstangen, sowie die Biegungsmomente, die Normalpressungen und die Schubkräfte im Bogen werden sich offenbar um jenen Werth vermindern, welchen diese Grössen bei einer Belastung von 35 Kilogramm per Quadratmeter auf dem rechten Halbgespärre bei Ausserachtlassung des permanenten Gewichtes haben würden.

Die Spannungen der Zugstangen in dem hier in Betracht gezogenen Falle sind also

für das Halbgespärre

links	*rechts*
$T_1 - \frac{1}{2} t_1 = 12\,427,$	$T_1 - \frac{1}{2} \mathfrak{T}_1 = 10\,651,$
$T_2 - \frac{1}{2} t_2 = 11\,592,$	$T_2 - \frac{1}{2} \mathfrak{T}_2 = 9\,035,$
$T_3 - \frac{1}{2} t_3 = 11\,945,$	$T_3 - \frac{1}{2} \mathfrak{T}_3 = 10\,808,$
$T_4 - \frac{1}{2} t_4 = 11\,524,$	$T_4 - \frac{1}{2} \mathfrak{T}_4 = 11\,524,$
$T_5 - \frac{1}{2} t_5 = 1\,043,$	$T_5 - \frac{1}{2} \mathfrak{T}_5 = 894,$
$T_6 - \frac{1}{2} t_6 = 813,$	$T_6 - \frac{1}{2} \mathfrak{T}_6 = 1\,168,$
$T_7 - \frac{1}{2} t_7 = 492,$	$T_7 - \frac{1}{2} \mathfrak{T}_7 = 94,$
$T_8 - \frac{1}{2} t_8 = 167,$	$T_8 - \frac{1}{2} \mathfrak{T}_8 = 1\,116,$
$T_9 - \frac{1}{2} t_9 = 915,$	$T_9 - \frac{1}{2} \mathfrak{T}_9 = -\,32.$

Das Biegungsmoment, die Normalpressung und die Schubkraft für jeden der Querschnitte 0, 1, 2, . . . 6, sowohl für den linken als auch für den rechten Halbbogen sind in der nachfolgenden Tabelle ersichtlich

gemacht, worin auch die Entfernungen der Druckmittelpunkte von den Querschnittsmittelpunkten angegeben sind.*)

I. Linker Halbbogen					II. Rechter Halbbogen				
Querschnitte	Biegungsmomente	Normalpressungen	Schubkräfte	Mittellinie des Druckes	Querschnitte	Biegungsmomente	Normalpressungen	Schubkräfte	Mittellinie des Druckes
1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
0	— 684	15263	— 719	— 0,045	0	— 572	12988	— 728	— 0,044
1	+ 35	14575	+ 26	+ 0,002	1	— 5	12514	+ 56	— 0,000
2	— 622	{13541 13393	{+ 647 — 387	{— 0,046 — 0,046	2	— 715	{11769 11842	{+ 762 — 526	{— 0,060 — 0,060
3	+ 183	12925	+ 38	+ 0,014	3	+ 224	11513	+ 57	+ 0,019
4	— 322	{12600 12787	{+ 264 — 88	{— 0,025 — 0,025	4	— 582	{11273 11680	{+ 479 — 430	{— 0,051 — 0,049
5	— 29	12057	+ 85	— 0,002	5	+ 240	11539	+ 27	+ 0,021
6	— 332	12014	+ 258	— 0,028	6	— 332	11503	+ 504	— 0,028

Wenn man diese Resultate mit jenen vergleicht, welche für den Fall einer über das ganze Bundgespärre vertheilten Belastung von 70 Kilogramm per Quadratmeter erhalten wurden, so sieht man,

1. dass die Spannungen in den Zugstangen des unteren Polygons im Falle der completen Belastung immer grösser sind;

2. dass die Spannungen in den anderen Zugstangen in dem Falle grösser ist, wo die Belastung von 70 Kilogramm sich nur auf einer Hälfte befindet, während die andere geringer belastet ist;

3. dass in diesem letzten Falle die Spannung $T_9 - \frac{1}{2}\mathfrak{T}_9$ negativ ist, d. h. dass eine der gegen den Scheitel laufenden Zugstangen gedrückt wird; aber diese Compression ist sehr klein und verwandelt sich neuerdings in eine Spannung, sobald die Belastung des rechten Halbbogens etwas über 35 Kilogramm beträgt;

*) Für den oben betrachteten Fall ist die Mittellinie des Druckes in Figur 11 (Tafel VII) durch eine gestrichelte Linie dargestellt.

4. dass das grösste Biegungsmoment und die grösste Normalpressung im Bogen und folglich auch die grösste Pressung per Quadratmeter in dem Falle der completen Belastung statthat.

9. Einfluss der Aenderungen der Temperatur. — Da angenommen wurde, dass eines der Enden des Bundgespärres auf seinem horizontalen Auflager frei gleiten kann, und da andererseits alle Theile aus Eisen sind und denselben Ausdehnungscoëfficienten haben, so folgt daraus, dass eine gleichförmig auftretende Aenderung der Temperatur keine elastische Kraft hervorrufen kann.

10. Capitel.

Betrachtung einer eisernen Bogenbrücke mit ebenen Auflagflächen.

(Tafel VIII.)

1. Allgemeine Angaben.

Lichte Weite zwischen den Widerlagern	45^m,00;
Spannweite der inneren Laibung	45^m,00;
Pfeilhöhe der inneren Laibung	5^m,50;
Halbmesser der inneren Laibung	48^m,773;
Bogenweite der inneren Laibung	54^0 56′ 42″;
Bogenstärke im Scheitel	1^m,50;
Bogenstärke in den Auflagflächen	2^m,00;
Spannweite des Bogenrückens	46^m,846;
Pfeilhöhe des Bogenrückens	5^m,226;
Halbmesser des Bogenrückens	55^m,102;
Weite des Bogenrückens	50^0 18′ 42″;
Entfernung der Querträger	1^m,760;
Breite der Brücke	4^m,50.

2. Belastungen. — Die permanente Last der Brücke per Längenmeter resultirt aus folgender Zusammenstellung:

Schienen und Zugehör	39 × 2 =	78	Kilogr.
Langschwellen aus Eichenholz	40 × 2 =	80	„
Holz für die Trottoirs	60 × 2 =	120	„
Bleche zwischen den Schienen		30	„
Geländer		32	„
Querträger		500	„
Bögen, Verticalstützen und obere Längsträger		1000	„
Gesammtes permanentes Gewicht		1840	Kilogr.
Die zufällige Belastung sei gleich jener einer Brücke mit geraden Trägern und derselben Oeffnung, d. h. . . .		5200	„
Die Gesammtlast per Meter der Brücke beträgt also . .		7040	Kilogr.

Da zwei Bögen vorhanden sind, so ergibt sich für einen derselben als permanente Last per Meter 920 Kilogr.
und als zufällige Belastung 2600 „
Summe . . . 3520 Kilogr.

3. Benennungen und allgemeine Formeln in dem Falle, als man die Belastung nur für die linke Hälfte der Brücke annimmt und von dem permanenten Gewichte absieht. — Wie aus Figur 3 (Tafel VIII) zu ersehen ist, wurde die Bogenachse der linken Hälfte in sechs gleiche Theile getheilt, deren jeder die Länge von $3^m,964$ hat. Durch diese Theilungspunkte wurden sodann Senkrechte auf diese Achse, d. h. Durchmesser gezogen und durch die Schnittpunkte dieser Senkrechten mit der äusseren Wölbung wurden schliesslich Verticale errichtet. Das permanente Gewicht, sowie die zufällige Belastung kann man bezüglich der horizontalen Projection des Gewölbrückens, d. i. der äusseren Gewölblinie, gleichförmig vertheilt annehmen, so dass für ein beliebiges Bogenstück die Verticale in dem Schwerpunkte durch den Mittelpunkt der horizontalen Projection des Gewölbrückens des betreffenden Bogenstückes geht.

Der Fuss des schmiedeisernen Bogens wird durch eine Ebene gebildet, welche auf der inneren Laibung senkrecht steht, und mittelst welcher sich der Bogen auf die auf den Widerlagern befestigten gusseisernen Lagerplatten stützt.

Für die Berechnung muss man den Bogen als an seinen Enden eingemauert betrachten, denn da die Auflagflächen eben sind, können sich dieselben nicht drehen; sollte die Berechnung aber ergeben, dass in den als eingemauert betrachteten Querschnitten an der äusseren Wölbung Spannungen herrschen, so folgt daraus, dass diese Hypothese nicht gemacht werden darf.

Die Unbekannten des Problems sind wieder:

M das Biegungsmoment im Scheitel,
P die Normalpressung,
S die Schubkraft;

in Functionen dieser Unbekannten lassen sich das Biegungsmoment, die Normalpressung und die Schubkraft für einen beliebigen Querschnitt sowohl

rechts als links vom Scheitel ausdrücken. Denkt man sich nun den Bogen im Scheitel zerschnitten, so wird an dem Gleichgewichte der beiden Hälften des Bogens nichts geändert, sobald man annimmt, dass in dem Scheitel jeder dieser Hälften zwei Kräfte P und S im Querschnittsmittelpunkte und ein Kräftepaar M wirken, so dass z. B. für den Querschnitt 4 des linken Halbbogens die zur Rechten desselben wirkenden Kräfte folgende sind: die zwei Kräfte P und S, welche im Mittelpunkte des Scheitelquerschnittes wirken, das Biegungsmoment M und das Gewicht von 2600 Kilogramm per Längenmeter in der Horizontalprojection der äusseren Wölbung der Bogenstücke 4, 5 und 5, 6. Man hat also, um das Biegungsmoment M_4, die Normalpressung P_4 und die Schubkraft S_4 in dem betrachteten Querschnitte zu bestimmen, folgende Formeln:

$$M_4 = M - 0{,}60 \,.\, Q - 7{,}86 \,.\, S + 2600 \times 7{,}99 \times \left(7{,}86 - \frac{7{,}99}{2}\right); ^{*)}$$

$$P_4 = 0{,}990 \,.\, Q - 0{,}160 \,.\, S + 2600 \times 7{,}99 \times 0{,}160;$$
$$S_4 = 0{,}160 \,.\, Q + 0{,}990 \,.\, S - 2600 \times 7{,}99 \times 0{,}990.$$

Für den Querschnitt 4 des rechten Halbbogens kann man die analogen Grössen dadurch ausdrücken, dass man in den vorhergehenden Formeln die blos numerischen Glieder weglässt, da dieselben von der zufälligen Belastung von 2600 Kilogramm per Längenmeter herrühren, und sodann das Zeichen der Glieder mit S ändert. Man erhält also:

$$M'_4 = M - 0{,}60 \,.\, Q + 7{,}86 \,.\, S;$$
$$P'_4 = 0{,}990 \,.\, Q + 0{,}160 \,.\, S;$$
$$S'_4 = 0{,}160 \,.\, Q + 0{,}990 \,.\, S.$$

Auf diese Weise lässt sich die Tabelle auf Seite 422 zusammenstellen.

4. Bestimmung der Unbekannten. — Die zwei als getrennt betrachteten Halbbögen werden sich unter der Einwirkung der auf dieselben wirkenden Kräfte deformiren; diese Deformationen müssen aber derartige sein, dass der Scheitelquerschnittt des einen Halbbogens jeder-

*) Es ist hiebei zu beachten, dass Figur 3, Tafel VIII die Hebelarme der Kräfte gibt, welche in dem Ausdrucke für die Biegungsmomente vorkommen; Figur 9 hingegen gibt den Werth der Sinus und Cosinus der Winkel, welche die Gewichte und der Horizontalschub mit den Querschnitten einschliessen. Diese Sinus und Cosinus dienen dazu, die Normalpressungen und die Schubkräfte auszudrücken.

Querschnitte 1	Biegungsmomente 2	Normalpressungen 3	Schubkräfte 4
		I. Linker Halbbogen.	
0	$M_0 = M - 5{,}36 \,.\, Q - 22{,}96 \,.\, S + 685035$	$P_0 = 0{,}894 \,.\, Q - 0{,}460 \,.\, S + 28010$	$S_0 = 0{,}460 \,.\, Q + 0{,}894 \,.\, S - 54437$
1	$M_1 = M - 3{,}72 \,.\, Q - 19{,}33 \,.\, S + 485831$	$P_1 = 0{,}926 \,.\, Q - 0{,}388 \,.\, S + 19863$	$S_1 = 0{,}388 \,.\, Q + 0{,}926 \,.\, S - 47406$
2	$M_2 = M - 2{,}38 \,.\, Q - 15{,}59 \,.\, S + 315868$	$P_2 = 0{,}954 \,.\, Q - 0{,}315 \,.\, S + 12989$	$S_2 = 0{,}315 \,.\, Q + 0{,}954 \,.\, S - 39339$
3	$M_3 = M - 1{,}35 \,.\, Q - 11{,}76 \,.\, S + 179735$	$P_3 = 0{,}976 \,.\, Q - 0{,}237 \,.\, S + 7370$	$S_3 = 0{,}237 \,.\, Q + 0{,}976 \,.\, S - 30350$
4	$M_4 = M - 0{,}60 \,.\, Q - 7{,}86 \,.\, S + 80395$	$P_4 = 0{,}990 \,.\, Q - 0{,}160 \,.\, S + 3324$	$S_4 = 0{,}160 \,.\, Q + 0{,}990 \,.\, S - 20566$
5	$M_5 = M - 0{,}15 \,.\, Q - 3{,}94 \,.\, S + 20176$	$P_5 = 0{,}999 \,.\, Q - 0{,}082 \,.\, S + 853$	$S_5 = 0{,}082 \,.\, Q + 0{,}999 \,.\, S - 10390$
6	$M_6 = M$	$P_6 = 1{,}000 \,.\, Q$	$S_6 = \ldots\ldots\ldots + 1{,}000 \,.\, S$
		II. Rechter Halbbogen.	
0	$M_0^1 = M - 5{,}36 \,.\, Q + 22{,}96 \,.\, S$	$P_0^1 = 0{,}894 \,.\, Q + 0{,}460 \,.\, S$	$S_0^1 = 0{,}460 \,.\, Q - 0{,}894 \,.\, S$
1	$M_1^1 = M - 3{,}72 \,.\, Q + 19{,}33 \,.\, S$	$P_1^1 = 0{,}926 \,.\, Q + 0{,}388 \,.\, S$	$S_1^1 = 0{,}388 \,.\, Q - 0{,}926 \,.\, S$
2	$M_2^1 = M - 2{,}38 \,.\, Q + 15{,}59 \,.\, S$	$P_2^1 = 0{,}954 \,.\, Q + 0{,}315 \,.\, S$	$S_2^1 = 0{,}315 \,.\, Q - 0{,}954 \,.\, S$
3	$M_3^1 = M - 1{,}35 \,.\, Q + 11{,}76 \,.\, S$	$P_3^1 = 0{,}976 \,.\, Q + 0{,}237 \,.\, S$	$S_3^1 = 0{,}237 \,.\, Q - 0{,}976 \,.\, S$
4	$M_4^1 = M - 0{,}60 \,.\, Q + 7{,}86 \,.\, S$	$P_4^1 = 0{,}990 \,.\, Q + 0{,}160 \,.\, S$	$S_4^1 = 0{,}160 \,.\, Q - 0{,}990 \,.\, S$
5	$M_5^1 = M - 0{,}15 \,.\, Q + 3{,}94 \,.\, S$	$P_5^1 = 0{,}999 \,.\, Q + 0{,}082 \,.\, S$	$S_5^1 = 0{,}082 \,.\, Q - 0{,}999 \,.\, S$
6	$M_6^1 = M$	$P_6^1 = 1{,}000 \,.\, Q$	$S_6^1 = \ldots\ldots\ldots - 1{,}000 \,.\, S$

zeit mit jenem des anderen im Contact bleibt. Es sind daher folgende drei geometrische Bedingungen zu erfüllen:

1. und 2. Die horizontale und verticale Verrückung des Mittelpunktes des Scheitelquerschnittes muss für den linken Halbbogen entgegengesetzt gleich sein mit den analogen Verrückungen des Mittelpunktes des Scheitelquerschnittes des rechten Halbbogens.

3. Die Drehung des Scheitelquerschnittes des linken Halbbogens muss entgegengesetzt gleich sein jener des rechten Halbbogens.

Die Werthe der Unbekannten M, Q, S, welche diesen drei Bedingungen entsprechen, findet man, indem man die Deformationsarbeit des ganzen Bogens in einer Function dieser Unbekannten ausdrückt und deren Differentialquotienten mit Bezug auf diese Unbekannten gleich Null setzt.

Nennt man nun

$\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \ldots \Omega_6$ die Flächen der Querschnitte 0, 1, 2 . . . 6 des Bogens,

$I_0, I_1, I_2, \ldots I_6$ deren Trägheitsmomente;

macht man

$$\sum \frac{M^2+M'^2}{I} = \frac{1}{3}\left[\frac{M^2_0+M'^2_0}{I_0} + 4\,\frac{M^2_1+M'^2_1}{I_1} + 2\,\frac{M^2_2+M'^2_2}{I_2} + 4\,\frac{M^2_3+M'^2_3}{I_3} + 2\,\frac{M^2_4+M'^2_4}{I_4} + 4\,\frac{M^2_5+M'^2_5}{I_5} + \frac{M^2_6+M'^2_6}{I_6}\right],$$

$$\sum \frac{P^2+P'^2}{\Omega} = \frac{1}{3}\left[\frac{P^2_0+P'^2_0}{\Omega_0} + 4\,\frac{P^2_1+P'^2_1}{\Omega_1} + 2\,\frac{P^2_2+P'^2_2}{\Omega_2} + 4\,\frac{P^2_3+P'^2_3}{\Omega_3} + 2\,\frac{P^2_4+P'^2_4}{\Omega_4} + 4\,\frac{P^2_5+P'^2_5}{\Omega_5} + \frac{P^2_6+P'^2_6}{\Omega_6}\right];$$

berücksichtigt man ferner, dass die Länge jedes Bogenstückes in der Achse gemessen $3^m,964$ beträgt, und vernachlässigt man die Deformationsarbeit, welche der Verschiebung entspricht, so erhält man als Ausdruck für die Deformationsarbeit des ganzen Bogens die Formel

$$\frac{3,964}{2\,E}\left[\sum \frac{M^2+M'^2}{I} + \sum \frac{P^2+P'^2}{\Omega}\right],$$

welche, durch den Factor $\frac{3,964}{2E}$ dividirt — was jene Gleichungen nicht ändert, welche daraus abgeleitet werden, indem man deren Differentialquotienten nach M, Q, S gleich Null setzt — folgende Formel gibt:

$$\sum \frac{M^2 + M'^2}{I} + \sum \frac{P^2 + P'^2}{\Omega}. \qquad (1)$$

Die Höhe der Bogenquerschnitte vermindert sich nach Massgabe der Entfernung von den Auflagern; aber mit Ausnahme des Steges, dessen Höhe für jeden der Querschnitte 0, 1, 2, . . . 6 in Figur 3, Tafel VIII eingeschrieben ist, behalten alle anderen Constructionstheile, welche den Bogen bilden, ihre Dimensionen in der ganzen Länge des Bogens bei. Die allgemeine Form des Bogenquerschnittes ist durch Figur 8 gegeben.

In der folgenden Tabelle sind die Werthe für die Flächen und für die Trägheitsmomente der Querschnitte 0, 1, 2, . . 6 angeführt, sowie auch deren logarithmische Complemente, d. h. die Logarithmen der reciproken Werthe, welche zur Berechnung der Formel (1) dienen.

Querschnitte 1	Querschnittsflächen 2	Trägheitsmomente der Querschnitte 3	Logarithmische Complemente der Flächen 4	Logarithmische Complemente der Trägheitsmomente 5
0	$\Omega_0 = 0{,}039024$	$I_0 = 0{,}022582$	1,4086682	1,6462376
1	$\Omega_1 = 0{,}037224$	$I_1 = 0{,}018779$	1,4291770	1,7263275
2	$\Omega_2 = 0{,}035666$	$I_2 = 0{,}015822$	1,4477456	1,8007386
3	$\Omega_3 = 0{,}034464$	$I_3 = 0{,}013754$	1,4626343	1,8615710
4	$\Omega_4 = 0{,}033624$	$I_4 = 0{,}012409$	1,4733506	1,9062632
5	$\Omega_5 = 0{,}033144$	$I_5 = 0{,}011675$	1,4795951	1,9327431
6	$\Omega_6 = 0{,}033024$	$I_6 = 0{,}011498$	1,4811703	1,9393777

Substituirt man nun in der Formel (1) für M_0, M'_0; M_1, M'_1; etc., P_0, P'_0; P_1, P'_1; etc. die Ausdrücke in Functionen von M, Q, S, wie dieselben in der Tabelle auf Seite 422 angeführt wurden, und für I_0, I_1, etc., Ω_0, Ω_1, etc. deren oben angegebene Werthe, und führt man alle numerischen Operationen aus, was mit grosser Genauigkeit und Ein-

fachheit geschehen kann, indem man sich der Logarithmen bedient, so erhält man

$$\sum \frac{M^2 + M'^2}{I} = 843{,}51 \,.\, M^2 - 1247{,}51 \,.\, 2\, M\, Q + 81\,961\,733 \,.\, 2\, M$$
$$+ 3686{,}7 \,.\, Q^2 - 240\,653\,093 \,.\, 2\, Q + 126\,101\, S^2 - 1\,354\,367\,066 \,.\, 2\, S;$$

$$\sum \frac{P^2 + P'^2}{\Omega} = 322{,}5 \,.\, Q^2 + 1\,494\,668 \,.\, 2\, Q + 24 \,.\, S^2 - 555\,444 \,.\, 2\, S,$$

und aus Formel (1) wird dann

$$\left.\begin{array}{l} 843{,}51 \,.\, M^2 - 1247{,}51 \,.\, 2\, M\, Q + 81\,961\,733 \,.\, 2\, M + 4009{,}20 \,.\, Q^2 \\ - 239\,158\,425 \,.\, 2\, Q + 126\,125 \,.\, S^2 - 1\,354\,922\,510 \,.\, 2\, S. \end{array}\right\} (2)$$

Setzt man die Differentialquotienten dieses Ausdruckes nach M, Q, S gleich Null, so erhält man folgende drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} 843{,}51 \,.\, M - 1247{,}51 \,.\, Q + 81\,961\,733 &= 0, \\ - 1247{,}51 \,.\, M + 4009{,}20 \,.\, Q - 239\,158\,425 &= 0, \\ 126125 \,.\, S - 1\,354\,922\,510 &= 0, \end{aligned}$$

wobei zu beachten ist, dass die zwei ersten Gleichungen nur die Unbekannten M und Q enthalten, während die letzte nur die Unbekannte S enthält.

Aus diesen Gleichungen ergibt sich

$$\begin{aligned} M &= - 16\,527, \\ P &= 54\,523, \\ S &= 10\,743. \end{aligned}$$

5. Mittellinie des Druckes, grösste Beanspruchung per Quadratmeter und Senkung des Scheitels bei Berücksichtigung des permanenten Gewichtes und einer Belastung sowohl rechts als links vom Scheitel. — Da in diesem Falle die Belastung symmetrisch vertheilt ist, hat man $S = 0;$

lässt man ferner das permanente Gewicht ausser Beachtung, so dass man nur die Belastung längs der ganzen Brücke in Rechnung nimmt, so ergibt sich für den Scheitel

$$\begin{aligned} M &= - 16\,527 \times 2 = - 33\,054, \\ Q &= 54\,523 \times 2 = 109\,046. \end{aligned}$$

Da die Belastung 2600 Kilogramm per Längenmeter beträgt, während das Gesammtgewicht, das permanente Gewicht mit inbegriffen, 3520 Kilogramm ist, so erhält man für diesen letzteren Fall

$$M = -33\,054 \times \frac{3520}{2600} = -44\,749,$$

$$Q = \quad 109\,046 \times \frac{3520}{2600} = \quad 147\,626.$$

Kennt man nun für den betrachteten Fall der totalen Belastung das Biegungsmoment und den Horizontalschub im Scheitel, so kann man leicht das Biegungsmoment, die Normalpressung und die Schubkraft für jeden der Querschnitte 0, 1, 2, . . . 6 berechnen. Durch Division der Biegungsmomente durch die correspondirenden Normalpressungen erhält man die Entfernungen der Druckmittelpunkte von den Querschnittsmittelpunkten. Mit Hilfe der Formel

$$\frac{\Omega}{P} \pm \frac{M\,v}{I}$$

gelangt man zu den Werthen für die grösste Pressung per Quadratmeter an der inneren und äusseren Wölbung der Querschnitte 0, 1, 2, . . . 6.

Alle diese Resultate sind in folgender Tabelle zusammengestellt.

Querschnitte	Biegungsmomente	Normalpressungen	Schubkräfte	Mittellinie des Druckes	Pressung per Quadratmeter	
					an der inneren Wölbung	an der äusseren Wölbung
1	2	3	4	5	6	7
0	+ 91 387	169 924	— 5788	+ 0,538	8 401 300	307 500
1	+ 63 807	163 657	— 6901	+ 0,390	7 539 600	1 253 600
2	+ 31 527	158 444	— 6755	+ 0,199	6 155 900	2 728 700
3	— 719	154 082	— 6101	— 0,005	4 428 467	4 513 133
4	— 24 626	150 673	— 4223	— 0,163	2 943 300	6 018 900
5	— 39 584	148 656	— 1961	— 0,266	1 925 300	7 044 900
6	— 44 755	147 648	0	— 0,303	1 551 700	7 390 300

Zur Berechnung der Senkung des Scheitels kann man sich der Formel*)

$$\eta = \frac{3,964}{E} \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{M_0\, x_0}{I_0} + 4\, \frac{M_1\, x_1}{I_1} + 2\, \frac{M_2\, x_2}{I_2} + \ldots + 4\, \frac{M_5\, x_5}{I_5} \right)$$
$$+ \frac{3,964}{E} \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{P_0 \sin \varphi_0}{\Omega_0} + 4\, \frac{P_1 \sin \varphi_1}{\Omega_1} + 2\, \frac{P_2 \sin \varphi_2}{\Omega_2} + \ldots + 4\, \frac{P_5 \sin \varphi_5}{\Omega_5} \right)$$

bedienen, in welcher x_0, x_1, x_2, ... x_5 die Entfernungen der Mittelpunkte der Querschnitte 0, 1, 2, ... 5 von der durch den Scheitel gehenden Verticalebene und φ_0, φ_1, φ_2, ... φ_5 die Winkel, welche diese Querschnitte mit derselben Ebene einschliessen, bezeichnen.

Substituirt man in dieser Formel für die Biegungsmomente M_0, M_1, M_2, ... und für die Normalpressungen P_0, P_1, P_2, ... deren Werthe, wie sie sich aus der letzten Tabelle ergeben, für x_0, x_1, x_2, ..., $\sin \varphi_0$, φ_1, φ_2, ... die aus Tafel VIII sich ergebenden Werthe, und endlich für Ω_0, Ω_1, Ω_2, ..., I_0, I_1, I_2, ... die in Nummer 4 angeführten Werthe, so erhält man

$$\frac{1}{3} \left(\frac{M_0\, x_0}{I_0} + 4\, \frac{M_1\, x_1}{I_1} + 2\, \frac{M_2\, x_2}{I_2} + \ldots + 4\, \frac{M_5\, x_5}{I_5} \right) = 110\,212\,000,$$
$$\frac{1}{3} \left(\frac{P_0 \sin \varphi_0}{\Omega_0} + 4\, \frac{P_1 \sin \varphi_1}{\Omega_1} + 2\, \frac{P_2 \sin \varphi_2}{\Omega_2} + \ldots + 4\, \frac{P_5 \sin \varphi_5}{\Omega_5} \right) = 6\,220\,000;$$

folglich ergibt sich für $E = 18\,000\,000\,000$

$$\eta = 0^{\mathrm{m}},026.$$

6. Mittellinie des Druckes und grösste Beanspruchung per Quadratmeter bei Berücksichtigung des Eigengewichtes und bei Annahme, dass nur die linke Hälfte der Brücke belastet wird. — In diesem Falle erhält man die Werthe von M, Q, S, indem man zu den Werthen, welche diese Grössen für das alleinige permanente Gewicht haben, jene Werthe addirt, welche sich bei alleiniger Belastung der linken Hälfte hiefür ergeben. Für das alleinige permanente Gewicht hätte man

*) Diese Formel ist eine Verallgemeinerung der in Nummer 5 des 4. Capitels „Betrachtung einer Halle aus schmiedeisernen Bundgespärren ohne Zugstangen“ gewählten Formel und lässt sich in gleicher Weise ableiten.

$$M = -33\,054 \times \frac{920}{2600} = -11\,696,$$

$$Q = \quad 109\,046 \times \frac{920}{2600} = \quad 38\,585,$$

$$S = 0;$$

für die alleinige Belastung der linken Hälfte würde man die in Nummer 4 erhaltenen Werthe von M, Q, S haben; hiemit ergibt sich für den hier zu betrachtenden Fall

$$M = -11\,696 - 16\,527 = -28\,223,$$

$$Q = \quad 38\,585 + 54\,523 = \quad 93\,108,$$

$$S = \quad 10\,743.$$

Die in nachfolgender Tabelle zusammengestellten Daten lassen sich mit den soeben erhaltenen Werthen von M, Q, S genau so wie in Nummer 5 berechnen.

I. Linker Halbbogen					II. Rechter Halbbogen				
Querschnitte 1	Biegungs-momente 2	Normal-pressungen 3	Schub-kräfte 4	Mittellinie des Druckes 5	Querschnitte 1	Biegungs-momente 2	Normal-pressungen 3	Schub-kräfte 4	Mittellinie des Druckes 5
0	+ 153498	116223	— 21257	+ 1,321	0	— 38218	98112	+ 13964	— 0,389
1	+ 75498	109001	— 18172	+ 0,693	1	+ 4991	97444	+ 9467	+ 0,051
2	+ 10336	103045	— 13681	+ 0,100	2	+ 29434	96824	+ 5160	+ 0,304
3	— 36924	98322	— 8538	— 0,375	3	+ 36017	96044	+ 842	+ 0,375
4	— 59725	94976	— 2311	— 0,629	4	+ 28660	95090	— 3016	+ 0,301
5	— 57206	93307	+ 4300	— 0,612	5	+ 7273	94215	— 6774	+ 0,077
6	— 28228	93125	+ 10743	— 0,303	6	— 28228	93125	— 10743	— 0,303

Der Vergleich dieser Tabellen mit jener, welche in der vorhergehenden Nummer erhalten wurde, zeigt, dass die grössten Biegungsmomente für den Fall der Belastung über die ganze Brücke viel geringer sind als im Falle der Belastung nur einer Hälfte. In diesem letzteren Falle beträgt die grösste Pressung des Eisens per Quadratmeter

$$\frac{116\,223}{0{,}039024} + \frac{153\,498 \times 1{,}00}{0{,}022582} = 9\,775\,000,$$

welcher Werth viel grösser ist als jener, welcher im Falle der completen Belastung erhalten wurde.

Die grösste Tangentialspannung findet in dem linken Querschnitte 0 statt, da dort die Schubkraft ein *Maximum* ist. Für diesen Querschnitt ist

$$G_0 = \frac{1}{8}(0{,}250 \times 2{,}024^2 - 0{,}038 \times 2{,}000^2 - 0{,}176 \times 1{,}976^2 - 0{,}024 \times 1{,}800^2) = 0{,}013397,$$

$$I_0 = 0{,}022582,$$

so dass sich die grösste Tangentialspannung mit

$$\frac{21257 \times 0{,}013397}{0{,}022582 \times 0{,}012} = 1050900$$

berechnet.

7. Einfluss der Aenderungen der Temperatur. — Wir nehmen an, dass der Bogen bei der Temperatur t aufgestellt worden ist, bei welcher derselbe genau jene Dimensionen hat, welche nothwendig sind, um ihn auf seine Widerlager montiren zu können, ohne hiebei andere elastische Kräfte hervorzurufen als solche, welche dem Eigengewichte und den Belastungen entsprechen.

Wenn der Bogen frei wäre, so würde derselbe bei der Temperatur t' eine zur ursprünglichen Form ähnliche geometrische Form haben, so dass der Winkel der äussersten Querschnitte in beiden Fällen genau derselbe wäre; aber die Entfernung zwischen diesen beiden Querschnitten würde anstatt $\frac{45^{\mathrm{m}},000 + 46^{\mathrm{m}},846}{2} = 45^{\mathrm{m}},923$, das ist gleich der Entfernung der Mittelpunkte der Stützflächen auf den Widerlagern, um den Werth $\frac{45^{\mathrm{m}},923}{82500}(t' - t)$ zu gross sein.

Müsste man also den Bogen bei der Temperatur t' aufstellen, so könnte dies nicht geschehen, ohne elastische Kräfte zu erzeugen, welche von dem Eigengewichte und der Belastung unabhängig sind und nur dem Wachsen der Temperatur $t' - t$ entsprechen.

Die Deformationsarbeit des Bogens, welche dem Biegungsmomente M und den im Scheitel wirkenden Kräften Q und S entspricht, wird aus

der Formel (2) in Nummer 4 erhalten, indem man dieselbe mit dem Factor $\frac{3{,}964}{2\,E}$ multiplicirt und hierin die Glieder ersten Grades in Bezug auf M, Q, S weglässt, da dieselben von der Belastung abhängen; diese Arbeit wird also durch folgende Formel gegeben:

$$\frac{3{,}964}{2\,E}(843{,}51\,.\,M^2 - 1247{,}51\,.\,2\,M\,Q + 4009{,}2\,.\,Q^2 + 126125\,.\,S^2).$$

Um die einzig und allein dem Wachsen der Temperatur $t' - t$ entsprechenden Werthe von M, Q, S zu finden, muss man zu diesem Ausdrucke für die Deformationsarbeit noch den Ausdruck $-\frac{45{,}923}{82500}(t' - t)\,Q$ hinzufügen und sodann die Differentialquotienten nach M, Q, S gleich Null setzen. Multiplicirt man die so erhaltenen Gleichungen mit dem numerischen Factor $\frac{E}{3{,}964}$, wobei $E = 18\,000\,000\,000$ ist, so dass

$$\frac{E}{3{,}964} \times \frac{45{,}923}{82500} = 2\,534\,000,$$

so ergeben sich die obgenannten Gleichungen in folgender Form:

$$843{,}51\,.\,M - 1247{,}51\,.\,Q = 0,$$
$$-1247{,}51\,.\,M + 4009{,}2\,.\,Q = 2\,534\,000\,.\,(t' - t),$$
$$126\,125\,.\,S = 0.$$

Die letzte Gleichung gibt sogleich $S = 0$, was sich übrigens voraussehen lässt, denn die Aenderungen der Temperatur erzeugen in den beiden Hälften des Bogens dieselbe Wirkung und können daher im Scheitelquerschnitte keine Schubkraft hervorrufen.

Die zwei anderen Gleichungen geben

$$M = 1743\,(t' - t),$$
$$Q = 1171\,(t' - t).$$

Nach Substitution der erhaltenen Werthe von M, Q und S in die zweite Hälfte der Tabelle in Nummer 3, welche sich auf den unbelasteten Bogen bezieht, kann man das Biegungsmoment, die Normalpressung und die Schubkraft für jeden der Querschnitte 0, 1, 2, . . . 6 berechnen. Aus diesen Resultaten lässt sich die folgende Tabelle zusammenstellen.

Quer-schnitte 1	Biegungsmomente 2	Normal-pressungen 3	Schubkräfte 4
0	$M_0^1 = -4533 \,.\, (t'-t)$	$P_0^1 = 1047 \,.\, (t'-t)$	$S_0^1 = 539 \,.\, (t'-t)$
1	$M_1^1 = -2613 \,.\, (t'-t)$	$P_1^1 = 1084 \,.\, (t'-t)$	$S_1^1 = 454 \,.\, (t'-t)$
2	$M_2^1 = -1044 \,.\, (t'-t)$	$P_2^1 = 1117 \,.\, (t'-t)$	$S_2^1 = 369 \,.\, (t'-t)$
3	$M_3^1 = +\ 163 \,.\, (t'-t)$	$P_3^1 = 1143 \,.\, (t'-t)$	$S_3^1 = 277 \,.\, (t'-t)$
4	$M_4^1 = +1040 \,.\, (t'-t)$	$P_4^1 = 1159 \,.\, (t'-t)$	$S_4^1 = 187 \,.\, (t'-t)$
5	$M_5^1 = +1567 \,.\, (t'-t)$	$P_5^1 = 1170 \,.\, (t'-t)$	$S_5^1 = 96 \,.\, (t'-t)$
6	$M_6^1 = +1743 \,.\, (t'-t)$	$P_6^1 = 1171 \,.\, (t'-t)$	$S_6^1 = 0$

Wenn die mittlere Temperatur, bei welcher der Bogen aufgestellt wird, 15° ist, und wenn die Grenzen, zwischen welchen die Temperatur variiren kann, 40° und — 10° ist, so muss man offenbar bei Betrachtung dieser zwei äussersten Fälle

für die Temperatur von 40° . . . $t'-t = 40-15 = 25$,
für die Temperatur von — 10° . . . $t'-t = -10-15 = -25$

machen.

Wir werden nur den letzteren Fall untersuchen, da hiebei in der Nähe der Auflagflächen die Biegungsmomente positiv, beim Scheitel hingegen negativ sind, wie jene, welche im Falle der completen Belastung der Brücke für jede Bogenhälfte und im Falle der nur linksseitigen Belastung für die linke Bogenhälfte gefunden wurden.

Macht man also in der letzten Tabelle $t'-t = -25$ und addirt diese Resultate zu jenen, welche in Nummer 6 für die linke Hälfte des Bogens erhalten wurden, so kann man die auf Seite 432 befindliche Tabelle zusammensetzen.

Aus diesen Resultaten erkennt man, wie gross bei eisernen Bögen mit ebenen Auflagflächen der Einfluss der Aenderungen der Temperatur ist. Das Biegungsmoment in den Auflagflächen, welches bei der mittleren Temperatur 153 498 Kilogramm beträgt, wächst bei derselben Belastung bis zu 267 923 Kilogramm, wenn die Temperatur bis — 10° sinkt. Die grösste Pressung des Eisens per Quadratmeter findet an der inneren Laibung der Auflagfläche statt und ist deren Werth

$$\frac{90\,048}{0{,}039\,024} + \frac{266\,823 \times 1{,}00}{0{,}022\,582} = 14\,122\,000;$$

daraus folgt, dass der Bogenanfang an der inneren Laibung verstärkt werden muss.

Auf der äusseren Wölbung beträgt die Pressung im selben Querschnitte

$$\frac{90\,048}{0{,}039\,024} - \frac{266\,823 \times 1{,}00}{0{,}022\,582} = -\,9\,508\,000,$$

d. h. es ist statt einer Pressung eine Spannung vorhanden.

Linker Halbbogen				
Querschnitte 1	Biegungsmomente 2	Normalpressungen 3	Schubkräfte 4	Mittellinie des Druckes 5
0	+ 267 923	90 048	— 34 732	+ 2,975
1	+ 140 823	81 901	— 29 522	+ 1,719
2	+ 36 436	75 120	— 22 906	+ 0,484
3	— 40 999	69 747	— 15 463	— 0,587
4	— 85 725	66 001	— 6 986	— 1,298
5	— 96 331	64 057	+ 1 900	— 1,503
6	— 72 803	63 850	+ 10 743	— 1,124

8. Schlussfolgerung. — Dieses letzte Resultat lässt uns erkennen, dass der Bogen die Neigung hat, sich an der äusseren Wölbung von den Widerlagern abzuheben, und dass die ganze Pressung sich in der Nähe der inneren Wölbung auf die Auflager überträgt. Der Bogen kann also nicht als eingemauert betrachtet werden, soferne man nicht die Einmauerung durch specielle Anordnungen erreicht; was aber nicht leicht thunlich ist, wenn man die grossen Werthe des Biegungsmomentes in den Auflagflächen in Rechnung zieht.

Da die ganze Pressung auf die Widerlager sich gegen die innere Laibung concentrirt, so haben die englischen Ingenieure, welche mehr

als alle anderen derartige Bögen angewendet haben, dieselben endlich verlassen, und zwar speciell wegen der Zerstörung des Mauerwerkes der Widerlager.

Aus diesem Grunde construirt man gegenwärtig im Allgemeinen die eisernen Bogenbrücken mit cylindrischen Auflagflächen.

11. Capitel.

Betrachtung einer eisernen Bogenbrücke mit cylindrischen Auflagflächen.

(Tafel VIII.)

1. Allgemeine Angaben. — Dieselben sind genau die gleichen wie bei der soeben betrachteten Brücke.

2. Belastungen. — Die Belastungen seien auch dieselben.

3. Benennungen und allgemeine Formeln im Falle der Belastung der ganzen Brücke. — Wie aus Figur 4 (Tafel VIII) zu ersehen ist, wurde die Achse des Halbbogens in sechs gleiche Theile getheilt, deren jeder die Länge von $3^m,964$ hat. Durch die Theilungspunkte wurden Senkrechte auf die Bogenachse gezogen, und durch die Schnittpunkte dieser Senkrechten mit der äusseren Wölbung wurden Verticale errichtet. Wir nehmen nun an, dass jedes Bogenstück ausser seinem Eigengewichte noch das Gewicht der Constructionstheile der Brücke, sowie der Belastung zu tragen hat, welche zwischen den beiden durch die Enden seines Gewölbrückens gehenden Verticalen liegen, und dass diese Gewichte bezüglich der horizontalen Projection des betreffenden Gewölbrückens gleichförmig vertheilt sind, so dass der Schwerpunkt von den zwei obgenannten Verticalen gleich weit entfernt ist.

Die Enden des Bogens werden durch cylindrische Flächen gebildet, mittelst welchen sich derselbe auf die gusseisernen Auflager stützt, welche gleichfalls cylindrische Oberflächen haben, jedoch mit etwas grösserem Halbmesser.

Wenn die Enden des Bogens und die Lagerplatten nicht zusammendrückbar wären, so würde die Berührung zwischen denselben nur nach jener Erzeugenden der cylindrischen Fläche stattfinden, welche von der Achse des Bogens getroffen wird; wegen der Zusammendrückbarkeit findet aber die Berührung in einer kleinen Fläche statt (immerhin genügend, dass die Gefahr des Zerdrückens, sei es der Enden des Bogens,

sei es der Lagerplatten, nicht auftritt); der Mittelpunkt des Druckes kann auch jetzt mit grosser Annäherung in dem Punkte angenommen werden, wo die Bogenachse die Lagerplatte trifft.

Die Anwendung von Lagerplatten mit cylindrischer Fläche bietet den wesentlichen Vortheil, dass — da der Druck auf die Widerlager im Mittelpunkte der Lagerplatten stattfindet — diese den Druck gleichförmig auf das Mauerwerk vertheilen, wie auch im Uebrigen die Vertheilung der Last auf der Brücke sei. Dieser Vortheil ist so gross, dass für eiserne Bögen die cylindrischen Auflager immer den ebenen vorzuziehen sind.

An den Enden des Bogens ist das Biegungsmoment Null, und folglich ist nur der Horizontalschub unbekannt, wie auch die Vertheilung der Last auf den Bogen sei.

Um diese Unbekannte zu bestimmen, hat man folgende geometrische Bedingung:

Bei der Deformation des Bogens bleibt die Entfernung der Stützpunkte an den Enden constant.

Die an jedem Ende des Bogens wirkenden Kräfte sind die folgenden:

Q der Horizontalschub,

R die verticale Reaction, gleich der Hälfte des Gesammtgewichtes.

Die Belastung jedes der Bogenstücke 0, 1; 1, 2; etc. ergibt sich durch Multiplication der Horizontalprojection seines Gewölbrückens mit dem früher erhaltenen Gewichte von 3520 Kilogramm; die verticale Reaction, welche die Hälfte des den Bogen belastenden Gesammtgewichtes beträgt, hat als Werth

$$R = 3520 \times 23{,}423 = 82\,449.$$

Mit Hilfe des Horizontalschubes Q und der bekannten Gewichte ist es jetzt leicht, das Biegungsmoment, die Normalpressung und die Schubkraft für jeden der Querschnitte 0, 1, 2, . . . 6 auszudrücken. Für den Querschnitt 2 hat man z. B.

$$M_2 = 2{,}98 \,.\, Q - 737 \,.\, R + 3520 \times 7{,}56 \left(7{,}83 - \frac{7{,}56}{2}\right),$$

$$P_2 = 0{,}954 \,.\, Q + 0{,}315\,(R - 3520 \times 7{,}56),$$

$$S_2 = 0{,}315 \,.\, Q - 0{,}954\,(R - 3520 \times 7{,}56).$$

Substituirt man für R dessen Werth und führt man die numerischen Operationen durch, so kann man die folgende Tabelle zusammensetzen, in welcher nur die Unbekannte Q vorkommt.

Querschnitte	Biegungsmomente	Normalpressungen	Schubkräfte
1	2	3	4
0	$M_0 = 0$	$P_0 = 0{,}894 \,.\, Q + 37\,922$	$S_0 = 0{,}460 \,.\, Q - 73\,700$
1	$M_1 = 1{,}64 \,.\, Q - 269\,972$	$P_1 = 0{,}926 \,.\, Q + 26\,892$	$S_1 = 0{,}388 \,.\, Q - 64\,180$
2	$M_2 = 2{,}98 \,.\, Q - 499\,528$	$P_2 = 0{,}954 \,.\, Q + 17\,586$	$S_2 = 0{,}315 \,.\, Q - 53\,259$
3	$M_3 = 4{,}01 \,.\, Q - 683\,693$	$P_3 = 0{,}976 \,.\, Q + 9\,978$	$S_3 = 0{,}237 \,.\, Q - 41\,089$
4	$M_4 = 4{,}76 \,.\, Q - 818\,394$	$P_4 = 0{,}990 \,.\, Q + 4\,500$	$S_4 = 0{,}160 \,.\, Q - 27\,844$
5	$M_5 = 5{,}21 \,.\, Q - 899\,852$	$P_5 = 0{,}999 \,.\, Q + 1\,155$	$S_5 = 0{,}082 \,.\, Q - 14\,066$
6	$M_6 = 5{,}36 \,.\, Q - 927\,167$	$P_6 = 1{,}000 \,.\, Q$	$S_6 = 0.$

4. Bestimmung des Werthes der Unbekannten. — Nennt man $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \ldots \Omega_6$ die Flächen der Querschnitte 0, 1, 2, . . . 6 des Bogens,

$I_0, I_1, I_2, \ldots I_6$ die Trägheitsmomente dieser Querschnitte, und macht man

$$\sum \frac{M^2}{I} = \frac{1}{3}\left(\frac{M^2_0}{I_0} + 4\frac{M^2_1}{I_1} + 2\frac{M^2_2}{I_2} + 4\frac{M^2_3}{I_3} + 2\frac{M^2_4}{I_4} + 4\frac{M^2_5}{I_5} + \frac{M^2_6}{I_6}\right),$$

$$\sum \frac{P^2}{\Omega} = \frac{1}{3}\left(\frac{P^2_0}{\Omega_0} + 4\frac{P^2_1}{\Omega_1} + 2\frac{P^2_2}{\Omega_2} + 4\frac{P^2_3}{\Omega_3} + 2\frac{P^2_4}{\Omega_4} + 4\frac{P^2_5}{\Omega_5} + \frac{P^2_6}{\Omega_6}\right),$$

so erhält man bei Berücksichtigung, dass die Länge der Bogenstücke 0, 1; 1, 2; 2, 3; . . . 5, 6 in der Achse gemessen $3^m{,}64$ beträgt, als Ausdruck für die Deformationsarbeit des ganzen Bogens (bei Vernachlässigung des sehr kleinen Theiles dieser Arbeit, welcher der Verschiebung entspricht) die Formel

$$2 \,.\, \frac{3{,}964}{2E}\left[\sum \frac{M^2}{I} + \sum \frac{P^2}{\Omega}\right],$$

oder die folgende, indem man den Factor $2 \,.\, \frac{3{,}964}{2E}$ weglässt, was die Gleichung nicht ändert, welche man daraus ableitet, indem man den Differentialquotienten nach Q gleich Null setzt,

$$\sum \frac{M^2}{I} + \sum \frac{P^2}{\Omega}. \qquad (1)$$

Der Querschnitt des Bogens wird durch Figur 8 (Tafel VIII) dargestellt, in welcher aber die Höhe unbestimmt gelassen ist, da sie sich von einem Querschnitte zum anderen ändert, wie dies aus Figur 4 hervorgeht.

Die Flächen und Trägheitsmomente der Querschnitte 0, 1, 2, . . . 6 sind in der nachfolgenden Tabelle angegeben, welche auch die logarithmischen Complemente der Flächen und Trägheitsmomente enthält.

Querschnitte	Querschnittsflächen	Trägheitsmomente der Querschnitte	Logarithmische Complemente	
			der Flächen	der Trägheitsmomente
1	2	3	4	5
0	$\Omega_0 = 0{,}039024$	$I_0 = 0{,}022582$	1,4086682	1,6462376
1	$\Omega_1 = 0{,}037224$	$I_1 = 0{,}018779$	1,4291770	1,7263275
2	$\Omega_2 = 0{,}035666$	$I_2 = 0{,}015822$	1,4477456	1,8007386
3	$\Omega_3 = 0{,}034464$	$I_3 = 0{,}013754$	1,4626343	1,8615710
4	$\Omega_4 = 0{,}033624$	$I_4 = 0{,}012409$	1,4733506	1,9062632
5	$\Omega_5 = 0{,}033144$	$I_5 = 0{,}011675$	1,4795951	1,9327431
6	$\Omega_6 = 0{,}033024$	$I_6 = 0{,}011498$	1,4811703	1,9393777

Mit Benützung der in den zwei letzten Tabellen angeführten Werthe erhält man

$$\sum \frac{M^2}{I} = 7275 \,.\, Q^2 - 1\,248\,781\,000 \,.\, 2\,Q,$$

$$\sum \frac{P^2}{\Omega} = 161 \,.\, Q^2 + 2\,024\,000 \,.\, 2\,Q;$$

hiemit stellt sich die Formel (1) folgendermassen dar:

$$7436 \,.\, Q^2 - 1\,246\,757\,000 \,.\, 2\,Q, \qquad (2)$$

woraus

$$Q = 167\,670.$$

5. Mittellinie des Druckes, grösste Beanspruchung des Eisens per Quadratmeter und Senkung des Bogens im Scheitel. — Wenn man in der in Nummer 3 gegebenen Tabelle für Q den soeben gefundenen

Werth einsetzt, so erhält man die Werthe für die Biegungsmomente, die Normalpressungen und die Schubkräfte in den Querschnitten 0, 1, 2, . . . 6 des Bogens. Diese Werthe sind in der nachfolgenden Tabelle in den Colonnen 2, 3, 4 angeführt. Durch Division der Biegungsmomente durch die correspondirenden Normalpressungen ergeben sich die Zahlen der Colonne 5, welche die Entfernung der Druckmittelpunkte von den Querschnittsmittelpunkten bedeuten.*)

Mit Hilfe der schon vielfach angewendeten Formel

$$\frac{P}{\Omega} \pm \frac{M v}{I}$$

gelangt man zu den Werthen für die grösste Pressung per Quadratmeter an der inneren und äusseren Wölbung der in Betracht gezogenen Querschnitte, d. h. zu den in den Colonnen 6 und 7 der nachfolgenden Tabelle angeführten Zahlen.

Querschnitte	Biegungsmomente	Normalpressungen	Schubkräfte	Mittellinie des Druckes	Pressung per Quadratmeter	
					an der inneren Wölbung	an der äusseren Wölbung
1	2	3	4	5	6	7
0	0	187 819	+ 3428	0	4 800 100	4 800 100
1	+ 5 007	182 154	+ 876	+ 0,027	5 140 130	4 646 870
2	+ 129	177 543	— 443	+ 0,001	4 984 320	4 971 277
3	— 11 336	173 624	— 1351	— 0,065	4 370 110	6 705 290
4	— 20 285	170 493	— 1017	— 0,119	3 795 500	6 345 500
5	— 26 291	168 657	— 317	— 0,156	3 389 500	6 788 800
6	— 27 953	167 670	0	— 0,167	3 247 900	6 902 900

Bezüglich der Tangentialspannung per Quadratmeter ist bekannt, dass dieselbe bei Trägern mit einer vollen Mittelwand im Allgemeinen

*) In Figur 4 (Tafel VIII) wird durch eine continuirliche Linie die Mittellinie des Druckes für den Fall der Belastung über die ganze Länge des Bogens dargestellt. Die unterbrochene Linie hingegen repräsentirt die Mittellinie des Druckes für den in Nummer 6 behandelten Fall einer nur linksseitigen Belastung.

sehr klein ist. Um den grössten Werth derselben für den Querschnitt 0 zu bestimmen, in welchem die Maximal-Schubkraft stattfindet, berechnet man für diesen Querschnitt die Grösse

$$G_0 = \frac{1}{8}(0{,}250 \times 2{,}024^2 - 0{,}038 \times 2{,}000^2 - 0{,}176 \times 1{,}976^2 - 0{,}024 \times 1{,}800^2) = 0{,}013397;$$

beachtet sodann, dass das Trägheitsmoment dieser Fläche

$$I_0 = 0{,}022582$$

und die Dicke der Wand $s = 0{,}012$ ist, und findet schliesslich als gesuchten Werth

$$\frac{S_0\,G_0}{s\,I_0} = \frac{3428 \times 0{,}013397}{0{,}012 \times 0{,}022582} = 169\,100,$$

welches Resultat in der That sehr klein ist.

Um die Senkung des Scheitels des Bogens zu finden, kann man sich folgender Formel*) bedienen:

*) Diese Formel kann man leicht ableiten. — Nimmt man an, dass ausser den gleichförmig vertheilten Gewichten, durch welche der Bogen belastet wird, in dem Querschnitte 6 ein Gewicht ϖ wirke, so vermehrt sich offenbar die Verticalreaction des Widerlagers um die Grösse $\frac{\varpi}{2}$; es werden demnach die Biegungsmomente für die Querschnitte 0, 1, 2, ... 6, welche zuerst 0, M_1, M_2, ... M_6 waren, nunmehr

$$0,\ M_1 - \frac{\varpi}{2}x_1, \quad M_2 - \frac{\varpi}{2}x_2, \ \dots\ M_6 - \frac{\varpi}{2}x_6$$

sein; die Normalpressungen, welche zuerst P_0, P_1, P_2, ... P_6 waren, sind sodann

$$P_0 + \frac{\varpi}{2}\sin\varphi_0, \quad P_1 + \frac{\varpi}{2}\sin\varphi_1, \quad P_2 + \frac{\varpi}{2}\sin\varphi_2, \ \dots\ P_5 + \frac{\varpi}{2}\sin\varphi_5, \quad P_6.$$

Es ist also die Deformationsarbeit des ganzen Bogens, wenn man nicht allein das gleichförmig vertheilte Gewicht, sondern auch das Gewicht ϖ berücksichtigt, durch folgende Formel gegeben

$$2 \cdot \frac{3{,}964}{2\,E} \cdot \frac{1}{3}\left[4\frac{\left(M_1 - \frac{\varpi}{2}x_1\right)^2}{I_1} + 2\frac{\left(M_2 - \frac{\varpi}{2}x_2\right)^2}{I_2} + \dots + \frac{\left(M_6 - \frac{\varpi}{2}x_6\right)^2}{I_6}\right]$$

$$+ 2 \cdot \frac{3{,}964}{2\,E} \cdot \frac{1}{3}\left[\frac{\left(P_0 + \frac{\varpi}{2}\sin\varphi_0\right)^2}{\Omega_0} + 4\frac{\left(P_1 + \frac{\varpi}{2}\sin\varphi_1\right)^2}{\Omega_1} + \dots + \frac{P^2_6}{\Omega_6}\right].$$

$$\eta = -\frac{3{,}964}{E}\cdot\frac{1}{3}\left(4\,\frac{M_1\,x_1}{I_1}+2\,\frac{M_2\,x_2}{I_2}+4\,\frac{M_3\,x_3}{I_3}+\ldots+\frac{M_6\,x_6}{I_6}\right)$$
$$+\frac{3{,}964}{E}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{P_0\sin\varphi_0}{\Omega_0}+4\,\frac{P_1\sin\varphi_1}{\Omega_1}+2\,\frac{P_2\sin\varphi_2}{\Omega_2}+\ldots+4\,\frac{P_5\sin\varphi_5}{\Omega_5}\right),$$

in welcher $x_1, x_2, x_3, \ldots x_6$ die horizontalen Entfernungen des Mittelpunktes des Querschnittes 0, d. h. des Stützpunktes auf das Widerlager von den Mittelpunkten der Querschnitte 1, 2, ... 6 und $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_5$ die Winkel sind, welche die Querschnitte 0, 1, 2, ... 5 mit der Verticalen einschliessen.

Substituirt man in dieser Formel für die Biegungsmomente M_1, $M_2, \ldots$ und für die Normalpressungen $P_0, P_1, P_2, \ldots$ deren Werthe, wie sie in der letzten Tabelle gegeben wurden; für $x_0, x_1, x_2, \ldots, \sin\varphi_0$, $\sin\varphi_1, \sin\varphi_2, \ldots$ die aus den Figuren 4 und 9 der Tafel VIII resultirenden Werthe; und endlich für $I_0, I_1, I_2, \ldots, \Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \ldots$ die oben hiefür angeführten Werthe, so erhält man

$$\frac{1}{3}\left(4\,\frac{M_1\,x_1}{I_1}+2\,\frac{M_2\,x_2}{I_2}+4\,\frac{M_3\,x_3}{I_3}+\ldots+\frac{M_6\,x_6}{I_6}\right)=-\,103\,148\,000,$$
$$\frac{1}{3}\left(\frac{P_0\sin\varphi_0}{\Omega_0}+4\,\frac{P_1\sin\varphi_1}{\Omega_1}+2\,\frac{P_2\sin\varphi_2}{\Omega_2}+\ldots+4\,\frac{P_5\sin\varphi_5}{\Omega_5}\right)=6\,996\,000;$$

da
$$E = 18\,000\,000\,000$$

ist, ergibt sich also
$$\eta = 0^{\mathrm{m}}{,}0244.$$

6. Untersuchung des Falles, wo man eine zufällige Belastung nur auf der linken Hälfte des Bogens annimmt, und wobei das permanente Gewicht in Rechnung gezogen wird. — In diesem Falle hat man auf der linken Hälfte des Bogens ein Gewicht per laufenden Meter von 3520 Kilogramm und folglich ein Gesammt-

Der Differentialquotient dieses Ausdruckes mit Bezug auf das Gewicht ϖ gibt die Senkung des Querschnittes 6 in einer Function dieses Gewichtes. Ist aber der Bogen nur durch das gleichförmig vertheilte Gewicht belastet, so nimmt man den Differentialquotienten der obigen Formel mit Bezug auf ϖ und macht sodann $\varpi = 0$, was genau zu dem im Texte angegebenen Werth von η führt.

gewicht von 3520 × 23,423 = 82449 Kilogramm, während auf der rechten Hälfte die Last per Meter 920 Kilogramm beträgt und folglich das Gesammtgewicht 920 × 23,423 = 21549 Kilogramm ist.

Die Verticalreactionen der Auflager haben folgende Werthe:

für das linke Auflager

$$R = \frac{22{,}962 + \frac{23{,}423}{2}}{45{,}924} \cdot 82449 + \frac{22{,}962 - \frac{23{,}423}{2}}{45{,}924} \cdot 21549 = 67519;$$

für das rechte Auflager

$$R_1 = \frac{22{,}962 - \frac{23{,}423}{2}}{45{,}924} \cdot 82449 + \frac{22{,}962 + \frac{23{,}423}{2}}{45{,}924} \cdot 21549 = 36467.$$

Der Horizontalschub lässt sich leicht finden, denn derselbe setzt sich aus zwei Theilen zusammen, deren einer dem alleinigen permanenten Gewichte entsprechend jener Horizontalschub ist, welcher zu dem im Falle der vollständigen Belastungen sich ergebenden, im Verhältnisse der Gewichte per laufenden Meter in diesen beiden Fällen, d. h. im Verhältnisse von 920 zu 3520 steht; der andere Theil entspricht der alleinigen Belastung der linken Hälfte des Bogens und ist die Hälfte jenes, welchen man für eine alleinige Belastung der ganzen Brücke erhält. Dieser letztere steht zu dem im Falle der vollständigen Belastung gefundenen Horizontalschub im Verhältnisse von 2600 zu 3520. Für den in Betracht gezogenen Fall ist also der Horizontalschub

$$167\,670 \,.\, \frac{920}{3520} + \frac{1}{2} \times 167\,670 \,.\, \frac{2600}{3520} = 105\,750.$$

Nachdem man auf diese Weise zur Kenntniss der beiden an jedem Ende des Bogens wirkenden Kräfte, d. h. der verticalen Reaction und des Horizontalschubes gelangt ist, kann man das Biegungsmoment, die Normalpressung und die Schubkraft für jeden der Querschnitte 0, 1, 2, ... leicht berechnen und sodann folgende Tabelle zusammenstellen.

I. Linker Halbbogen					II. Rechter Halbbogen				
Querschnitte	Biegungs-momente	Normal-pressungen	Schub-kräfte	Mittel-linie des Druckes	Querschnitte	Biegungs-momente	Normal-pressungen	Schub-kräfte	Mittel-linie des Druckes
1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
0	0	125 599	— 11 717	0	0	0	111 315	+ 16 044	0
1	— 42 385	119 028	— 9 334	— 0,356	1	+ 48 707	85 106	+ 10 441	+ 0,572
2	— 74 437	113 771	— 5 715	— 0,654	2	+ 74 611	91 589	+ 5 157	+ 0,815
3	— 92 538	109 654	— 1 465	— 0,844	3	+ 78 254	97 068	— 239	+ 0,806
4	— 89 742	106 805	+ 3 847	— 0,840	4	+ 64 168	101 128	— 5 129	+ 0,634
5	— 65 127	105 575	+ 9 510	— 0,617	5	+ 31 977	104 119	— 9 911	+ 0,307
6	— 17 730	105 750	+ 14 920	— 0,168	6	— 17 730	105 750	— 14 920	— 0,168

Der Vergleich dieser Resultate mit jenen, welche in der vorhergehenden Nummer gefunden wurden, ergibt, dass die grösseren Biegungsmomente in dem Falle der Belastung nur einer Bogenhälfte stattfinden.

Die grösste Pressung des Eisens per Quadratmeter in der linken Bogenhälfte kommt am Gewölbrücken des Querschnittes 3 vor und ist deren Werth

$$\frac{109\,654}{0{,}034464} + \frac{92\,538 \times 0{,}822}{0{,}013754} = 8\,711\,000;$$

in der rechten Hälfte des Bogens findet die grösste Pressung an der inneren Laibung des Querschnittes 3 statt und hat dieselbe den Werth

$$\frac{97\,068}{0{,}034464} + \frac{78\,254 \times 0{,}822}{0{,}013754} = 7\,492\,000.$$

Im Falle der Belastung des ganzen Bogens beträgt die grösste Pressung per Quadratmeter 6 705 290 Kilogramm, d. h. dieselbe ist merklich kleiner als im Falle der Belastung nur einer Seite.

Was die Tangentialspannung betrifft, so erkennt man leicht, dass deren Maximum im Scheitel erscheint, wo die Schubkraft den grössten Werth hat und wo der kleinste Querschnitt sich befindet. Da für diesen Querschnitt

$$G_6 = \frac{1}{8}(0{,}250 \times 1{,}524^2 - 0{,}038 \times 1{,}500^2 - 0{,}176 \times 1{,}476^2$$
$$- 0{,}024 \times 1{,}300^2) = 0{,}008894,$$
$$I_6 = 0{,}011498,$$

und die Dicke des Steges $0^m{,}012$ ist, so findet man als grössten Werth der Tangentialspannung per Quadratmeter

$$\frac{S_6\, G_6}{s\,.\,I_6} = \frac{14920 \times 0{,}008894}{0{,}012 \times 0{,}011498} = 1\,686\,000.$$

7. Einfluss der Aenderung der Temperatur. — Wir wollen annehmen, der Bogen werde bei der Temperatur t aufgestellt und habe hiebei genau die nothwendigen Dimensionen, um denselben auf die Auflager zu stellen, ohne ausser den seinem Gewichte und seinen Belastungen entsprechenden elastischen Kräften noch andere derlei Kräfte hervorzurufen.

Wenn nun dieser Bogen bei der Temperatur t' frei wäre, so würde die Sehne seiner Achse, statt die Länge von

$$\frac{45^m{,}000 + 46^m{,}846}{2} = 45^m{,}923$$

zu haben, d. h. genau gleich zu sein der Entfernung zwischen den Mittelpunkten der Lagerplatten, um die Länge von

$$\frac{45^m{,}923}{82\,500}(t' - t)$$

zu gross sein.

Wird also der Bogen bei der Temperatur t aufgestellt, so ist offenbar bei der Temperatur t' der Horizontalschub gleich jenem, welcher für dieselben Belastungen bei der Temperatur t stattfindet, jedoch vermehrt um die Grösse Q, welche der Aenderung der Temperatur entspricht.

Um diese Grösse zu bestimmen, hat man zu beachten, dass die Deformationsarbeit des Bogens, welcher nur den an den Enden wirkenden Horizontalkräften Q unterworfen gedacht wird, durch die Formel (2) in Nummer 4 gegeben ist, indem man dieselbe mit dem Factor $2 \times \frac{3{,}964}{2E}$ multiplicirt und hiebei das Glied ersten Grades in Bezug auf Q weglässt, da dasselbe von den Belastungen abhängt. Diese Deformationsarbeit wird daher durch die Formel

$$2 \times \frac{3{,}964}{2E} \times 7436 \,.\, Q^2$$

ausgedrückt.

Zu diesem Ausdrucke muss man das Glied

$$-\frac{45{,}923}{82\,500}(t'-t)\,.\,Q$$

hinzufügen und schliesslich den Differentialquotienten nach Q gleich Null setzen. Man erhält somit die Gleichung

$$2 \times \frac{3{,}964}{E} \times 7436 \,.\, Q - \frac{45{,}923}{82\,500}(t'-t) = 0,$$

woraus mit

$$E = 18\,000\,000\,000$$

$$Q = 170{,}38\,(t'-t) \text{ wird.}$$

Um das Biegungsmoment, die Normalpressung und die Schubkraft für jeden der Querschnitte 0, 1, 2, . . . zu erhalten, muss man den für Q gefundenen Werth in die in Nummer 3 erhaltene Tabelle einsetzen, indem man vorerst daraus die einfach numerischen Glieder weglässt, da dieselben von den Belastungen abhängen. Man kann solchermassen die folgende Tabelle zusammensetzen:

Querschnitte 1	Biegungsmomente 2	Normalpressungen 3	Schubkräfte 4
0	$M_0^1 = 0$	$P_0^1 = 152\,(t'-t)$	$S_0^1 = 78\,(t'-t)$
1	$M_1^1 = 279\,(t'-t)$	$P_1^1 = 158\,(t'-t)$	$S_1^1 = 66\,(t'-t)$
2	$M_2^1 = 408\,(t'-t)$	$P_2^1 = 163\,(t'-t)$	$S_2^1 = 54\,(t'-t)$
3	$M_3^1 = 683\,(t'-t)$	$P_3^1 = 166\,(t'-t)$	$S_3^1 = 40\,(t'-t)$
4	$M_4^1 = 811\,(t'-t)$	$P_4^1 = 169\,(t'-t)$	$S_4^1 = 27\,(t'-t)$
5	$M_5^1 = 888\,(t'-t)$	$P_5^1 = 170\,(t'-t)$	$S_5^1 = 14\,(t'-t)$
6	$M_6^1 = 914\,(t'-t)$	$P_6^1 = 170\,(t'-t)$	$S_6^1 = 0$

Wenn die mittlere Temperatur, bei welcher der Bogen aufgestellt wurde, 15° ist, und wenn die Grenzen, zwischen welchen die Temperatur variirt, 40° und — 10° sind, so muss man offenbar für die beiden Grenzfälle, und zwar für den ersten

$$t' - t = 40 - 15 = 25,$$

für den zweiten $\quad t' - t = -10 - 15 = -25$

machen.

Die auf diese Weise sich ergebenden Resultate vereinigt man mit den in Nummer 6 erhaltenen, wobei angenommen wurde, dass die Belastung nur auf der linken Hälfte des Bogens stattfindet. Es ist indessen zu beachten, dass die grössten Biegungsmomente in der linken Hälfte des Bogens bei der Temperatur von -10^0 und in der rechten Hälfte bei der Temperatur von 40^0 sich ergeben. Man erhält also folgende Tabellen:

Linker Halbbogen — *Rechter Halbbogen*

Temperatur von -10^0					Temperatur von 40^0				
Querschnitte	Biegungsmomente	Normalpressungen	Schubkräfte	Mittellinie des Druckes	Querschnitte	Biegungsmomente	Normalpressungen	Schubkräfte	Mittellinie des Druckes
1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
0	0	121799	— 13667	0	0	0	115115	+ 14094	0
1	— 49350	115078	— 10984	— 0,428	1	+ 55682	89056	+ 8791	+ 0,625
2	— 84637	109696	— 7065	— 0,771	2	+ 84811	95664	+ 3807	+ 0,886
3	— 109613	105504	— 2465	— 1,038	3	+ 95329	101218	— 1239	+ 0,941
4	— 100017	102580	+ 3172	— 0,975	4	+ 84443	105353	— 5804	+ 0,802
5	— 87327	101325	+ 9160	— 0,861	5	+ 54177	108369	— 10261	+ 0,499
6	— 40580	101500	+ 14920	— 0,399	6	+ 5120	110000	— 14920	+ 0,046

Die grösste Pressung des Eisens per Quadratmeter findet in dem Falle, auf welchen sich die erste dieser Tabellen bezieht, am Gewölbrücken des Querschnittes 3 statt und ist deren Werth

$$\frac{105\,504}{0{,}034464} + \frac{109\,613 \times 0{,}822}{0{,}013754} = 9\,516\,000;$$

in dem Falle, auf welchen sich die zweite Tabelle bezieht, tritt die grösste Pressung des Eisens per Quadratmeter an der inneren Laibung des Querschnittes 3 auf und ist deren Werth

$$\frac{101\,218}{0{,}034464} + \frac{95\,329 \times 0{,}822}{0{,}013754} = 8\,550\,000.$$

8. Schlussfolgerung. — Diese letzten Resultate zeigen, dass mit den für die Bögen angenommenen Dimensionen die Brücke nicht den nöthigen Grad von Festigkeit besitzt.

Man muss also die Bögen verstärken, indem man an der inneren und an der äusseren Wölbung ein zweites Blech von $0^m{,}25$ Breite und $0^m{,}012$ Dicke befestigt, welches sich von der Mitte des Theiles 1, 2 bis zur Mitte des Theiles 4, 5, d. h. über eine Länge von ungefähr 12 Metern erstreckt. Die Fläche und das Trägheitsmoment des Querschnittes 3 haben sodann folgende Werthe:

$$\Omega_3 = 0{,}034464 + 2 \times 0{,}250 \times 0{,}012 = 0{,}040464,$$

$$I_3 = 0{,}013754 + \frac{0{,}25}{12}(1{,}668^3 - 1{,}644^3) = 0{,}017035;$$

die grösste Pressung des Eisens per Quadratmeter ist somit

$$\frac{105\,504}{0{,}040464} + \frac{109\,613 \times 0{,}834}{0{,}017035} = 7\,970\,000.$$

Diese Pressung kann nicht als zu hoch gegriffen betrachtet werden, nachdem die den Aenderungen der Temperatur entsprechenden Beanspruchungen des Materials schon in Rechnung genommen wurden.*)

*) Vergleicht man die grösste Pressung des Eisens per Quadratmeter für den Bogen mit ebenen Auflagflächen, d. h. für den als eingemauert anzusehenden, und für den Bogen mit cylindrischen Auflagflächen, d. h. für den einfach unterstützten, so könnte man glauben, dass der erste Fall für die Oekonomie in der Anwendung des Eisens ungünstig wäre, was aber den elementarsten Anschauungen entgegen wäre. Macht man aber einen vollständigen Vergleich der für die beiden Bögen erhaltenen Resultate, so erkennt man, dass, wenn man die Menge des zu verwendenden Eisens auf das genau nothwendige Mass beschränken könnte, der Bogen mit ebenen Auflagflächen ökonomischer wäre als jener mit cylindrischen.

In der Praxis hingegen tritt oft das Gegentheil ein, und zwar:

1. weil die Einmauerung nur durch die Wahl besonderer Dispositionen zu erreichen ist, für welche eine gewisse Menge Eisen anzuwenden ist, welche in obigem Vergleiche nicht inbegriffen ist;

2. weil es nicht möglich ist, den Bogen so zu construiren, dass das Eisen genau in dem nur nothwendigen Masse vertheilt ist.

12. Capitel.

Betrachtung der Brücke aus Ziegelmauerwerk, welche für die Eisenbahnlinie von Mailand nach Venedig über den Oglio construirt wurde.

Prüfung der Stabilität des Gewölbes des grossen mittleren Bogens.

(Tafel IX.)

1. Allgemeine Angaben. — Lichte Oeffnung*) . . 42^m,00;
Pfeilhöhe 11^m,90;
Bogenweite der inneren Laibung 118^0 5′ 42″;
Halbmesser der inneren Laibung 24^m,479;
Breite des Gewölbes in der Richtung der Erzeugenden . . 7^m,50;
Stärke des Gewölbes im Scheitel 1^m,40;
Stärke des Gewölbes im Anlauf 2^m,38;

Der Gewölbrücken zeigt mehrere Abstufungen, wie aus Tafel IX zu ersehen ist.

2. Belastungen. — In den folgenden Berechnungen setzen wir an Stelle des wirklichen, stufenförmig gebildeten Gewölbrückens eine cylindrische Oberfläche, welche als Leitlinie eine aus Kreisbögen zusammengesetzte Curve hat, deren jeder durch die drei auf einander folgenden Stufen geht. Man darf daher nicht vergessen, dass das Gewölbe, wofür die hier berechneten Resultate streng genommen zur Anwendung gelangen würden, das theoretische Gewölbe ist, welches als Gewölbrücken obge-

*) Die Oeffnung von 42 Meter wurde seitens des obersten Rathes für öffentliche Bauten vorgeschrieben, und zwar in Folge der durch andere Projecte, welche die Construction von Pfeilern im Flussbette zur Voraussetzung hatten, hervorgerufenen Opposition. Das definitive Project wurde von Herrn César Bermani, Ingenieur der oberitalienischen Bahn, ausgearbeitet, und leitete derselbe auch den Bau dieses Werkes.

nannte cylindrische Fläche hat. Diese Resultate lassen sich aber offenbar mit genügender Annäherung auf das wirkliche Gewölbe anwenden.

Dem Gebrauche gemäss wird hier eine Brückenbreite von nur einem Meter betrachtet, obzwar diese Annahme keine Vereinfachung und auch keinen Vortheil in der Berechnung bietet und daher gar nicht nothwendig wäre.

Das Gewölbe wurde mit ausgesuchten Ziegelsteinen und mit Mörtel ausgeführt, welcher mit hydraulischem Kalk von Palazzolo zusammengesetzt wurde.

Das Gewicht des Mauerwerks des Gewölbes beträgt 2000 Kilogramm per Cubikmeter.

Die Hintermauerung des Gewölbes besteht ebenfalls aus Ziegelmauerwerk und ist von einer Cementschichte bedeckt, um das Eindringen des Wassers zu verhindern. Auf diese Cementschichte wurde bis zur Schienenhöhe Kies geschüttet, welcher ein Gewicht von 1600 Kilogramm per Cubikmeter hat.

Die grösste Belastung, welche die Brücke beim Verkehr der Züge zu ertragen hat, beträgt 8000 Kilogramm per Längenmeter der Brücke, d. h.

$$\frac{8000}{7{,}50} = 1067 \text{ Kilogr.}$$

per Quadratmeter der Fläche.

Behufs Vereinfachung der Berechnung ist es angezeigt, sowohl den auf der Cementschichte ruhenden Kies, als auch die Belastung in Gewichten des Gewölbmauerwerks zu reduciren; man kann also die verticale Höhe des Kieses im Verhältnisse von 2000 zu 1600 vermindern und die Belastung durch eine Mauerwerksschichte darstellen, deren Höhe

$$\frac{1067}{2000} = 0^{\text{m}}{,}533 \quad \text{beträgt.}$$

Nimmt man nun als Einheit das Gewicht eines Cubikmeters Mauerwerk, d. h. 2000 Kilogramm, so hat augenscheinlich das Gewicht eines beliebigen Gewölbstückes und dessen Belastung genau denselben numerischen Werth wie die correspondirende Fläche.

Theilt man also die Achse des halben Gewölbes in sechs gleiche Theile, führt durch die Theilungspunkte Normale auf diese Achse, zieht

sodann in den Punkten, wo diese Normalen den Gewölbrücken treffen, Verticale, und nimmt man schliesslich an, dass jedes Gewölbstück den zwischen den beiden correspondirenden Verticalen befindlichen Theil der Belastung tragen muss, so kann man mit den in der Figur eingeschriebenen Massen die Fläche jedes Gewölbstückes und jedes der sechs Theile der Belastung finden; werden ferner die Schwerpunkte jeder dieser Flächen auf graphischem Wege bestimmt und die Entfernungen dieser Punkte von dem Scheitel gemessen, so lassen sich die Momente aller dieser Flächen bezüglich dieses Punktes berechnen und folglich auch die Momente der Flächen, welche das Eigengewicht und die Belastung der Stücke 0, 1; 0, 2; etc. darstellen.

Nachdem diese Momente bezüglich des Scheitels erhalten wurden, kann man hievon die Momente derselben Belastungen bezüglich der Querschnittsmittelpunkte 0, 1, 2, . . . 5 leicht ableiten, d. h. das Moment der totalen Belastung des Stückes 6, 0 in Bezug auf den Querschnittsmittelpunkt 0; und desgleichen die Momente des Stückes 6, 1; 6, 2; 6, 3; . . . 6, 5 bezüglich der Querschnittsmittelpunkte 1, 2, 3, . . . 5.

Nach Ausführung dieser Operationen findet man folgende Resultate, wobei zu beachten ist, dass die in den Colonnen 3, 5 und 7 gegebenen Momente nicht die Momente bezüglich des Scheitels sind, sondern jene in Bezug auf die Mittelpunkte der Querschnitte 0, 1, 2, . . . 5; so wurden z. B. für das Gewölbstück 6, 3 die gegebenen Momente in Bezug auf den Mittelpunkt des Querschnittes 3 berechnet.

Gewölbstücke	Gewölbe allein		Belastung		Gewölbe und Belastung	
	Flächen	Momente	Flächen	Momente	Flächen	Momente
1	2	3	4	5	6	7
6 . 0	51,35	458,49	94,67	556,19	146,02	1014,68
6 . 1	41,17	339,55	66,14	378,42	107,31	717,97
6 . 2	31,42	224,96	42,19	227,85	73,61	452,81
6 . 3	22,11	127,66	24,81	118,63	46,92	246,29
6 . 4	13,59	56,28	13,12	48,80	26,71	105,08
6 . 5	6,34	14,52	5,52	11,46	11,86	25,98

3. Benennungen und allgemeine Formeln für den Fall der Abrüstung der Leerbögen, d. h. so lange der Bogen nur sein eigenes Gewicht trägt. — Da in dem vorliegenden Falle die Belastung in Bezug auf den Scheitel symmetrisch ist, muss in diesem Querschnitte die Schubkraft gleich Null sein; folglich sind das Biegungsmoment M und die Normalpressung P im Scheitel als Unbekannte des Problems anzusehen, und man kann leicht das Biegungsmoment, die Normalpressung und die Schubkraft für einen beliebigen Querschnitt in Functionen derselben ausdrücken. Denkt man sich den Bogen im Scheitel geschnitten, so bleibt offenbar jede Hälfte im Gleichgewichte, vorausgesetzt, dass man im Scheitelquerschnitte eine nach einem *gleichförmig veränderlichen* Gesetze vertheilte Pressung anbringt, deren totale Grösse P beträgt, und deren Moment bezüglich der Biegungsachse des Scheitels, d. h. die Summe der elementaren Momente gleich M ist.

Um das Biegungsmoment, die Normalpressung und die Schubkraft für einen beliebigen Querschnitt, z. B. für den Querschnitt 4, auszudrücken, muss man die im Scheitel angebrachte Pressung und das Gewicht des Bogenstückes 6, 4 berücksichtigen, dessen Moment bezüglich des Mittelpunktes des Querschnittes 4 in der Colonne 3 der in vorhergehender Nummer angeführten Tabelle enthalten ist. Man erhält also

$$M_4 = M - 1,28 \,.\, Q + 56,28,$$
$$P_4 = 0,943 \,.\, Q + 13,59 \times 0,335,$$
$$S_4 = 0,335 \,.\, Q - 13,59 \times 0,943.$$

Querschnitte 1	Biegungsmomente 2	Normalpressungen 3	Schubkräfte 4
0	$M_0 = M - 11,96 \,.\, Q + 458,49$	$P_0 = 0,517 \,.\, Q + 44,01$	$S_0 = 0,857 \,.\, Q - 26,55$
1	$M_1 = M - 8,47 \,.\, Q + 339,55$	$P_1 = 0,655 \,.\, Q + 31,12$	$S_1 = 0,756 \,.\, Q - 26,97$
2	$M_2 = M - 5,45 \,.\, Q + 224,96$	$P_2 = 0,775 \,.\, Q + 19,95$	$S_2 = 0,635 \,.\, Q - 24,35$
3	$M_3 = M - 2,98 \,.\, Q + 127,66$	$P_3 = 0,870 \,.\, Q + 10,88$	$S_3 = 0,492 \,.\, Q - 19,24$
4	$M_4 = M - 1,28 \,.\, Q + 56,28$	$P_4 = 0,943 \,.\, Q + 4,55$	$S_4 = 0,335 \,.\, Q - 12,82$
5	$M_5 = M - 0,38 \,.\, Q + 14,52$	$P_5 = 0,987 \,.\, Q + 1,08$	$S_5 = 0,170 \,.\, Q - 6,26$
6	$M_6 = M$	$P_6 = 1,000 \,.\, Q$	$S_6 = 0$

Nach Aufstellung der analogen Formeln für alle Querschnitte 0, 1, 2, ... 5 und Durchführung der numerischen Operationen kann man die vorhergehende Tabelle bilden, in welcher nur M und Q als Unbekannte vorkommen.

4. Bestimmung der Unbekannten. — Obgleich das zu untersuchende Gewölbe nicht homogen ist, muss es doch als solches betrachtet werden, da die Vertheilung der Ziegel und des Mörtels für dessen ganze Ausdehnung dieselbe ist.

Wenn man die Leerbögen abrüstet, wird sich das Gewölbe offenbar deformiren; da es aber symmetrisch ist, so wird der Scheitelquerschnitt, welcher vor der Abrüstung vertical war, auch während der Deformation vertical bleiben und sich in horizontaler Richtung weder nach links, noch nach rechts verschieben. Denkt man sich nun eine Hälfte des Gewölbes entfernt und, um das Gleichgewicht zu erhalten, im Scheitel der anderen Hälfte den Horizontalschub Q und das Biegungsmoment M angebracht, so kann man die Werthe von Q und von M durch die Bedingung bestimmen, dass bei der Deformation des Halbbogens unter der Einwirkung des Horizontalschubes Q und des Momentes M und seines Eigengewichtes der Scheitelquerschnitt immer vertical bleibt, d. h.

1. dass dessen horizontale Verrückung Null ist,
2. dass dessen Drehung ebenfalls Null ist.

Man findet die Werthe von M und Q, welche diesen Bedingungen entsprechen, indem man die Deformationsarbeit des Halbbogens in einer Function der beiden Unbekannten ausdrückt und die Differentialquotienten nach denselben gleich Null setzt.

Nennt man

E den mittleren Zusammendrückungscoëfficienten des Gewölbes,
$\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \ldots \Omega_6$ die Flächen der Querschnitte 0, 1, 2, ... 6,
$I_0, I_1, I_2, \ldots I_6$ die Trägheitsmomente dieser Querschnitte

und setzt man der Kürze halber

$$\sum \frac{M^2}{I} = \frac{1}{3}\left(\frac{M^2_0}{I_0} + 4\frac{M^2_1}{I_1} + 2\frac{M^2_2}{I_2} + 4\frac{M^2_3}{I_3} + 2\frac{M^2_4}{I_4} + 4\frac{M^2_5}{I_5} + \frac{M^2_6}{I_6}\right),$$

$$\sum \frac{P^2}{\Omega} = \frac{1}{3}\left(\frac{P^2_0}{\Omega_0} + 4\frac{P^2_1}{\Omega_1} + 2\frac{P^2_2}{\Omega_2} + 4\frac{P^2_3}{\Omega_3} + 2\frac{P^2_4}{\Omega_4} + 4\frac{P^2_5}{\Omega_5} + \frac{P^2_6}{\Omega_6}\right),$$

so erhält man als Ausdruck für die Deformationsarbeit des halben Gewölbes (indem man jenen Theil vernachlässigt, welcher der Verschiebung entspricht, da derselbe einen sehr kleinen Einfluss auf die Resultate der Berechnung hat) die Formel

$$\frac{4,37}{2\,E}\left(\sum \frac{M^2}{I}+\sum \frac{P^2}{\Omega}\right)$$

oder die folgende, wenn man den numerischen Factor $\frac{4,37}{2\,E}$ weglässt, was nichts an den Gleichungen ändert, welche man daraus ableitet, indem man die Differentialquotienten dieses Ausdruckes nach M und Q gleich Null setzt,

$$\sum \frac{M^2}{I}+\sum \frac{P^2}{\Omega}. \tag{1}$$

Die Werthe für die Flächen Ω_0, Ω_1, ..., für die Trägheitsmomente I_0, I_1, ..., sowie für die logarithmischen Complemente dieser Werthe sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

Querschnitte	Flächen	Trägheitsmomente	Logarithmische Complemente der Flächen	Logarithmische Complemente der Trägheitsmomente
1	2	3	4	5
0	2,38	1,1234	$\bar{1}$,62342	$\bar{1}$,94947
1	2,28	0,9877	$\bar{1}$,64207	0,00537
2	2,18	0,8633	$\bar{1}$,66154	0,06384
3	2,08	0,7499	$\bar{1}$,68194	0,12500
4	1,82	0,5024	$\bar{1}$,73993	0,29895
5	1,50	0,2812	$\bar{1}$,82391	0,55098
6	1,40	0,2287	$\bar{1}$,85387	0,64073

Substituirt man in der Formel (1) für die Momente M_0, M_1, ... und für die Pressungen P_0, P_1, ... deren Ausdrücke in Functionen von M und Q, wie sie durch die Tabelle in Nummer 3 gegeben wurden, und für Ω_0, Ω_1, Ω_2, ..., I_0, I_1, ... obige numerische Werthe, so erhält man

$$\sum \frac{M^2}{I} = 11{,}72\,.\,M^2 - 27{,}90\,.\,2\,M\,Q + 180{,}80\,.\,Q^2$$
$$+ 1138{,}68\,.\,2\,M - 7254{,}40\,.\,2\,Q,$$
$$\sum \frac{P^2}{\Omega} = 2{,}38\,.\,Q^2 + 28{,}42\,.\,2\,Q,$$

und die Formel (1) ergibt

$$11{,}72\,.\,M^2 - 27{,}90\,.\,2\,M\,Q + 183{,}18\,.\,Q^2 + 1138{,}68\,.\,2\,M - 7225{,}98\,.\,2\,Q.$$

Setzt man die Differentialquotienten dieses Ausdruckes nach M und Q gleich Null, so erhält man folgende Gleichungen:

$$11{,}72\,.\,M - 27{,}90\,.\,Q = -1138{,}68,$$
$$-27{,}90\,.\,M + 183{,}18\,.\,Q = 7225{,}98,$$

woraus

$$M = -5{,}096,$$
$$Q = 38{,}671.$$

5. Mittellinie des Druckes und Pressung per Quadratmeter an der inneren Laibung und am Gewölbrücken. — Durch Substitution der oben gefundenen Werthe für M und Q in die in Nummer 3 gegebene Tabelle erhält man die Werthe der Biegungsmomente, der Normalpressungen und der Schubkräfte in den Querschnitten 0, 1, 2, . . . 6. Dividirt man die Biegungsmomente durch die correspondirenden Normalpressungen, so erhält man die Entfernungen der Mittelpunkte des Druckes von jenen der Querschnitte, womit sich die Mittellinie des Druckes zeichnen lässt. Mit den erhaltenen Werthen für die Biegungsmomente und die Normalpressungen ergeben sich die Pressungen per Quadratmeter sowohl für die innere Laibung, als auch für den Gewölbrücken mit Hilfe der Formel

$$\frac{P}{\Omega} \pm \frac{M\,v}{I},$$

in welcher P und M die Normalpressung und das Biegungsmoment eines Querschnittes, Ω, I, v die Fläche, das Trägheitsmoment und die halbe Höhe desselben Querschnittes darstellen.

Alle Resultate dieser Berechnung sind in folgender Tabelle zusammengefasst.

Querschnitte	Biegungsmomente	Normalpressungen	Schubkräfte	Mittellinie des Druckes	Pressung per Quadratmeter	
					an der inneren Laibung	am Gewölbrücken
1	2	3	4	5	6	7
0	— 9,11	64,00	+ 6,59	— 0,142	34 504	73 040
1	+ 6,91	56,45	+ 2,27	+ 0,122	65 478	33 558
2	+ 9,11	49,92	+ 0,21	+ 0,182	69 858	21 738
3	+ 7,32	44,52	— 0,21	+ 0,164	63 110	22 506
4	+ 1,69	41,02	+ 0,13	+ 0,041	51 200	38 956
5	— 5,27	39,25	+ 0,31	— 0,135	24 822	79 846
6	— 5,10	38,67	0,00	— 0,132	24 022	86 462

6. Senkung des Gewölbes im Scheitel in Folge der Abrüstung der Leerbögen. — Die Formel, durch welche diese Senkung des Gewölbes im Scheitel gegeben wird, ist folgende:

$$\eta = \frac{4,37}{E} \cdot \frac{1}{3}\left(\frac{M_0\, x_0}{I_0} + 4\,\frac{M_1\, x_1}{I_1} + 2\,\frac{M_2\, x_2}{I_2} + \ldots + 4\,\frac{M_5\, x_5}{I_5}\right)$$

$$+ \frac{4,37}{E} \cdot \frac{1}{3}\left(\frac{P_0 \sin\varphi_0}{\Omega_0} + 4\,\frac{P_1 \sin\varphi_1}{\Omega_1} + \ldots + 4\,\frac{P_5 \sin\varphi_5}{\Omega_5}\right);$$

in derselben sind M_0, M_1, . . ., P_0, P_1, . . . die Biegungsmomente und die Normalpressungen, deren numerische Werthe durch die Colonnen 2 und 3 der letzten Tabelle gegeben wurden; I_0, I_1, . . ., Ω_0, Ω_1, . . . sind die Trägheitsmomente und die Flächen der Querschnitte; x_0, x_1, . . . sind die Entfernungen dieser Querschnitte von der durch den Scheitel gehenden Verticalebene; endlich sind φ_0, φ_1, . . . die Winkel, welche diese Querschnitte mit der Verticalen einschliessen. Hiebei hat man zu beachten, dass $x_6 = 0$ und $\sin\varphi_6 = 0$ ist.

Durch Substitution der aus der letzten Tabelle oder aus Tafel IX sich ergebenden Werthe erhält man

$$\frac{1}{3}\left(\frac{M_0\, x_0}{I_0} + 4\,\frac{M_1\, x_1}{I_1} + 2\,\frac{M_2\, x_2}{I_2} + \ldots + 4\,\frac{M_5\, x_5}{I_5}\right) = 310,20;$$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{P_0 \sin\varphi_0}{\Omega_0} + 4\,\frac{P_1 \sin\varphi_1}{\Omega_1} + 2\,\frac{P_2 \sin\varphi_2}{\Omega_2} + \ldots + 4\,\frac{P_5 \sin\varphi_5}{\Omega_5}\right) = 65,01.$$

Diese Resultate müssen noch mit dem Gewichte eines Cubikmeters Mauerwerk, d. h. mit 2000 multiplicirt werden; die Senkung des Gewölbes im Scheitel wird also durch die Formel

$$\eta = \frac{3\,280\,000}{E}$$

gegeben.

Kennt man den Werth von E, d. h. den mittleren Coëfficienten der Zusammendrückbarkeit des Mauerwerkes im Momente der Wegnahme des Leergerüstes, so kann man mit obiger Formel die Senkung des Gewölbes im Scheitel bestimmen.

Hat man hingegen diese Senkung während der Abrüstung mit $0^m,045$ gemessen, so kann man den Werth von E aus obiger Gleichung ableiten und erhält

$$E = 72\,889\,000.$$

7. Betrachtung des Falles, in welchem man nicht nur das Eigengewicht des Gewölbes, sondern auch die ganze permanente Last, sowie die zufällige Belastung, welche dasselbe zu tragen hat, in Rechnung zieht. — Behält man dieselben Benennungen bei wie in Nummer 3 und 4 und beachtet man, dass für den Fall der completen Belastung die Gewichte der Stücke 6, 0; 6, 1; 6, 2; . . . 6, 5 und deren Momente bezüglich der Querschnittsmittelpunkte 0, 1, 2, . . . 5 schon in den Colonnen 6 und 7 der in Nummer 2 enthaltenen Tabelle bekannt gegeben wurden, so kann man die folgende Tabelle leicht zusammensetzen.

Querschnitte 1	Biegungsmomente 2	Normalpressungen 3	Schubkräfte 4
0	$M_0 = M - 11,96 . Q + 1014,68$	$P_0 = 0,517 . Q + 125,14$	$S_0 = 0,857 . Q - 75,49$
1	$M_1 = M - 8,47 . Q + 717,97$	$P_1 = 0,655 . Q + 81,13$	$S_1 = 0,756 . Q - 70,29$
2	$M_2 = M - 5,45 . Q + 452,81$	$P_2 = 0,775 . Q + 46,74$	$S_2 = 0,635 . Q - 57,05$
3	$M_3 = M - 2,98 . Q + 246,29$	$P_3 = 0,870 . Q + 23,08$	$S_3 = 0,492 . Q - 40,82$
4	$M_4 = M - 1,28 . Q + 105,08$	$P_4 = 0,943 . Q + 8,95$	$S_4 = 0,335 . Q - 25,19$
5	$M_5 = M - 0,38 . Q + 25,98$	$P_5 = 0,987 . Q + 2,02$	$S_5 = 0,170 . Q - 11,71$
6	$M_6 = M$	$P_6 = 1,000 . Q$	$S_6 = 0$

In dieser Tabelle erscheinen nur die Unbekannten M und Q, welche man genau so wie in Nummer 4 bestimmen kann, d. h. man substituirt in der Formel (1) für die Momente M_0, M_1, . . . und für die Normalpressungen P_0, P_1, . . . deren Ausdrücke in Functionen von M und Q, dann bildet man die Differentialquotienten des sich ergebenden Ausdruckes, setzt dieselben gleich Null und erhält somit die gewünschten zwei Gleichungen.

Auf diese Weise findet man zuerst

$$\sum \frac{M^2}{I} = 11{,}72 \,.\, M^2 - 27{,}90 \,.\, 2\,MQ + 180{,}80 \,.\, Q^2$$
$$+ 2\,320{,}33 \,.\, 2\,M - 15\,243{,}21 \,.\, 2\,Q;$$

$$\sum \frac{P^2}{\Omega} = 2{,}38 \,.\, Q^2 + 68{,}67 \,.\, 2\,Q;$$

die Formel (1) ergibt

$$11{,}72 \,.\, M^2 - 27{,}90 \,.\, 2\,MQ + 183{,}18 \,.\, Q^2 + 2320{,}33 \,.\, 2\,M - 15\,174{,}54 \,.\, 2\,Q,$$

die Differentialquotienten hievon gleich Null gesetzt, geben die zwei Gleichungen

$$11{,}72 \,.\, M - 27{,}90 \,.\, Q + 2\,320{,}33 = 0,$$
$$-27{,}90 \,.\, M + 183{,}18 \,.\, Q - 15\,174{,}54 = 0,$$

woraus

$$M = -1{,}220,$$
$$Q = 82{,}653.$$

Da der Werth von M negativ ist, folgt daraus, dass der Druckmittelpunkt im Scheitel oberhalb des Querschnittsmittelpunktes liegt.

Nachdem nun die Werthe von M und Q bekannt sind, substituirt man dieselben in die in obiger Tabelle enthaltenen Ausdrücke für die Biegungsmomente, die Normalpressungen und die Schubkräfte, und indem man sodann die gleichen Operationen durchführt wie in Nummer 5, kann man die folgende Tabelle zusammensetzen, in welcher für jeden der Querschnitte 0, 1, 2, . . . 6 das Biegungsmoment, die Normalpressung, die Schubkraft, die Entfernung des Druckmittelpunktes vom Querschnittsmittelpunkte und endlich die Pressung per Quadratmeter sowohl für die innere Laibung, als auch für den Gewölbrücken enthalten sind.

Quer-schnitte	Biegungs-momente	Normal-pressungen	Schub-kräfte	Mittellinie des Druckes	Pressung per Quadratmeter	
					an der inneren Laibung	am Gewölb-rücken
1	2	3	4	5	6	7
0	+ 24,93	167,87	— 4,66	+ 0,152	183 880	88 048
1	+ 16,68	135,27	— 7,80	+ 0,121	157 162	80 154
2	+ 1,13	109,14	— 4,57	+ 0,010	102 980	97 272
3	— 1,24	94,99	+ 0,33	— 0,013	87 898	94 778
4	— 1,94	86,89	+ 2,50	— 0,022	88 180	103 108
5	— 4,99	83,60	+ 2,34	— 0,060	84 850	138 086
6	— 1,22	82,65	0,00	— 0,015	110 602	125 538

Um die Senkung des Gewölbes im Scheitel für den Fall der completen Belastung zu bestimmen, bediene man sich der in Nummer 6 gegebenen Formel, indem man darin für $M_0, M_1, M_2, \ldots; P_0, P_1, P_2, \ldots$ die in den Colonnen 2 und 3 der vorhergehenden Tabelle enthaltenen Werthe einsetzt. Man erhält auf diese Weise

$$\frac{1}{3}\left(\frac{M_0\, x_0}{I_0} + 4\,\frac{M_1\, x_1}{I_1} + 2\,\frac{M_2\, x_2}{I_2} + \ldots + 4\,\frac{M_5\, x_5}{I_5}\right) = 462{,}07;$$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{P_0 \sin\varphi_0}{\Omega_0} + 4\,\frac{P_1 \sin\varphi_1}{\Omega_1} + 2\,\frac{P_2 \sin\varphi_2}{\Omega_2} + \ldots + 4\,\frac{P_5 \sin\varphi_5}{\Omega_5}\right) = 153{,}56$$

und (nachdem man diese Resultate mit 2000, d. h. mit dem Gewichte eines Cubikmeters Mauerwerk multiplicirt hat)

$$\eta = \frac{5\,380\,000}{E}.$$

Wenn man annehmen kann, dass nach der vollständigen Herstellung der Brücke der Coëfficient der Zusammendrückbarkeit E noch denselben Werth hat, welchen er während der Abrüstung der Leerbögen gehabt hat, d. h. 72 889 000, so ist die totale Senkung des Gewölbes im Scheitel gegeben durch

$$\eta = \frac{5\,380\,000}{72\,889\,000} = 0{,}074.$$

Da sich das Gewölbe während der Abrüstung der Leerbögen durch die alleinige Wirkung seines Eigengewichtes um $0^m,045$ gesenkt hat, so sieht man, dass sich dasselbe in Folge der Belastung noch um $0^m,029$ senken wird.

Dieses Resultat zeigt, dass das Eigengewicht des Gewölbes auf die Senkung im Scheitel einen bedeutend grösseren Einfluss hat als die Last, welche dasselbe zu tragen hat. Dies erklärt sich durch die verschiedene Art, in welcher diese zwei Gewichte vertheilt sind; denn das Eigengewicht des Gewölbes ist über die ganze Länge beinahe gleichförmig vertheilt, während das Gewicht, durch welches das Gewölbe belastet wird, bei den Widerlagern bedeutend grösser ist als im Scheitel.

Man muss noch beachten, dass sich die Senkung des Gewölbes im Scheitel in Folge der Belastung geringer ergibt, als durch die Berechnung erhalten wurde, d. h. geringer als 0,029, und zwar aus folgenden Ursachen:

1. Im Masse, als man die Hintermauerung aufführt, nimmt auch die Bindung des Mörtels zu und dessen Zusammendrückbarkeit ab; ferner entspricht die Senkung von 0,029 zum grössten Theile dem Ballaste und der Belastung; sobald man den Ballast aufführt oder die Brücke belastet, ist der Mörtel schon fest gebunden und in Folge dessen sehr wenig zusammendrückbar;

2. bildet die Hintermauerung keine Belastung ohne Cohäsion, wie dies in der Berechnung angenommen wurde, sondern dieselbe bildet mit dem Mauerwerk der Widerlager einen einzigen massiven Körper. Sie bildet sozusagen zwei in die Widerlager eingefügte feste Körper, welche nicht nur auf das Gewölbe nicht mit ihren vollen Gewichten wirken können, sondern welche in Folge der Einmauerung auch noch verhindern, dass das Gewicht des Ballastes und der Belastung sich vollständig auf das Gewölbe überträgt. Dieser letzte Umstand hat jedoch geringen Einfluss auf die sehr gedrückten Bogen, für welche die Hintermauerung selbst bei den Widerlagern nur eine geringe Höhe hat.

13. Capitel.

Betrachtung der Brücke aus Hausteinen, welche von dem Ingenieur Charles Mosca über die Doire bei Turin construirt wurde.

(Tafel X.)

1. Allgemeine Angaben. — Oeffnung $45^m,00$;
Pfeilhöhe der inneren Laibung $5^m,50$;
Halbmesser der inneren Laibung $48^m,773$;
Bogenweite der inneren Laibung $54^0\ 56'\ 42''$;
Stärke des Gewölbes im Scheitel $1^m,50$;
Stärke des Gewölbes im Anlauf $2^m,00$;
Sehne des Gewölbrückens $46^m,846$;
Pfeilhöhe des Gewölbrückens $5^m,226$;
Halbmesser des Gewölbrückens $55^m,102$;
Bogenweite des Gewölbrückens $50^0\ 18'\ 42''$;
Breite der Brücke mit Einschluss der Geländer $12^m,60$.

2. Belastungen. — Das Gewölbe der Brücke besteht aus Granit von Manalaggio in der Nähe von Pignerol (Italien), dessen Gewicht per Cubikmeter 2750 Kilogramm beträgt. Die Hintermauerung besteht aus Bruchstein und ist dessen Gewicht 2300 Kilogramm per Cubikmeter. Auf dem Mauerwerk befindet sich eine $0^m,15$ dicke Schichte Mörtel und auf dieser bis zur Höhe des Macadams wieder gestampfte Erde. Das Gewicht dieser Mörtelschichte und der Erde beträgt 1600 Kilogramm per Cubikmeter, jenes des Macadams 1800 Kilogramm.

Zur Vereinfachung kann man sowohl die Hintermauerung, sowie die Mörtelschichte, die darüber gelagerte Erde und das Macadam auf das specifische Gewicht des Mauerwerkes des Gewölbes reduciren. Es vermindert sich dann die verticale Höhe des Bruchsteinmauerwerkes im Verhältnisse von 2750 zu 2300, d. h. man erhält die reducirten Höhen

durch Multiplication mit $\frac{2300}{2750}$. Die verticale Höhe der Mörtelschichte, der Erde und des Macadams muss man mit den Brüchen $\frac{1600}{2750}$, respective $\frac{1800}{2750}$ multipliciren. Man kann also über dem Gewölbrücken eine Linie derartig ziehen, dass die Last eines zwischen dieser Linie und dem Gewölbrücken befindlichen Materiales vom gleichen specifischen Gewichte wie jenes des Mauerwerks des Gewölbes gleich ist der wahren permanenten Last, und dass dieselbe auch in gleicher Weise vertheilt ist.

Als zufällige Belastung nehmen wir 600 Kilogramm per Quadratmeter an, wie dies einige Fachmänner vorschreiben, wenn auch selbst das grösste Menschengedränge nur eine Last von ungefähr 400 Kilogramm per Quadratmeter gibt. Diese angenommene Belastung ist gleich einer Schichte aus Hausteinmauerwerk von $\frac{600}{2750} = 0^m{,}218$ Höhe; wenn man also oberhalb der schon erhaltenen Linie, welche die Grenze der im Gewicht des Hausteines reducirten permanenten Last darstellt, in der Entfernung von $0^m{,}218$ in der Verticalen gemessen eine parallele Linie zieht, so erhält man die Grenzlinie für die totale Belastung der Brücke.

Nimmt man als Einheit das Gewicht eines Cubikmeters des Gewölbmauerwerkes, d. h. 2750 Kilogramm, und betrachtet man eine Breite der Brücke gleich einem Meter, so wird offenbar das Gewicht eines Gewölbstückes und der Belastung durch dieselbe Zahl ausgedrückt wie die correspondirende Fläche.

Theilt man die Achse des Halbgewölbes in sechs gleiche Theile, zieht durch die Theilungspunkte Senkrechte zu dieser Achse, errichtet sodann in den Punkten, wo diese Senkrechten den Gewölbrücken treffen, Verticale, und nimmt man schliesslich an, dass jeder dieser sechs Theile des Halbgewölbes jenen Theil der Last trägt, welcher zwischen den beiden correspondirenden Verticalen liegt, so kann man mit den in der Figur eingeschriebenen Massen die Fläche jedes Stückes des Gewölbes und jeden der sechs Theile der Belastung finden. Bestimmt man ferner auf graphischem Wege die Schwerpunkte dieser Flächen und misst man die Entfernungen derselben von der durch den Scheitel

gehenden Verticalebene, so kann man die Momente dieser Flächen bezüglich dieser Ebene und in Folge dessen auch die Momente mehrerer dieser Flächen zusammengenommen finden.

Kennt man nun das Moment einer beliebigen Partie des Gewölbes und der correspondirenden Last, z. B. der Partie 6, 3 in Bezug auf den Scheitel, so kann man das zur Berechnung nothwendige Moment bezüglich des Schwerpunktes des Querschnittes 3 hieraus ableiten, indem man das schon erhaltene Product von jenem Producte abzieht, welches man durch Multiplication des Gewichtes der Partie 6, 3 mit der Horizontalentfernung der Mittelpunkte der Querschnitte 3 und 6, d. h. mit 11,81 erhält. Nennt man

p_3 das Gewicht des Bogenstückes 6, 3,

d_3 und d_3' die Horizontalentfernung seines Mittelpunktes von den Mittelpunkten der Querschnitte 6 und 3,

D_3 die Horizontalentfernung der Mittelpunkte dieser zwei Querschnitte,

m_3 und m_3' das Moment des Gewichtes p_3 bezüglich des Scheitels und bezüglich des Mittelpunktes des Querschnittes 3,

so hat man
$$m_3 = p_3\, d_3, \qquad m_3' = p_3\, d_3';$$
da aber $d_3' = D_3 - d_3$ ist, ergibt sich
$$m_3' = p_3\, D_3 - p_3\, d_3 = p_3\, D_3 - m_3,$$
wie oben erwähnt wurde.

Auf diese Weise gelangt man zu folgenden Resultaten:

Gewölbstücke	Gewölbe		Belastung		Gewölbe und Belastung		Gewölbe und Belastung in Kilogramm	
	Flächen	Momente	Flächen	Momente	Flächen	Momente	Flächen	Momente
1	2	3	4	5	6	7	8	9
6 . 0	39,400	422,70	43,756	312,55	83,156	735,25	228 679	2 021 937
6 . 1	31,816	292,89	28,876	186,49	60,692	479,38	166 903	1 318 295
6 . 2	24,783	187,93	18,046	103,15	42,829	291,08	117 780	800 470
6 . 3	18,203	105,67	10,539	50,67	28,739	156,34	79 033	429 935
6 . 4	11,958	47,16	5,700	20,46	17,658	67,62	48 559	185 955
6 . 5	5,930	11,92	2,500	4,95	8,430	16,37	23 182	46 392

Es ist hiebei zu beachten, dass die in den Colonnen 3, 5, 7 und 9 gegebenen Momente nicht jene in Bezug auf den Scheitel sind, sondern die Momente bezüglich der entsprechenden Mittelpunkte der Querschnitte 0, 1, 2, . . . 6; so wurde z. B. für das Bogenstück 6, 3 das in der Tabelle angegebene Moment in Bezug auf den Mittelpunkt des Querschnittes 3 genommen.

Die in den Colonnen 8 und 9 angeführten Gewichte und Momente wurden aus den in den Colonnen 6 und 7 angegebenen Ziffern durch Multiplication mit 2750 abgeleitet.

3. Benennungen und allgemeine Formeln. — Ein Bogen aus Mauerwerk muss immer als an seinen Enden eingespannt (eingemauert) betrachtet werden, denn wenn derselbe genugsam studirt ist, wie man dies selbst für die erste Berechnung annehmen muss, so wird sich der Druck auf die Widerlager über die ganze Ausdehnung der Querschnitte des Anlaufes vertheilen.

Wenn aus der Berechnung resultiren würde, dass in einem Theile der Kämpferfugen Spannungen herrschen, und wenn diese Spannungen nicht stattfinden können, sei es weil das Gewölbe ohne Mörtel construirt wurde, sei es weil der angewendete Mörtel keine Widerstandskraft gegen Zug besitzt, so muss man die Berechnung nochmals aufnehmen, indem man sich die Querschnitte auf jene Theile reducirt denkt, welche bei der ersten Berechnung als gedrückt erscheinen. Diese Querschnitte können auch noch durch eine dritte Berechnung corrigirt werden.

Wir nehmen zuerst an, dass das Gewölbe der in Betracht gezogenen Brücke in die Widerlager eingefügt und vollständig belastet sei, so dass man für die Theile 6, 0; 6, 1; 6, 2; . . . die in den zwei letzten Colonnen der vorhergehenden Tabelle angeführten Gewichte und Momente hat.

Da die Belastung bezüglich des Scheitels symmetrisch ist, wird die Schubkraft in diesem Querschnitte gleich Null sein; folglich sind das Biegungsmoment M und die Normalpressung P im Scheitel die Unbekannten des Problems, und es lassen sich das Biegungsmoment, die Normalpressung und die Schubkraft für einen beliebigen Querschnitt leicht in Functionen dieser Unbekannten ausdrücken. Denkt man sich nun die zwei Hälften des Gewölbes getrennt, so werden dieselben offenbar im Gleichgewichte bleiben, sobald man im Scheitel jeder derselben eine

Pressung wirken lässt, welche nach einem *gleichförmig variablen Gesetze* derartig vertheilt ist, dass ihre Gesammtgrösse P und ihr Moment bezüglich der Biegungsachse M ist.

Man erhält auf diese Weise das Biegungsmoment, die Normalpressung und die Schubkraft für einen beliebigen Querschnitt; z. B. erhält man für den Querschnitt 4, wenn man die im Scheitel wirkende Pressung und das Gewicht des Theiles 6, 4, dessen Moment bezüglich des Mittelpunktes des Querschnittes 4 in der Tabelle der vorhergehenden Nummer angeführt ist, betrachtet, folgende Werthe:

$$M_4 = M - 0{,}60 \,.\, Q + 185\,955,$$
$$P_4 = 0{,}998 \,.\, Q + 0{,}154 \times 48\,559,$$
$$S_4 = 0{,}154 \,.\, Q - 0{,}988 \times 48\,559.$$

Durch Aufstellung der analogen Formeln für alle Querschnitte 0, 1, 2, . . . 6 und Ausführung der numerischen Operationen ergeben sich die Daten für folgende Tabelle:

Querschnitte	Biegungsmomente	Normalpressungen	Schubkräfte
1	2	3	4
0	$M_0 = M - 5{,}36 . Q + 2021937$	$P_0 = 0{,}895 . Q + 102217$	$S_0 = 0{,}447 . Q - 204655$
1	$M_1 = M - 3{,}76 . Q + 1318295$	$P_1 = 0{,}925 . Q + 63085$	$S_1 = 0{,}378 . Q - 154385$
2	$M_2 = M - 2{,}40 . Q + 800470$	$P_2 = 0{,}950 . Q + 35915$	$S_2 = 0{,}305 . Q - 111897$
3	$M_3 = M - 1{,}35 . Q + 429935$	$P_3 = 0{,}973 . Q + 18177$	$S_3 = 0{,}230 . Q - 76890$
4	$M_4 = M - 0{,}60 . Q + 185955$	$P_4 = 0{,}988 . Q + 7480$	$S_4 = 0{,}154 . Q - 47987$
5	$M_5 = M - 0{,}15 . Q + 46392$	$P_5 = 0{,}996 . Q + 1815$	$S_5 = 0{,}078 . Q - 22962$
6	$M_6 = M$	$P_6 = 1{,}000 . Q$	$S_6 = 0$

4. Bestimmung des Werthes der Unbekannten. — Der Werth von Q und M wird offenbar variiren, je nachdem das Gewölbe homogen ist oder nicht und je nachdem die Mörtelschichten in den Fugen über die ganze Ausdehnung derselben eine constante Dicke oder aber eine von der inneren Laibung zum Gewölbrücken variable Dicke haben,

weshalb es nothwendig ist, eine kurze Beschreibung des Gewölbes zu geben.*)

Dieses Gewölbe ist aus 93 Reihen Granitblöcken zusammengesetzt, welche derartig behauen sind, dass sie ohne Zwischenlagen von Mörtel genau ein Gewölbe von $45^m,00$ Sehne und $5^m,50$ Pfeilhöhe bilden können. Das Leergerüst des Bogens wurde hingegen nach einem Kreisbogen mit einer Sehne von $45^m,00$ und einer Pfeilhöhe von $5^m,75$ ausgeführt, dessen entwickelte Länge demnach um $0^m,162$ gegenüber jener der inneren Laibung des Projectes grösser ist.

Diese Anordnung wurde gewählt, um die Granitblöcke derartig lagern zu können, dass im Bogenanlauf die Mörtelfugen an der inneren Laibung eine genügende Dicke haben, während sie am Gewölbrücken beinahe Null sind. Die an der inneren Laibung breiteste Fuge ist die Kämpferfuge und die anderen vermindern sich nach und nach, bis sie in der 11. Fuge gleich Null werden, wie man aus nachfolgender Zusammenstellung entnehmen kann.

Fuge	*Dicke an der inneren Laibung*	*Dicke am Gewölbrücken*
1.	0,009	0,0037
2.	0,008	0,0027
3.	0,008	0,0034
4.	0,007	0,0033
5.	0,007	0,0032
6.	0,006	0,0030
7.	0,005	0,0024
8.	0,005	0,0023
9.	0,004	0,0020
10.	0,003	0,0014
11.	0,002	0,0009
	0,064	0,0283

*) Alle im Verlaufe der vorliegenden Betrachtung nothwendigen Daten sind einer Abhandlung des Herrn C. Mosca, Ingenieur der oberitalienischen Eisenbahnen, (Neffe des berühmten Constructeurs dieser Brücke) entnommen.

Auf diese Weise hat man bei jedem Anlaufe an der inneren Laibung $0^m,064$ gewonnen, d. h. $0^m,128$ für den ganzen Bogen. Um zu der ganzen Differenz von $0^m,162$ zu gelangen, bleiben noch $0^m,034$, aber man hat erwartet — was auch wirklich eingetreten ist — dass diese kleine Differenz in Folge der geringen Ungenauigkeiten der Granitblöcke verschwinden wird.

Von der 11. bis zur 36. Fuge wurde kein Mörtel angewendet.

In Folge der den Granitblöcken in der Nähe des Kämpfers gegebenen Stellung war der Winkel, welchen die 36. Fuge mit der durch den Scheitel gehenden Verticalfuge bildete, grösser als die Summe der Winkel der Granitblöcke, welche zwischen der 36. Fuge und dem Scheitel gelagert werden sollten; folglich musste man diese Differenz zwischen der 36. und 47. Fuge dadurch vertheilen, dass man die Steine derartig stellte, dass sie sich wohl an der inneren Laibung, aber nicht am Gewölbrücken berühren, und dass man die leeren Räume zwischen denselben mit Mörtel ausfüllte. Man hat also auch in der Nähe des Scheitels keilförmige Fugen wie im Bogenanlaufe, dieselben haben aber eine entgegengesetzte Richtung. Die Breite dieser Fugen ist aus folgender Zusammenstellung zu ersehen.

Fuge	*Dicke an der inneren Laibung*	*Dicke am Gewölbrücken*
37.	0	0,001
38.	0	0,001
39.	0	0,002
40.	0	0,002
41.	0	0,003
42.	0	0,003
43.	0	0,004
44.	0	0,006
45.	0	0,007
46.	0	0,008
47.	0	0,008
	0	0,045

Die Breite der Fugen hat man dadurch zu erhalten gewusst, dass man zuerst kleine Eisenkeile zwischen die einzelnen Steine gab und

dieselben erst durch Mörtel ersetzte, nachdem man im Bau des Gewölbes bis zur 39. Reihe von Steinen vorgeschritten war.

Alle diese Anordnungen hatten zum Zweck, eine gute Vertheilung der Pressungen zu erreichen, was auch thatsächlich geschah, wie aus folgender Berechnung sich ergibt. Hiezu kann man der Einfachheit halber annehmen, dass alle Fugen ohne Mörtel gebildet wurden, ausgenommen der zwei Kämpferfugen, deren jede als die Vereinigung der eilf unteren Mörtelschichten anzusehen ist, und einer Scheitelfuge, worin man sich die Mörtelschichten der 37. Fuge links bis zu jener rechts vereinigt denkt.

Zufolge dieser Annahme hat man also bei jedem Kämpfer eine Mörtelschichte, deren Dicke an der inneren Laibung $0^m,064$, am Gewölbrücken $0^m,0283$ beträgt, und im Scheitel eine andere Schichte, deren Dicke an der inneren Laibung Null ist und am Gewölbrücken $0^m,045 \times 2 = 0^m,09$ beträgt.

Man kann nun folgende Benennungen einführen:

E, E' die Zusammendrückungscoëfficienten des Granit und des Mörtels,

$h_0, h_1, h_2, \ldots h_6$ die Höhen des Gewölbes in den Querschnitten 0, 1, 2, ... 6,

$\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \ldots \Omega_6$ die Flächen dieser Querschnitte, welche den Höhen derselben numerisch gleich sind, da die Breite einen Meter beträgt,

$I_0 = \frac{1}{12} h^3_0,\ I_1 = \frac{1}{12} h^3_1, \ldots I_6 = \frac{1}{12} h^3_6$ die Trägheitsmomente dieser Querschnitte.

Die Werthe von $\Omega_0, \Omega_1, \ldots \Omega_6$; $I_0, I_1, \ldots I_6$, sowie deren logarithmische Complemente sind in nebenstehender Tabelle zusammengesetzt.

Wenn der ganze Bogen aus Granit wäre, d. h. wenn die theoretischen Verbindungsstücke im Bogenanfang und im Scheitel ebenfalls aus Granit wären, und wenn man jenen Theil der Deformationsarbeit, welcher der Verschiebung entspricht, vernachlässigt, so wird die Deformationsarbeit des ganzen Bogens durch die Formel

Querschnitte 1	Flächen 2	Trägheitsmomente 3	Logarithmische Complemente	
			der Flächen 4	der Trägheitsmomente 5
0	2,01	0,67672	$\bar{1}$,69680	0,16959
1	1,85	0,52764	$\bar{1}$,73283	0,27766
2	1,72	0,42404	$\bar{1}$,76447	0,37259
3	1,62	0,35429	$\bar{1}$,79049	0,45064
4	1,55	0,31032	$\bar{1}$,80967	0,50819
5	1,51	0,28691	$\bar{1}$,82102	0,54225
6	1,50	0,28125	$\bar{1}$,82391	0,55091

$$2 \cdot \frac{4{,}00}{2\,E}\left[\sum \frac{M^2}{I} + \sum \frac{P^2}{\Omega}\right] \qquad (1)$$

ausgedrückt, in welcher die Symbole $\sum \frac{M^2}{I}$ und $\sum \frac{P^2}{\Omega}$ die gleiche Bedeutung haben wie in den früheren Betrachtungen.

Um aber den genauen Ausdruck für die Deformationsarbeit des Gewölbes zu erhalten, muss man von diesem Ausdrucke jenen für die Deformationsarbeit der drei Granitkeile, welche fehlen, in Abschlag bringen und hiefür den betreffenden Ausdruck bezüglich der drei Keile aus Mörtel, welche deren Stelle einnehmen, hinzufügen.

Nun wird für einen Granitkeil, welcher einer zum mittleren Querschnitt senkrechten Pressung P und einem Momente M unterworfen ist, und dessen Dicke am Gewölbrücken a', an der inneren Laibung a'' ist, die Deformationsarbeit durch folgende Formel ausgedrückt:

$$\frac{1}{2\,E}\,\frac{a'+a''}{2}\left(\frac{P^2}{\Omega}+\frac{M^2}{I}+\frac{a''-a'}{a''+a'}\,\frac{4\,M P}{h\,\Omega}\right),^{*)}$$

worin h die Höhe des Querschnittes Ω und I dessen Trägheitsmoment ist.

*) Um diese Formel zu beweisen, sei $A\,B\,C\,D\,D'\,C'\,B'\,A'$ (Tafel X, Figur 4) ein Granitkeil, dessen Kanten $A\,A'$, $B\,B'$, $C\,C'$, $D\,D'$ untereinander parallel und gleichzeitig senkrecht sind auf eine Ebene, welche durch deren Mittelpunkte geht. Der Granitkeil ist daher bezüglich dieser Ebene symmetrisch, so dass man dieselbe

Für einen Keil aus Mörtel, welcher jenem aus Granit gleich ist, und welcher auch den gleichen Kräften unterworfen ist, wird die Deformationsarbeit durch dieselbe Formel gegeben, wenn man darin E in E' ändert. Die Differenz der beiden Arbeiten ist somit

der Abkürzung halber Symmetrie-Ebene nennen kann. Alle Flächen des Keiles oder Prismas seien frei, ausgenommen die zwei Flächen $A\,B\,C\,D$ und $A'B'C'D'$, welche durch Kräfte parallel zur Kante $A\,A'$, d. h. senkrecht auf die Symmetrie-Ebene beansprucht werden. Die auf die Fläche $A'B'C'D'$ wirkenden Kräfte werden mit den auf die Fläche $A\,B\,C\,D$ thätigen Kräften als gleich, in gleicher Weise vertheilt und im entgegengesetzten Sinne gerichtet angesehen, so dass der Keil sich unter der Einwirkung der äusseren Kräfte im Gleichgewichte befinden wird.

Nennt man P die Summe der auf die Fläche $A\,B\,C\,D$ wirkenden Kräfte, M die Summe ihrer Momente bezüglich der Biegungsachse $F\,G$ dieser Fläche, Ω die Fläche und I das Trägheitsmoment jenes Querschnittes des Keiles, welcher parallel zur Symmetrie-Ebene, d. h. senkrecht zur Kante $A\,A'$ ist, und sind die auf die Fläche $A\,B\,C\,D$ wirkenden Kräfte nach einem linearen Gesetze vertheilt, so wird die Vertheilung der Pressungen per Quadratmeter auf den mittleren Querschnitt durch die Formel

$$\frac{P}{\Omega}+\frac{M}{I}z$$

gegeben, wobei z die Entfernung eines Punktes des Querschnittes von der Biegungsachse ist.

Betrachtet man nun in diesem Keile ein Volumenelement $H\,K\,K'H'$, dessen seitlichen Flächen zu den Flächen $A\,B'$ und $A\,D'$ parallel sind und dessen auf die Kante $H\,H'$ senkrechter Querschnitt die unendlich kleinen Seiten $d\,y$ und $d\,z$ hat, und befindet sich die Kante $H\,H'$ in der Entfernung z von der Ebene $F\,G\,G'F'$, welche die Biegungsachsen der Querschnitte enthält, so ist offenbar das Volumenelement $H\,K\,K'H'$ einer Pressung gleich

$$\left(\frac{P}{\Omega}+\frac{M}{I}z\right)d\,y\,d\,z$$

unterworfen, welche parallel zur Kante $H\,H'$ ist. Die Deformationsarbeit dieses Volumenelementes wird, wenn man E den Elasticitätscoëfficient des Keiles nennt, ausgedrückt durch:

$$\frac{1}{2\,E}\overline{H\,H'}\cdot\left(\frac{P}{\Omega}+\frac{M}{I}z\right)^2 d\,y\,d\,z=\frac{1}{2\,E}\overline{N\,N'}\left(\frac{P}{\Omega}+\frac{M}{I}z\right)^2 d\,y\,d\,z$$
$$=\frac{1}{2\,E}\left(\frac{a'+a''}{2}-\frac{a'-a''}{h}z\right)\left(\frac{P}{\Omega}+\frac{M}{I}z\right)^2 d\,y\,d\,z.$$

Um die Deformationsarbeit des ganzen Keiles zu finden, muss man diese Formel zuerst nach y integriren, wobei z als constant betrachtet wird, und sodann nach z integriren.

Die erste Integration muss sich von 0 bis zur Dicke $A\,B$, welche gleich einem Meter angenommen wurde, erstrecken. Da die vorstehende Formel die Variable y

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{E'}-\frac{1}{E}\right)\frac{a'+a''}{2}\left(\frac{P^2}{\Omega}+\frac{M^2}{I}+\frac{a''-a'}{a''+a'}\frac{4\,M P}{h\,\Omega}\right).$$

Für jede der Kämpferfugen ist

$$P=P_0,\quad M=M_0,\quad \Omega=\Omega_0,\quad I=I_0,\quad h=h_0,$$
$$a'=0{,}0283,\quad a''=0{,}064;$$

für die Scheitelfuge ist

$$P=P_6,\quad M=M_6,\quad \Omega=\Omega_6,\quad I=I_6,\quad h=h_6,$$
$$a'=0{,}09,\quad a''=0.$$

Es ergibt sich also die Formel, welche man jener (1) hinzufügen muss, um die vollständige Deformationsarbeit des Gewölbes zu erhalten, in folgender Form:

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{E'}-\frac{1}{E}\right)\Bigg[0{,}0923\left(\frac{P^2_0}{\Omega_0}+\frac{M^2_0}{I_0}+1{,}547\,\frac{M_0\,P_0}{h_0\,\Omega_0}\right)\\ +0{,}045\left(\frac{P^2_6}{\Omega_6}+\frac{M^2_6}{I_6}-4\,\frac{P_6\,M_6}{h_6\,\Omega_6}\right)\Bigg].\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

nicht enthält, und da $\int_0^1 d\,y=1$ ist, so erhält man als Resultat der ersten Integration

$$\frac{1}{2\,E}\left(\frac{a'+a''}{2}-\frac{a'-a''}{h}\,z\right)\left(\frac{P}{\Omega}+\frac{M}{I}\,z\right)^2 d\,z,$$

oder
$$\frac{1}{2\,E}\cdot\frac{a'+a''}{2}\left(1-2\cdot\frac{a'-a''}{a'+a''}\frac{z}{h}\right)\left(\frac{P}{\Omega}+\frac{M}{I}\,z\right)^2 d\,z.$$

Die zweite Integration muss zwischen den Grenzen $-\frac{h}{2}$ und $\frac{h}{2}$ durchgeführt werden. Die Entwicklung der letzten Formel gibt

$$\frac{1}{2\,E}\cdot\frac{a'+a''}{2}\Bigg[\frac{P^2}{\Omega^2}+2\left(\frac{P\,M}{\Omega\,I}-\frac{a'-a''}{a'+a''}\cdot\frac{P^2}{h\,\Omega^2}\right)z$$
$$+\left(\frac{M^2}{I^2}-4\,\frac{a'-a''}{a'+a''}\cdot\frac{P\,M}{h\,\Omega\,I}\right)z^2-\frac{2}{h}\cdot\frac{a'-a''}{a'+a''}\frac{M^2}{I^2}\,z^3\Bigg]d\,z;$$

und da

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} d\,z=h=\Omega;\quad \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z\,d\,z=0;\quad \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2\,d\,z=\frac{h^3}{12}=I;\quad \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^3\,d\,z=0,$$

folgt daraus, dass das Resultat der zweiten Integration folgende Formel ist:

$$\frac{1}{2\,E}\frac{a'+a''}{2}\left(\frac{P^2}{\Omega}+\frac{M^2}{I}-4\,\frac{a'-a''}{a'+a''}\frac{P\,M}{h\,\Omega}\right),$$

d. h. die im Texte gegebene Formel.

Substituirt man für $M_0, M_1, M_2, \ldots P_0, P_1, P_2, \ldots$ deren Werthe in Functionen von M und Q, wie sie in der Tabelle in Nummer 3 angegeben wurden, und setzt man für $I_0, I_1, I_2, \ldots \Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \ldots$ die oben angeführten numerischen Werthe, so erhält man

$$\sum \frac{M^2}{I} = 16{,}34 \,.\, M^2 - 22{,}98 \,.\, 2\,M\,Q + 66{,}67 \,.\, Q^2$$
$$+ 7\,818\,893 \,.\, 2\,M - 23\,340\,905 \,.\, 2\,Q;$$

$$\sum \frac{P^2}{\Omega} = 3{,}39 \,.\, Q^2 + 91\,020 \,.\, 2\,Q;$$

$$\frac{P^2_0}{\Omega_0} + \frac{M^2_0}{I_0} + 1{,}547\,\frac{M_0\,P_0}{h_0\,\Omega_0} = 1{,}50 \,.\, M^2 - 7{,}87 \,.\, 2\,M\,Q + 41{,}64 \,.\, Q^2$$
$$+ 3\,052\,775 \,.\, 2\,M - 15\,966\,225 \,.\, 2\,Q;$$

$$\frac{P^2_6}{\Omega_6} + \frac{M^2_6}{I_6} + 4\,\frac{M_6\,P_6}{h_6\,\Omega_6} = 3{,}56 \,.\, M^2 - 0{,}889 \,.\, 2\,M\,Q + 0{,}67 \,.\, Q^2.$$

Aus Formel (1) wird sodann

$$\left.\begin{array}{l} 2 \cdot \dfrac{4{,}00}{2\,E}\,(16{,}34 \,.\, M^2 - 22{,}98 \,.\, 2\,M\,Q + 70{,}06 \,.\, Q^2 \\ \qquad + 7\,818\,893 \,.\, 2\,M - 23\,249\,885 \,.\, 2\,Q); \end{array}\right\} \quad (3)$$

und aus Formel (2)

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{E'} - \dfrac{1}{E}\right)(0{,}2984 \,.\, M^2 - 0{,}766 \,.\, 2\,M\,Q + 3{,}876 \,.\, Q^2 \\ \qquad + 281\,765 \,.\, 2\,M - 1\,466\,630 \,.\, 2\,Q). \end{array}\right\} \quad (4)$$

Die zwei Ausdrücke (3) und (4) muss man nun vereinigen, wozu es nothwendig ist, die Werthe der Coëfficienten E und E' oder wenigstens deren Verhältniss zu kennen. Es sind uns aber keine vertrauungswürdigen Versuche über die Zusammendrückbarkeit des Granits und des Mörtels bekannt; letzterer wird, da er frisch ist, wie dies bei der in Betracht gezogenen Brücke während der Abrüstung der Leerbögen der Fall war, sehr zusammendrückbar sein, während es der Granit sicherlich sehr wenig ist. Man kann daher annehmen, dass die Zusammendrückbarkeit des angewendeten Mörtels hundertmal grösser als jene des Granits war, d. h. es wäre

$$\frac{E'}{E} = \frac{1}{100}.$$

Bei Annahme dieses Verhältnisses kann die Formel (4) nunmehr folgendermassen geschrieben werden:

$$2 \cdot \frac{4,00}{2E} (3,69 \,.\, M^2 - 9,48 \,.\, 2MQ + 47,94 \,.\, Q^2$$
$$+ 3\,486\,835 \,.\, 2M - 18\,148\,625 \,.\, 2Q).$$

und durch Vereinigung dieser Formel mit jener (3) erhält man als Ausdruck für die Deformationsarbeit des Gewölbes

$$2 \cdot \frac{4,00}{2E} (20,03 \,.\, M^2 - 32,46 \,.\, 2MQ + 118,00 \,.\, Q^2$$
$$+ 11\,305\,728 \,.\, 2M - 41\,398\,510 \,.\, 2Q).$$

Die geometrischen Bedingungen, welchen das Gewölbe bei seiner Deformation entsprechen muss, sind die zwei folgenden:

1. Der Scheitelquerschnitt muss während der Deformation vertical bleiben, d. h. seine Drehung muss Null sein;

2. derselbe Querschnitt muss sich vertical senken, d. h. seine horizontale Verrückung muss Null sein.

Die Werthe von M und Q, welche diesen zwei Bedingungen entsprechen, werden dadurch erhalten, dass man die Differentialquotienten der Deformationsarbeit nach M und Q gleich Null setzt. Man hat demnach folgende zwei Gleichungen:

$$20,03 \,.\, M - 32,46 \,.\, Q + 11\,305\,728 = 0,$$
$$-32,46 \,.\, M + 118,00 \,.\, Q - 41\,398\,510 = 0,$$

woraus

$$Q = 352\,990,$$
$$M = 7\,690.$$

5. Mittellinie des Druckes und grösste Beanspruchung per Quadratmeter. — Durch Substitution der soeben gefundenen Werthe von M und Q in die in Nummer 3 angeführte Tabelle erhält man die Werthe für das Biegungsmoment, die Normalpressung und die Schubkraft in jedem der Querschnitte 0, 1, 2, . . . der Brücke, wie dieselben in nachstehender Tabelle zusammengestellt sind.

Durch Division der Biegungsmomente durch die correspondirenden Normalpressungen ergeben sich die Zahlen der Colonne 5, d. h. die Entfernungen der Druckmittelpunkte von den Querschnittsmittelpunkten.

Mit Hilfe der schon bekannten Formel

$$\frac{P}{\Omega} \pm \frac{Mv}{I}$$

erhält man die Pressung per Quadratmeter an der inneren Laibung und am Gewölbrücken für die in Betracht gezogenen Querschnitte.

Alle diese Resultate sind in folgender Tabelle vereinigt.

Querschnitte	Biegungsmomente	Normalpressungen	Schubkräfte	Mittellinie des Druckes	Pressung per Quadratmeter	
					an der inneren Laibung	am Gewölbrücken
1	2	3	4	5	6	7
0	+ 137 627	418 137	— 46 865	+ 0,329	412 425	3 635
1	— 1 315	389 595	— 20 955	— 0,003	212 905	208 305
2	— 38 990	371 245	— 4 237	— 0,105	294 915	136 765
3	— 38 895	361 627	+ 4 296	— 0,108	312 155	134 305
4	— 18 145	356 230	+ 6 372	— 0,051	275 146	184 514
5	+ 1 135	353 385	+ 4 571	+ 0,003	237 011	231 045
6	+ 7 690	352 990	0	+ 0,022	255 997	214 993

Aus dieser Tabelle sieht man, dass die Entfernung der Druckmittelpunkte von den Querschnittsmittelpunkten überall kleiner ist als der sechste Theil der Höhe des betreffenden Querschnittes, d. h. dass die Mittellinie des Druckes sich überall innerhalb des mittleren Drittels des Bogens bewegt, und dass daher nirgends Spannungen hervorgerufen werden, sondern dass überall Pressungen herrschen.

Die grösste Pressung findet an der inneren Laibung bei den Widerlagern statt und ist deren Werth 412 425 Kilogramm per Quadratmeter, d. h. $41^{\text{kg}},24$ per Quadratcentimeter.

Diese Pressung ist wohl für den bei dieser Brücke angewendeten Granit nicht zu gross, aber sie ist es bedeutend für den Mörtel, welcher sich meistentheils schon unter einer geringeren Pressung als 40 Kilogramm per Quadratcentimeter zerbröckelt.

Es ist deshalb nothwendig, hier eine wichtige Bemerkung anzuschliessen.

Findet die Abrüstung der Leerbögen eines Gewölbes statt, wenn der Mörtel schon fest ist, so wird sich derselbe unter einer Pressung von $41^{kg},24$ per Quadratcentimeter zerbröckeln und nach und nach aus den Fugen herausfallen und somit die Stabilität des Gewölbes beeinträchtigen; wenn hingegen die Abrüstung der Leerbögen stattfindet, bevor noch der Mörtel fest ist, so wird derselbe wohl eine sehr starke Compression erleiden, aber die Sandkörner können nicht herausfallen, da sie durch den noch nicht verhärteten Kalk gehalten werden. In diesem Falle findet die Bindung (das Festwerden) des Mörtels unter einer Pressung statt gleich jener, welcher er unterworfen werden soll, und es wird daher der Gefahr des Zerbröckelns vorgebeugt.

Auf Grund dieser Betrachtungen erscheint es angezeigt, für grosse Gewölbe, in welchen die Pressung per Quadratcentimeter einen hohen Werth erreicht, die Abrüstung der Leerbögen kurze Zeit nach Einsetzen des Schlusssteines vorzunehmen. Für die kleinen Gewölbe, in welchen die Pressung per Quadratcentimeter fast immer nur ein kleiner Theil jener ist, welche die Zerbröcklung hervorrufen würde, kann die Abrüstung der Leerbögen gleichgiltig vor oder nach dem Festwerden des Mörtels stattfinden.

6. Studie über die Vertheilung der inneren Kräfte, welche sich in dem Gewölbe geltend machen würden, wenn man in keiner Fuge Mörtel angewendet hätte. — In diesem Falle kann in keinem Punkte eine Spannung auftreten, denn die Granitblöcke (Granitkeile) sind einfach aufeinander gelagert. Man muss daher zuerst untersuchen, ob in irgend einem Punkte sich eine Spannung ergeben würde; wenn dies der Fall ist, so folgt daraus, dass an einigen Stellen die wirklich Widerstand bietenden Querschnitte des Gewölbes kleiner sind als die scheinbaren. Man muss sodann mittelst der successiven Annäherung die wirkliche Grösse der widerstandsfähigen Querschnitte bestimmen.

Um zu erkennen, ob in irgend einem Punkte die Neigung zu einer Spannung herrscht, muss man das Gewölbe als ein Monolith (aus einem Steine bestehend) betrachten, welcher in die Widerlager eingefügt und nicht einfach auf dieselben aufgestützt ist.

In diesem Falle wird die Deformationsarbeit des Gewölbes durch die in Nummer 4 gegebene Formel (1) oder durch die Formel (3) aus-

gedrückt. Indem man die Differentialquotienten der letzteren nach M und Q gleich Null setzt und sie sodann durch den numerischen Factor $2 \cdot \frac{4{,}00}{E}$ dividirt, erhält man die zwei Gleichungen:

$$16{,}34 \,.\, M - 22{,}98 \,.\, Q + 7\,818\,893 = 0,$$
$$-22{,}98 \,.\, M + 70{,}06 \,.\, Q - 23\,249\,885 = 0,$$

woraus

$$M = -21\,800,^{*)}$$
$$Q = 324\,710.$$

Durch Substitution dieser Werthe in die am Ende der Nummer 3 gegebene Tabelle erkennt man leicht, dass die Mittellinie des Druckes für die ganze Ausdehnung des Gewölbes, mit Ausnahme zweier ungefähr $2^m{,}80$ langer Stücke bei den Widerlagern, innerhalb des mittleren Drittels der Querschnitte geht. In diesen zwei Stücken geht sie unterhalb der Bogenachse, woraus folgt, dass sich das Gewölbe an der Aussenseite öffnen würde, was sich übrigens voraussehen lässt, wenn man die bezüglich der Sehne sehr kleine Pfeilhöhe berücksichtigt.

Für den Querschnitt 0, d. h. für die Kämpferfuge, findet man

$$M_0 = 259\,737,$$
$$P_0 = 392\,827;$$

die Entfernung des Druckmittelpunktes von dem Querschnittsmittelpunkte ergibt sich mit

$$\frac{259\,737}{392\,827} = 0{,}66,$$

d. h. viel grösser als der sechste Theil der Höhe des Querschnittes, welcher

$$\frac{2{,}01}{6} = 0{,}335 \quad \text{beträgt.}$$

*) Das negative Zeichen des Biegungsmomentes im Scheitel lässt erkennen, dass die Mittellinie des Druckes *oberhalb* des Mittelpunktes dieses Querschnittes geht, und zwar in der Entfernung

$$\frac{21\,800}{324\,710} = 0{,}067.$$

Aus Obigem ist zu ersehen, dass, wenn man in den Fugen Mörtel verwendet, in allen Punkten Pressungen herrschen, und dass sich das Gewölbe wie ein Monolith verhält, dass aber die Mittellinie des Druckes *unterhalb* des Mittelpunktes des Scheitelquerschnittes geht, woraus man sieht, wie gross der Einfluss der Mörtelschichten (welche doch eine bedeutend grössere Zusammendrückbarkeit haben als der Granit) auf die Vertheilung der Pressungen ist.

Wenn das Gewölbe ein an seinen Enden eingemauerter Monolith von der Art wäre, dass darin Spannungen auftreten können, so könnte man den Theil des Querschnittes suchen, in welchem Pressungen herrschen, und jenen, in welchem Spannungen herrschen. Zu diesem Behufe muss man die neutrale Achse, d. h. den geometrischen Ort der Punkte bestimmen, in welchen die Pressung Null ist. Nennt man die Entfernung dieser Achse, welche sich in der oberen Querschnittshälfte befindet, von der Biegungsachse y, so erhält man die Gleichung

$$\frac{P_0}{\Omega_0} - \frac{M_0}{I} y = 0,$$

woraus bei Einführung der Werthe von P_0, M_0, Ω_0, und I_0

$$y = 0{,}508.$$

Es ist also die Höhe des gepressten Theiles der Querschnitte

$$\frac{2{,}01}{2} + 0{,}508 = 1{,}513,$$

jene des gezogenen Theiles

$$\frac{2{,}01}{2} - 0{,}508 = 0{,}497.$$

Diese Resultate haben in dem betrachteten Falle keine Geltung, denn das Gewölbe könnte sich öffnen. Um nun die Tiefe zu bestimmen, auf welche sich in den verschiedenen Querschnitten dieses Oeffnen von dem Gewölbrücken aus erstreckt, nehme man an, dass die wirklich widerstehende Querschnittsfläche beim Bogenanfang beinahe gleich sei jenem Theile des Querschnittes, welcher in dem oben betrachteten hypothetischen Falle gepresst wird, d. h. welcher von der inneren Laibung gerechnet die Höhe von $1^{m},50$ hat.

Für die anderen Querschnitte 1, 2, . . . 6 ist die scheinbare Höhe zu gleicher Zeit die widerstandsfähige, denn diese Querschnitte werden, wie oben gesehen wurde, ihrer ganzen Ausdehnung nach gepresst.

Da für die Querschnitte beim Bogenanfang die Höhe sich geändert hat, so ändern sich auch deren Mittelpunkte, oder besser gesagt, deren Biegungsachse, welche sich nunmehr in der Entfernung von $0^{m},75$ von der inneren Laibung befindet; desgleichen ändern sich das Biegungs-

moment M_0, die Normalpressung P_0 und die Schubkraft S_0, denn man hat in dem Stücke 0, 1 nicht mehr dieselbe Bogenachse, und folglich hat man auch weder dieselben Hebelarme für den Horizontalschub Q und für die Gewichte, durch welche der Bogen belastet ist, noch dieselben Winkel, welche die Richtungen dieser Kräfte mit dem letzten Elemente der Bogenachse bilden.

Die in Nummer 3 und 4 gegebenen Tabellen entsprechen auch für den gegenwärtigen Fall, soferne man die Ausdrücke für M_0, P_0 und S_0 ausnimmt, welche sich in folgender Weise ergeben:*)

$$M_0 = M - 5{,}58 \,.\, Q + 1\,996\,782,$$
$$P_0 = 0{,}860 \,.\, Q + 116\,626,$$
$$S_0 = 0{,}510 \,.\, Q - 196\,664;$$

*) Die Gewölbachse hat man in dem Stücke 0, 1 in der Weise zu zeichnen, dass sie im Bogenanfang $0^m{,}75$ oberhalb der inneren Laibung geht. Um jeden Irrthum zu vermeiden, ist dies im Aufriss nicht geschehen, umsomehr, als dies Jedermann leicht selbst ausführen kann. Zur grösseren Deutlichkeit seien im Folgenden die für die Bildung der Ausdrücke M_0, P_0, S_0 nothwendigen Grössen gegeben, und zwar sowohl für den zuerst betrachteten Fall, wo man annimmt, dass die Querschnitte im Anlaufe auch den Spannungen widerstehen können, als auch für den vorliegenden Fall, wo man sich die Querschnitte am Bogenanfang auf die Höhe von $1^m{,}50$ reducirt denkt.

	Höhe des Querschnittes 0	
	$= 2^m{,}01$	$= 1^m{,}50$
Verticalentfernung des Mittelpunktes des Querschnittes 0 von der durch den Mittelpunkt des Scheitels gezogenen Horizontalen	5,36	5,58
Horizontalentfernung des Mittelpunktes des Querschnittes 0 von der durch den Mittelpunkt des Scheitels gezogenen Verticalen	23,05	23,05 — 0,11
Sinus des Winkels, welchen der Querschnitt 0 mit der Verticalen bildet	0,447	0,510
Cosinus desselben Winkels	0,895	0,860

Bei Beachtung, dass das Gewicht des Stückes 0, 6 gleich 228 679 Kilogramm ist, und dass dessen Moment in Bezug auf den ursprünglichen Mittelpunkt des Querschnittes 0 gleich 2 021 937 Kilogramm ist (Tabelle Seite 461, Colonne 8, Zeile 1), erhält man in folgender Weise die oben in den neuen Ausdrücken für M_0, P_0, S_0 gegebenen Zahlen:

$$1\,996\,782 = 2\,021\,937 - 228\,679 \times 0{,}11;$$
$$116\,626 = 228\,679 \times 0{,}510;$$
$$196\,664 = 228\,679 \times 0{,}860.$$

und die Werthe von Ω_0 und I_0, welche nunmehr die folgenden sind:

$$\Omega_0 = 1{,}50,$$
$$I_0 = 0{,}28125.$$

Mit diesen neuen Werthen von M_0, P_0, I_0, Ω_0 ergibt sich die Deformationsarbeit des Gewölbes, welche durch die Formel (1) in Nummer 4 ausgedrückt wurde, folgendermassen:

$$\frac{1}{2}(17{,}03 \,.\, M^2 - 26{,}95 \,.\, 2\,MQ + 92{,}86 \,.\, Q^2$$
$$+ 9\,189\,493 \,.\, 2\,M - 31\,309\,780 \,.\, 2\,Q),$$

wobei der numerische Factor $2 \cdot \frac{4{,}00}{E}$ ausgelassen wurde.

Setzt man die Differentialquotienten dieses Ausdruckes nach M und nach Q gleich Null, so erhält man folgende Gleichungen:

$$17{,}03 \,.\, M - 26{,}95 \,.\, Q + 9\,189\,493 = 0,$$
$$-26{,}95 \,.\, M + 92{,}86 \,.\, Q - 31\,309\,780 = 0,$$

woraus

$$Q = 333\,960,$$
$$M = -11\,120.$$

Mit diesen Werthen ergeben die oben gefundenen Ausdrücke für M_0 und P_0

$$M_0 = 122\,166,$$
$$P_0 = 403\,832,$$

woraus folgt, dass am Gewölbanfang die Mittellinie des Druckes unterhalb des Mittelpunktes des Querschnittes geht, und zwar in der Entfernung vom Mittelpunkte gleich

$$\frac{122\,166}{403\,832} = 0{,}30.$$

Da diese Entfernung noch grösser ist als $\frac{1{,}50}{6} = 0{,}25$, d. h. grösser als der sechste Theil der betreffenden Querschnittshöhe, so folgt daraus, dass im Anlaufe die Mittellinie des Druckes noch ausserhalb des mittleren Drittels geht.

Sucht man auch für diesen Fall die Ausdehnung des gepressten Theiles des Querschnittes, indem man den andern Theil als gegen Zug widerstandsfähig betrachtet, und nennt man y die Entfernung der neutralen Achse von der Biegungsachse, so erhält man die Gleichung

$$\frac{P_0}{\Omega_0} - \frac{M_0}{I_0} y = 0,$$

d. h. $$269\,221 - 434\,350 \,.\, y = 0$$

und folglich $$y = 0{,}62.$$

Der gepresste Theil des Querschnittes ist also

$$\frac{1{,}50}{2} + 0{,}62 = 1{,}37,$$

und der gezogene Theil $$\frac{1{,}50}{2} - 0{,}62 = 0{,}13.$$

Man könnte nun auf eine dritte annäherungsweise Berechnung übergehen, indem man $1^m{,}37$ als Höhe der Querschnitte am Bogenanfang nimmt. In der Praxis ist aber im Allgemeinen die zweite Annäherung genügend, und man könnte es folglich als vollkommen genügend ansehen, dass, wenn das Gewölbe als ohne Mörtel construirt betrachtet würde, die Querschnitte des Bogenanfanges nur in einer Höhe von $1^m{,}37$, von der inneren Laibung gerechnet, gepresst werden, und dass folglich das Gewölbe sich von dem Kämpfer in einer Höhe von $2{,}01 - 1{,}37 = 0{,}64$, vom Gewölbrücken gerechnet, abgehoben hätte.

Ohne auf eine dritte Berechnung überzugehen, kann man eine grössere Annäherung auch auf folgende Weise erreichen:

Zu diesem Behufe nenne man $1^m{,}37 - x$ den wirklich gepressten Querschnitt des Bogenanfanges. In der ersten Berechnung, wobei der betreffende Querschnitt gleich $2^m{,}01$ angenommen wurde, d. h. grösser als die wirklich gepresste Fläche, und zwar um die Grösse $0^m{,}64 + x$, wurde für den gepressten Theil des Querschnittes der Werth $1^m{,}513$ gefunden, welcher einen Fehler um $0^m{,}143 + x$ ergibt; in der zweiten Berechnung für einen Querschnitt von $1^m{,}50$, d. h. für einen um $0^m{,}13 + x$ grösseren Querschnitt als der wirkliche, wurde für den gepressten Theil des Querschnittes der Werth $1^m{,}37$ gefunden, welcher einen Fehler um x enthält. Wenn man nun annimmt, dass die ursprünglichen Fehler annäherungsweise proportional sind zu den Fehlern am Ende, so hat man die Proportion

$$0{,}64 + x : 0{,}143 + x = 0{,}13 + x : x,$$

welche sich auf eine Gleichung ersten Grades reducirt. Es ist also

$$x = 0^{m},042.$$

Der wirklich gepresste Querschnitt ist somit mit grosser Wahrscheinlichkeit

$$1^{m},37 - 0^{m},042 = 1^{m},328,$$

und folglich wird sich das Gewölbe in einer Höhe von

$$2^{m},01 - 1^{m},328 = 0^{m},682,$$

von dem Gewölbrücken gerechnet, abheben.

Die Normalpressung kann als gleich mit jener angenommen werden, welche bei der zweiten Annäherung erhalten wurde. Da nunmehr die Mittellinie des Druckes im Bogenanfange, an der Grenze des mittleren Drittels des thatsächlich gepressten Querschnittes geht, folgt daraus, dass die grösste Pressung per Quadratmeter das Doppelte der mittleren Pressung ist, und dass deren Werth

$$\frac{403\,832}{1,328} \times 2 = 608\,200$$

beträgt; die grösste Pressung per Quadratcentimeter ist also $60^{kg},82$.

7. Folgerung. — Da diese Pressung für den bei der Construction des Gewölbes angewendeten Granit nicht besonders gross ist, hätte dasselbe mit genügender Stabilität selbst ohne Anwendung der von dem berühmten Constructeur Ingenieur Charles Mosca erfundenen besonderen Anordnung gebaut werden können.

Der Vergleich der für die beiden untersuchten Fälle erhaltenen Resultate zeigt aber, wie nützlich diese Anordnungen für die Stabilität der Brücke sind, denn dieselben reduciren die grösste Pressung per Quadratcentimeter von $60^{kg},32$ (für das Gewölbe ohne Mörtel) auf $41^{kg},24$.

Druck von Adolf Holzhausen in Wien,
k. k. Hof- und Universitäts-Buchdrucker

Engerth, Wilhelm Freih. von, **Das Schwimmthor zur Absperrung des Wiener Donaucanales.** Mit 100 Abbildungen. 4⁰. [VI. 178 S.] cart. 10 fl. — 20 Mk.

Fialkowski, N., **Theilung des Winkels und des Kreises,** oder: Bi-, Tri-, Quadri- und Polysection jedes beliebigen Winkels in 72 neuen Methoden, nebst mehreren neuen Lehrsätzen und Sectionscurven, mit geschichtlicher Einleitung der historisch-merkwürdigen Aufgabe über die Trisection des Winkels und einem Anhange über die Construction der Winkel in Graden, als Beitrag zur elementaren und höheren Geometrie. Mit 178 in den Text eingedruckten Holzschnitten. 8⁰. [XII. 260 S.] 2 fl. 50 kr. — 5 Mk.

Fink, P., **Construction der Maschinentheile.** Mit 25 Tafeln und vielen Holzschnitten. 4⁰. [VIII. 176 S.] geh. 6 fl. — 12 Mk.

Glatz, Josef, Ingenieur, **Der eiserne Oberbau.** Ueber Construction, Kosten der Neuherstellung und Erhaltung desselben im Vergleiche zum Holzschwellen-Oberbau. Mit 27 Holzschnitten und 2 lithogr. Tafeln. Lex.-8⁰. [VI. 40 S.] 1 fl. 20 kr. — 2 Mk. 40 Pf.

Hoffmann, Ferd., **Der Bau der Kettenbrücken,** begründet auf die Gesetze des Gleichgewichtes der dabei in Wechselwirkung tretenden Kräfte und bearbeitet für das praktische Bedürfniss ohne Hilfe der Differential- und Integralrechnung. Mit 7 Kupfertafeln. Lex.-8⁰. [VIII. 114 S.] 2 fl. — 4 Mk.

Holzhey, Professor E., **Vorträge über Baumechanik.** I. Theil: Einzelne Constructionen aus Holz oder Eisen, in der Zug- oder Abscheerungs-, oder Druck-, oder Biegungs-, oder Zerknickungsfestigkeit beansprucht. Mit Tafel 1—8. [IV. 548 S.] II. Theil: Constructionssysteme aus Holz oder Eisen (Decken, Dächer, Brücken) und Steinconstructionen (Gewölbe, Futtermauern). Mit Tafel 9—17. [549—1118 S.] gr.-8⁰. 20 fl. — 40 Mk.

Marchetti, C., **Die Schiffsdampfmaschine.** Mit Zugrundelegung des englischen Originalwerkes von T. J. Main und T. Brown unter Berücksichtigung der neuesten Fortschritte der Technik bearbeitet. Mit zwei Tafeln und vielen Holzschnitten. 8⁰. [XXIV. 480 S.] 6 fl. — 12 M.

Michel, Jos., Ingenieur und Baumeister. **Theoretisch-praktisches Compendium des Hochbaues.** Handbuch für bautechnische und Unterrichtskreise. Mit vielen Tabellen und Holzschnitten. gr.-8⁰. [VIII. 492 S.] 4 fl. 50 kr. — 9 Mk.

Redl, H., **Formeln, Aufgaben und Tabellen für Curvenbestimmungen** nebst Situations- und Terrainsaufnahme. Hilfsbuch für Eisenbahn-Tracirungen. Mit 3 Tafeln. 4⁰. [68 S.] 2 fl. — 4 Mk.

Stelzel, Dr. Carl, Professor an der technischen Hochschule in Graz. **Theorie einfacher, statisch bestimmter Brückenträger** für praktische Ingenieure etc. Mit 4 Tabellen, 2 Tafeln und vielen Holzschnitten. gr.-8⁰. [X. 288 S.] 5 fl. — 10 Mk.

Druck von Adolf Holzhausen in Wien,
k. k. Hof- und Universitäts-Buchdrucker.

21. Mei.
23. Nov.

Kruis

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Castigliano, Alberto

Theorie des Gleichgewichtes elastischer Systeme und deren Anwendung

Bd.: [1]

1886

Math.a. 57 d-1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11650196-7